ಪದವಿಪೂರ್ವ ಮೊದಲ ವರ್ಷದ ಪಠ್ಯ

ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರ



ಪ್ರಸಾರಾಂಗ
ಕನ್ನಡ ವಿಶ್ವವಿದ್ಯಾಲಯ, ಹಂಪಿ
ವಿದ್ಯಾರಣ್ಯ ೫೮೩ ೨೭೬

ಅಧ್ಯಾಪಕರ ಹಾಗು ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ವಿಶೇಷ ಗಮನಕ್ಕೆ

ಎರಡು ವರ್ಷಗಳ
ಪದವಿಪೂರ್ವ ತರಗತಿಗಳಿಗೆ
ನಿಯಮಾವಳಿಗಳು, ಅಧ್ಯಯನ ವಿಷಯಗಳು ಹಾಗೂ
ಪರೀಕ್ಷಾ ಯೋಜನೆಗಳು

ಬೋಧನೆ ಹಾಗೂ ಪರೀಕ್ಷೆಗಳ ಮಾಧ್ಯಮ

ಎರಡು ವರ್ಷಗಳ ಅವಧಿಯ ಪದವಿಪೂರ್ವ ತರಗತಿಗಳ ಬೋಧನೆ ಹಾಗೂ ಪರೀಕ್ಷೆಗಳ ಮಾಧ್ಯಮ ಕನ್ನಡ ಅಥವಾ ಇಂಗ್ಲಿಷ್ ಆಗಿರುತ್ತದೆ. ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು ತಮ್ಮ ಆಯ್ಕೆಗೆ ಅನುಗುಣವಾಗಿ **ಕನ್ನಡ ಅಥವಾ ಇಂಗ್ಲಿಷ್**ನಲ್ಲಿ ಪರೀಕ್ಷೆಯಲ್ಲಿ ಉತ್ತರ ಬರೆಯಬಹುದಾಗಿದೆ. ಆದರೆ ಪರೀಕ್ಷೆಯಲ್ಲಿ ಉತ್ತರಿಸಲು ತಾವು ಯಾವ ಮಾಧ್ಯಮವನ್ನು ಆಯ್ದುಕೊಂಡಿದ್ದೀರಿ ಎಂಬುದನ್ನು ಪರೀಕ್ಷಾ ಅರ್ಜಿಗಳಲ್ಲೇ ಪೂರ್ವಭಾವಿಯಾಗಿ ಸೂಚಿಸುವುದು ಅಗತ್ಯವಾಗಿದೆ.

TWO YEAR
PRE - UNIVERSITY COURSE
REGULATIONS, COURSES OF STUDY AND
SCHEME OF EXAMINATIONS

MEDIUM OF INSTRUCTION AND EXAMINATION

The medium of instruction and examination in the Two- Year Pre-University Course shall be **Kannada or English.** Candidates may, at their option, answer the examination either in English or in Kannada, provided they indicate in their applications for the examination the medium in which they opt to answer:

ಗಣಿತ ಶಾಸ್ತ್ರ

ಮುಖ್ಯ ಸಂಪಾದಕರು

ಡಾ. ಎಸ್. ಬಾಲಚಂದ್ರರಾವ್



ಪ್ರಸಾರಾಂಗ
ಕನ್ನಡ ವಿಶ್ವವಿದ್ಯಾಲಯ, ಹಂಪಿ
ವಿದ್ಯಾರಣ್ಯ

GANITA SHASTRA : First Year P.U.C Mathematics Textbook, Edited by Dr. S. Balachandra Rao, Published by Dr.Karigowda Beechanahalli, Director, Prasaranga, Kannada University, Hampi, Vidyaranya, Kamalapura 583221, PP : xvi + 432 Rs :80/-

First edition 1995

ಯೋಜನಾ ನಿರ್ವಹಣೆ

ಸಂಕಲನ ವಿಭಾಗ
ಕನ್ನಡ ವಿಶ್ವವಿದ್ಯಾಲಯ, ಹಂಪಿ

ಪ್ರಕಾಶಕರು

ಡಾ. ಕರೀಗೌಡ ಬೀಚನಹಳ್ಳಿ
ನಿರ್ದೇಶಕರು, ಪ್ರಸಾರಾಂಗ
ಕನ್ನಡ ವಿಶ್ವವಿದ್ಯಾಲಯ, ಹಂಪಿ
ವಿದ್ಯಾರಣ್ಯ, ಕಮಲಾಪುರ-೫೮೩ ೨೨೧

ಬೆಲೆ : ಎಂಬತ್ತು ರೂಪಾಯಿಗಳು

ಡಿ.ಟಿ.ಪಿ. ಸಂಯೋಜನೆ

ಕಂಪ್ಯೂಟೆಕ್ ಇಂಡಿಯಾ, ಬೆಂಗಳೂರು

ಮುದ್ರಕರು

ವಿನಾಯಕ ಆಫ್‌ಸೆಟ್ ಪ್ರಿಂಟರ್ಸ್
೮/೨, ಮಾರೇನಹಳ್ಳಿ, ಮೊದಲ ಅಡ್ಡ ರಸ್ತೆ
೨೩ನೇ ಮುಖ್ಯ ರಸ್ತೆ, ಬೆಂಗಳೂರು - ೫೬೦ ೦೭೮

ಗಣಿತ ಶಾಸ್ತ್ರ ಸಮಿತಿ

ಮುಖ್ಯ ಸಂಪಾದಕರು

ಡಾ. ಎಸ್. ಬಾಲಚಂದ್ರರಾವ್, ಎಂ.ಎಸ್ಸಿ., ಪಿಎಚ್. ಡಿ.
ಮುಖ್ಯಸ್ಥರು, ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರ ವಿಭಾಗ
ನ್ಯಾಷನಲ್ ಕಾಲೇಜ್, ಬಸವನಗುಡಿ, ಬೆಂಗಳೂರು - ೫೬೦ ೦೦೪

ಸಂಪಾದಕ ಮಂಡಲಿಯ ಸದಸ್ಯರು

ಡಾ. ಸಿ. ಎಸ್. ಬಾಗೇವಾಡಿ, ಎಂ. ಎಸ್ಸಿ., ಪಿಎಚ್. ಡಿ.
ಅಧ್ಯಕ್ಷರು ಮತ್ತು ಪ್ರಾಧ್ಯಾಪಕರು, ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರ ವಿಭಾಗ
ಕುವೆಂಪು ವಿಶ್ವವಿದ್ಯಾಲಯ, ಬಿ. ಆರ್. ಪ್ರಾಜೆಕ್ಟ್ - ೫೭೭ ೧೧೫

ಶ್ರೀ ಕೆ.ಆರ್. ಉಪಾಧ್ಯಾಯ, ಎಂ. ಎ.
ಮುಖ್ಯಸ್ಥರು, ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರ ವಿಭಾಗ
ಸೈಂಟ್ ಅಲೋಷಿಯಸ್ ಕಾಲೇಜ್, ಮಂಗಳೂರು - ೫೭೫ ೦೦೩

ಲೇಖಕರು

ಶ್ರೀಮತಿ ಟಿ. ಪಿ. ಶಾಂತಾಬಾಯಿ, ಎಂ.ಎ., ಬಿ. ಎಡ್.
ನಿವೃತ್ತ ಡಿ.ಪಿ.ಐ, ಬೆಂಗಳೂರು

ಪ್ರೊ. ಎ. ನಾರಾಯಣಾಚಾರ್ಯ
ಪ್ರಾಂಶುಪಾಲರು, ಭಂಡಾರ್ಕರ್ಸ್ ಕಾಲೇಜ್, ಕುಂದಾಪುರ - ೫೭೬ ೨೦೧

ಶ್ರೀಮತಿ ಜಯಂತಿ ಪುರಂದರ್, ಎಂ.ಎಸ್ಸಿ.
ಉಪನ್ಯಾಸಕರು, ಜ್ಯೋತಿ ನಿವಾಸ್ ಕಾಲೇಜ್, ಬೆಂಗಳೂರು

ಶ್ರೀಮತಿ ಟಿ. ಆರ್. ಚಂದ್ರಕಲಾ, ಎಂ. ಎಸ್ಸಿ.
ಉಪನ್ಯಾಸಕರು, ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರ ವಿಭಾಗ
ಎಂ. ಎಲ್. ಎ. ಪದವಿ ಪೂರ್ವ ಕಾಲೇಜು, ಬೆಂಗಳೂರು - ೫೬೦ ೦೦೩

ಶ್ರೀಮತಿ ಪದ್ಮಜಾ ವೇಣುಗೋಪಾಲ್, ಎಂ. ಎಸ್ಸಿ.
ಸಂಶೋಧನ ಸಹಾಯಕರು, ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರ ವಿಭಾಗ
ನ್ಯಾಷನಲ್ ಕಾಲೇಜ್, ಬಸವನಗುಡಿ, ಬೆಂಗಳೂರು - ೫೬೦ ೦೦೪

ನಿವೇದನೆ

ಇಂದಿನ ಯುಗ ವಿಜ್ಞಾನದ ಯುಗ. ವಿಜ್ಞಾನ ನಮಗೆಲ್ಲ ಉಪಕಾರಕವೇನೋ ಹೌದು, ಅದರಂತೆ ಒಂದು ಆಹ್ವಾನವೂ ಹೌದು. ನಮಗರಿವಾಗದಂತೆ ವಿಜ್ಞಾನ ನಮ್ಮ ದಿನನಿತ್ಯದ ಬದುಕಿನಲ್ಲಿ ಸೇರಿಕೊಂಡು ಬಿಟ್ಟಿದೆ; ಆದರೂ ನಮಗಿನ್ನೂ ವೈಜ್ಞಾನಿಕ ದೃಷ್ಟಿಕೋನ ಬಂದಿಲ್ಲ. ಪಾಶ್ಚಾತ್ಯ ನಾಗರಿಕತೆಯ ಒಂದು ಮಹತ್ವದ ಕೊಡುಗೆಯಾಗಿರುವ ವಿಜ್ಞಾನ ನಮ್ಮ ದಿನನಿತ್ಯದ ಜೀವನವನ್ನು ರೂಪಿಸುತ್ತಿರುವಾಗ ನಮ್ಮಲ್ಲಿ ಆಗುವ ಮಾರ್ಪಾಡುಗಳನ್ನು ಇಂದು ದಾಖಲಿಸಬೇಕಾಗಿದೆ. ಅದರ ಜೊತೆಗೇ ವಿಜ್ಞಾನವನ್ನು ನಾವು ಯಾವ ವಿವೇಕದಿಂದ ಉಪಯೋಗಿಸಬೇಕೆಂಬುದರ ತಿಳಿವು ಕೂಡ ನಮ್ಮಲ್ಲಿ ಮೂಡಬೇಕಾಗಿದೆ.

ನಾವಿಂದು ವಿಜ್ಞಾನ, ಎಂಜಿನಿಯರಿಂಗ್, ಆಧುನಿಕ ತಂತ್ರವಿಜ್ಞಾನ ಇವನ್ನೆಲ್ಲ ಇಂಗ್ಲಿಷ್ ಭಾಷೆಯ ಮೂಲಕ ಕಲಿಯುತ್ತಿದ್ದೇವೆ. ಸಾಹಿತ್ಯ, ಕಲೆ, ತತ್ವಜ್ಞಾನ, ರಾಜಕೀಯ, ಸಮಾಜಶಾಸ್ತ್ರಗಳಿಗೆ ಇಂಗ್ಲಿಷ್‌ನ ಜೊತೆಗೆ ಕನ್ನಡವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಲು ಕಲಿಯುತ್ತಿದ್ದೇವೆ. ಆದರೆ, ಬೇರೆ ಭಾಷೆಯ ಮಾಧ್ಯಮದಿಂದ ಕೇವಲ ತಿಳಿವಳಿಕೆಯಷ್ಟೇ ದೊರೆಯುವುದಿಲ್ಲ; ತಿಳಿವಳಿಕೆಯ ವಿಧಾನಗಳೂ ಬಂದು ಬಿಡುತ್ತವೆ. ಕನ್ನಡ ತನ್ನ ಶಾಸ್ತ್ರ ವಿಧಾನಗಳನ್ನು ರೂಪಿಸಲು ಕಲಿಯಬೇಕಾಗಿದೆ; ಆಗಲೇ ತಿಳಿವಳಿಕೆ ನಮ್ಮದಾಗುವುದು. ಭೌತಶಾಸ್ತ್ರ, ರಸಾಯನಶಾಸ್ತ್ರದಂಥ ಶುದ್ಧ ಶಾಸ್ತ್ರಗಳಿಗೆ ಪರಂಪರೆ ಪ್ಲೇಟೋ, ಅರಿಸ್ಟಾಟಲರಿಂದ ಬಂದರೆ ಅದು ನಮ್ಮದಾಗುವುದೇ ಇಲ್ಲ. ಅದ್ಭುತ ದೇವಾಲಯಗಳನ್ನು ನಿರ್ಮಿಸಿದ ನಮ್ಮ ಪೂರ್ವಜರ ತಂತ್ರವಿಜ್ಞಾನ ಯಾವುದಿತ್ತು ಎಂದು ಯೋಚಿಸಲು ಕೂಡ ನಾವು ಪ್ರಯತ್ನ ಮಾಡಿಲ್ಲ. ಸುಯೇಜ್ ಕಾಲುವೆಯ ಮೂಲಕ ಹರಿದು ಬಂದ ತಿಳಿವಳಿಕೆಯ ಪ್ರವಾಹದಿಂದ ನಮ್ಮ ಹೊಲಗಳಲ್ಲಿಯ ತಿಳಿವಳಿಕೆಯ ಕೃಷಿ ಸಾಗಬೇಕಾಗಿದೆ.

ಪಾಶ್ಚಾತ್ಯರಲ್ಲಿ ವೈಜ್ಞಾನಿಕ ಸಾಹಿತ್ಯ ವಿಪುಲವಾಗಿ ಬೆಳೆದುಬಂದಿದೆ. ಅಂಥ ಸಾಹಿತ್ಯ ಕನ್ನಡದಲ್ಲಿ ಬರಬೇಕು. ತಿಳಿವಳಿಕೆ ಎಷ್ಟೇ ಶ್ರೇಷ್ಠವಾಗಿರಲಿ, ಅಗತ್ಯವಾದದ್ದೇ ಆಗಿರಲಿ, ನಮ್ಮ ಭಾಷೆಯಲ್ಲಿ ಅದು ಮೂಡಿ ಬರದಿದ್ದರೆ, ಅದು ನಮ್ಮ ತಿಳಿವಳಿಕೆಯಾಗಲಾರದು. ಕರ್ನಾಟಕದಲ್ಲಿ ಮೌಲಿಕವಾದ ವಿಜ್ಞಾನ ಹುಟ್ಟಿ ಬರಬೇಕಾದರೆ ನಮ್ಮ ಭಾಷೆಯಲ್ಲಿ ವೈಜ್ಞಾನಿಕ ಸಾಹಿತ್ಯ ಹುಟ್ಟಿ ಬರಬೇಕು. ಕನ್ನಡದಲ್ಲಿ ವೈಜ್ಞಾನಿಕ ಚಿಂತನೆ ನಡೆಯಬೇಕು. ಕನ್ನಡಕ್ಕೆ ಅಂಥ ತೇಜಸ್ಸು, ಶಕ್ತಿ ಇದೆ. ವಚನಕಾರರ ಭಾಷೆ ಅಣುವಿಜ್ಞಾನದ ಅರ್ಥವನ್ನು ಪ್ರಕಟಿಸಲು ಸಮರ್ಥವಾಗಿದೆ.

ವಿಜ್ಞಾನದ ವಿಷಯಗಳನ್ನು ಹೇಳುವ ಸಲುವಾಗಿಯೇ ಇಂದು ಪ್ರಮಾಣಿತ ವಿಜ್ಞಾನ ಭಾಷೆಯೊಂದನ್ನು ಕನ್ನಡದ ಈ ಅಂತಸ್ಥ ಸಾಮರ್ಥ್ಯವನ್ನು ಬಳಸಿಕೊಂಡು ಸೃಷ್ಟಿಸಬೇಕಾಗಿದೆ. ಅಂತಹ ಭಾಷೆಯನ್ನು ಬಳಕೆಗೆ ತರುವುದು ಇಂದು ತೀರಾ ಅಗತ್ಯವಾಗಿದೆ. ಇಂತಹುದೊಂದು ಅಗತ್ಯವನ್ನು ಪೂರೈಸುವಲ್ಲಿ ಕನ್ನಡ ವಿಶ್ವವಿದ್ಯಾಲಯವು ಯೋಜನೆಗಳನ್ನು ರೂಪಿಸುತ್ತಿದೆ. ವಿಷಯತಜ್ಞರೂ, ಭಾಷಾತಜ್ಞರೂ ಕೂಡಿ ವಿಜ್ಞಾನದ ಪಠ್ಯಪುಸ್ತಕಗಳನ್ನು ನಿರ್ಮಿಸುವುದು ಈ ಯೋಜನೆಯ ಮೊದಲ ಹಂತದ ಕೆಲಸವಾಗಿದೆ.

ಈ ಪಠ್ಯಪುಸ್ತಕಗಳು ಕನ್ನಡ ಮಾಧ್ಯಮದ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳಿಗೆ ಮಾತ್ರ ಸೀಮಿತವಾಗಿಲ್ಲ. ಇಂಗ್ಲಿಷ್ ಮಾಧ್ಯಮದ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು ಕೂಡ ಇವುಗಳಿಂದ ನೆರವು ಪಡೆಯಬಹುದು. ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಪಠ್ಯದಲ್ಲಿಯೂ ಪಾರಿಭಾಷಿಕ ಶಬ್ದಗಳಿಗೆ ಅರ್ಥಕೋಶ ಕೂಡ ಇದೆ.

ಈ ಪಠ್ಯಪುಸ್ತಕಗಳನ್ನು ಕನ್ನಡದಲ್ಲಿ ಬರೆದುಕೊಟ್ಟ ಸಂಪಾದಕರಿಗೆ, ಲೇಖಕರಿಗೆ ನಾನು ಕನ್ನಡ ವಿಶ್ವವಿದ್ಯಾಲಯದ ಪರವಾಗಿ ಕೃತಜ್ಞನಾಗಿದ್ದೇನೆ.

ಚಂದ್ರಶೇಖರ ಕಂಬಾರ
ಕುಲಪತಿಗಳು

ಯೋಜನೆ ಕುರಿತು

ನಮ್ಮ ಶಿಕ್ಷಣ ಮಾಧ್ಯಮ ಕನ್ನಡವೇ ಆಗಬೇಕು ಎಂಬ ಶಿಕ್ಷಣತಜ್ಞರ ಅಭಿಪ್ರಾಯವನ್ನು ಯಾರೂ ವಿರೋಧಿಸಲಾರರು. ಆದರೆ ಇಂಗ್ಲಿಷ್ ಮಾಧ್ಯಮದ ಭರಾಟೆಯಲ್ಲಿ ಕನ್ನಡದ ಬೆಳವಣಿಗೆ ಎಲ್ಲಿಗೂ ಸಾಲದು ಎಂಬುದನ್ನು ಅಲ್ಲಗಳೆಯಲಾಗದು. ವಿಜ್ಞಾನದ ವಿಭಾಗದಲ್ಲಂತೂ ಈ ಸಮಸ್ಯೆ ತೀವ್ರತರವಾಗಿದೆ. ವಿಜ್ಞಾನದ ವಿಷಯಗಳನ್ನು ಹೇಳುವ ಸಲುವಾಗಿಯೇ ಪ್ರಮಾಣಿತ ವಿಜ್ಞಾನ ಭಾಷೆಯೊಂದನ್ನು ಕನ್ನಡದಲ್ಲಿ ಸೃಷ್ಟಿಸಿ ಬಳಕೆಗೆ ತರುವುದು ತೀರಾ ಅಗತ್ಯ. ಶಿಕ್ಷಣದಲ್ಲಿ ಪಠ್ಯಪುಸ್ತಕಗಳ ಪಾತ್ರವೇನು ಎಂಬುದು ಎಲ್ಲರಿಗೂ ತಿಳಿದಿದೆ. ವಿಜ್ಞಾನದ ಪಠ್ಯಪುಸ್ತಕಗಳನ್ನು ಕನ್ನಡದಲ್ಲಿ ಸಿದ್ಧಪಡಿಸುವ ಹೊಣೆಗಾರಿಕೆಯನ್ನು ನಿರ್ವಹಿಸುವುದು ಒಬ್ಬಿಬ್ಬರಿಂದ ಆಗುವ ಮಾತಲ್ಲ.

ಕನ್ನಡದ ಸರ್ವತೋಮುಖ ಬೆಳವಣಿಗೆಯನ್ನು ತನ್ನ ಮುಖ್ಯ ಗುರಿಯನ್ನಾಗಿಸಿ ಕೊಂಡು ಶ್ರಮಿಸುತ್ತಿರುವ ಸಂಸ್ಥೆ ಕನ್ನಡ ವಿಶ್ವವಿದ್ಯಾಲಯ. ಶಿಕ್ಷಣ ಕ್ಷೇತ್ರದ ಈ ಅಗತ್ಯದ ಹೊಣೆಯನ್ನು ಸಮರ್ಥವಾಗಿ ನಿರ್ವಹಿಸುವ ಯೋಜನೆಗಳನ್ನು ಅದು ರೂಪಿಸುತ್ತಿದೆ. ಪ್ರಸ್ತುತ ಪದವಿಪೂರ್ವ ತರಗತಿಗಳಿಗಾಗಿ ಕನ್ನಡದಲ್ಲಿ ವಿಜ್ಞಾನ ಪಠ್ಯಪುಸ್ತಕಗಳನ್ನು ಸಿದ್ಧಪಡಿಸುವ ಕೆಲಸವನ್ನು ಆರಂಭಿಸಿದೆ. ಪದವಿಪೂರ್ವ ತರಗತಿಗಳನ್ನೇ ಮೊದಲಿಗೆ ಪರಿಗಣಿಸಲು ಮುಖ್ಯ ಕಾರಣಗಳಿವೆ. ನಗರ ಪ್ರದೇಶಗಳಲ್ಲಿ ಮೇಲು ನೋಟಕ್ಕಾದರೂ ವಿಜ್ಞಾನದ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು ಇಂಗ್ಲಿಷ್ ಮಾಧ್ಯಮಕ್ಕೇ ಶರಣಾಗಿದ್ದಾರೆ ಎನಿಸುತ್ತದೆ. ಆದರೆ ಈ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳಲ್ಲೂ ಕನ್ನಡದಲ್ಲಿ ವಿವರಣೆ ದೊರೆಯಲಾರದೇ ಎಂದು ನಿರೀಕ್ಷಿಸುವವರಿದ್ದಾರೆ. ನಮ್ಮ ಗ್ರಾಮಾಂತರ ಪ್ರದೇಶಗಳಲ್ಲಂತೂ, ಪ್ರೌಢಶಾಲೆಯವರೆಗೂ ಕನ್ನಡ ಮಾಧ್ಯಮದಲ್ಲೇ ಶಿಕ್ಷಣ. ನಂತರದ ಹಂತದಲ್ಲಿ ಇಂಗ್ಲಿಷ್ ಮಾಧ್ಯಮಕ್ಕೆ ಬರುತ್ತಾರೆ. ಇಂಗ್ಲಿಷ್ ಮಾಧ್ಯಮವೇ ಉಪಯೋಗಕರ ಎಂಬ ಅಸಂಗತ ಅಭಿಪ್ರಾಯ ಈ ಆಯ್ಕೆಗೆ ಕಾರಣವಾಗುತ್ತದೆ. ಕನ್ನಡ ಮಾಧ್ಯಮ ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೆ ಅಗತ್ಯದ ಪಠ್ಯಪುಸ್ತಕಗಳು ಇಲ್ಲ ಎಂಬ ಸಮಸ್ಯೆ ಬೇರೆ. ಅಂದರೆ, ವಿಜ್ಞಾನವನ್ನು ಕನ್ನಡದಲ್ಲಿ ವಿವರಿಸುವವರಿದ್ದರೆ, ಅದರ ಉಪಯೋಗವನ್ನು ಪಡೆಯಲು ಕನ್ನಡ ಮಾಧ್ಯಮದ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳೇ ಅಲ್ಲದೆ ಇಂಗ್ಲಿಷ್ ಮಾಧ್ಯಮದ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳೂ ಕಾತುರರಾಗಿದ್ದಾರೆ.

ಈ ಸಮಸ್ಯೆಯನ್ನು ಪರಿಹರಿಸುವ ಮೊದಲ ಹೆಜ್ಜೆಯಾಗಿ ಕನ್ನಡ ವಿಶ್ವವಿದ್ಯಾಲಯ ಪದವಿಪೂರ್ವ ತರಗತಿಗಳಿಗೆ ವಿಜ್ಞಾನ ಪಠ್ಯಪುಸ್ತಕಗಳನ್ನು ಸಿದ್ಧಪಡಿಸುವ ಯೋಜನೆಯನ್ನು ಕೈಗೆತ್ತಿಕೊಂಡಿದೆ. ಈ ಬೃಹತ್ ಯೋಜನೆಯಲ್ಲಿ ವಿಜ್ಞಾನ ವಿಷಯಗಳಲ್ಲಿ ನುರಿತ ಅಧ್ಯಾಪಕರು, ಶಿಕ್ಷಣ ತಜ್ಞರು, ಭಾಷಾ ತಜ್ಞರು - ಹೀಗೆ ಹಲವರ ಸಲಹೆ, ಸೂಚನೆ, ಸಹಕಾರಗಳನ್ನು ಪಡೆಯಲಾಗಿದೆ.

ಭೌತಶಾಸ್ತ್ರ, ರಸಾಯನಶಾಸ್ತ್ರ, ಜೀವಶಾಸ್ತ್ರ, ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರಗಳ ಪಠ್ಯಪುಸ್ತಕಗಳನ್ನು ಮೊದಲಿಗೆ ಸಿದ್ಧಪಡಿಸಲಾಗಿದೆ. ಪ್ರತಿ ವಿಭಾಗಕ್ಕೆ ವಿಶೇಷ ತಜ್ಞರನ್ನು ಮುಖ್ಯ ಸಂಪಾದಕರೆಂದು ನೇಮಿಸಲಾಯಿತು. ಇವರು ಅರ್ಹರಾದ ಅಧ್ಯಾಪಕರನ್ನು ಆಯ್ದು ಸಂಪಾದಕ ಮಂಡಳಿಗಳನ್ನು ರಚಿಸಿದರು. ವಿವಿಧ ಅಧ್ಯಾಯಗಳನ್ನು ನುರಿತ ಅಧ್ಯಾಪಕರ ನೆರವಿನಿಂದ ಬರೆದು ಸಿದ್ಧಪಡಿಸಿದರು. ಹೀಗೆ ಸಿದ್ಧಗೊಂಡ ಹಸ್ತಪ್ರತಿಗಳ ಭಾಷಾ ಪರಿಶೀಲನೆಯನ್ನು ತಜ್ಞರಿಂದ ನಡೆಸಲಾಯಿತು. ಕೊನೆಯದಾದರೂ, ಬಹುಮುಖ್ಯ ಹಂತವೊಂದನ್ನು ಹಮ್ಮಿಕೊಳ್ಳಲಾಯಿತು. ಅದೆಂದರೆ, ಹೈಸ್ಕೂಲುಗಳಲ್ಲಿ ಪೂರ್ಣ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಅಧಿಕೃತವಾಗಿ ಕನ್ನಡ ಮಾಧ್ಯಮದಲ್ಲಿ ವಿಜ್ಞಾನವನ್ನು ಬೋಧಿಸುತ್ತಿದ್ದು, ಅದೇ ಶಾಲೆಗೆ ಸೇರಿದ ಇಂಗ್ಲಿಷ್ ಮೀಡಿಯಂ ಪದವಿಪೂರ್ವ ತರಗತಿಗಳ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳಿಗೆ ಹೆಚ್ಚಿನ ನೆರವಿನ ಕಾರಣವಾಗಿ, ಕನ್ನಡವನ್ನು ವಿಜ್ಞಾನ ಬೋಧನೆಯ ಮಾಧ್ಯಮವಾಗಿ ಬಳಸುತ್ತಿರುವ ಅಧ್ಯಾಪಕರನ್ನು ಗುರುತಿಸಿ, ಸಿದ್ಧಗೊಂಡ ನಮ್ಮ ಕನ್ನಡ ವಿಜ್ಞಾನ ಪಠ್ಯಪುಸ್ತಕಗಳ ಹಸ್ತಪ್ರತಿಗಳನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸಲು ಕೋರಲಾಯಿತು. ಅವರು ಸೂಚಿಸಿದ ಹಲವು ಸಲಹೆ ಸೂಚನೆಗಳನ್ನು ಅಳವಡಿಸಿ ಹಸ್ತಪ್ರತಿಯನ್ನು ತಿದ್ದಿ, ಅಂತಿಮವಾಗಿ ಮುದ್ರಣಕ್ಕೆಂದು ಸಿದ್ಧಪಡಿಸಲಾಯಿತು.

ಯೋಜನೆಯ ಆರಂಭದಿಂದಲೂ ಈ ವಿಜ್ಞಾನ ಪಠ್ಯಪುಸ್ತಕಗಳನ್ನು ಕನ್ನಡದಲ್ಲಿ ಸಮರ್ಥವಾಗಿ ಸಿದ್ಧಪಡಿಸಲು ಎಚ್ಚರವನ್ನೂ ಶ್ರಮವನ್ನೂ ವಹಿಸಲಾಗಿದೆ. ಇಂತಹ ಒಂದು ಅರ್ಥಪೂರ್ಣ ಯೋಜನೆಯ ರೂವಾರಿ ಹಾಗೂ ಮಾರ್ಗದರ್ಶಕರಾದ ನಮ್ಮ ಮಾನ್ಯ ಕುಲಪತಿ ಡಾ. ಚಂದ್ರಶೇಖರ ಕಂಬಾರರು ಯೋಜನೆಯು ಸುಲಲಿತವಾಗಿ ನಡೆಯಲು ಕಾರಣರಾಗಿದ್ದಾರೆ. ಅವರ ನಿರಂತರ ಒತ್ತಾಸೆಯಿಂದಲೇ ಈ ಯೋಜನೆ ಮುಂದುವರೆದು, ಇದೀಗ ಒಂದು ಮುಖ್ಯ ಹಂತವನ್ನು ಪೂರ್ಣಗೊಳಿಸಿದೆ. ಮೊದಲ ಪಿಯುಸಿ ಪುಸ್ತಕಗಳು ಸಿದ್ಧಗೊಂಡಿವೆ. ಇದರ ಬೆನ್ನಿನಲ್ಲಿಯೇ ಎರಡನೆಯ ಪಿಯುಸಿ ಪುಸ್ತಕಗಳ ಸಿದ್ಧತೆಯೂ ಆರಂಭಗೊಂಡಿದೆ.

ಇಂತಹ ಬೃಹತ್ ಯೋಜನೆಯೊಂದರಲ್ಲಿ ನೆರವಿಗೆ ನಿಂತಿರುವ ವಿದ್ವಾಂಸರ ಪಟ್ಟಿ ದೊಡ್ಡದು. ಪ್ರತಿ ವಿಭಾಗದ ಮುಖ್ಯ ಸಂಪಾದಕರು, ಸಂಪಾದಕ ಮಂಡಳಿಗಳ ಸದಸ್ಯರು, ಲೇಖಕರು, ಭಾಷಾಪರಿಶೀಲಕರು ಹಾಗೂ ವಿಷಯ ಪರಿಶೀಲಕರನ್ನು ಪ್ರತ್ಯೇಕವಾಗಿ ನೆನೆಯುತ್ತೇನೆ. ನಮ್ಮ ವಿಶ್ವವಿದ್ಯಾಲಯದ ಪ್ರಸಾರಾಂಗದ ನಿರ್ದೇಶಕರನ್ನು, ನನ್ನ ಎಲ್ಲ ಸಹೋದ್ಯೋಗಿಗಳನ್ನು, ಅವರಿಂದ ಪಡೆದ ವಿವಿಧ ಬಗೆಯ ನೆರವಿಗಾಗಿ, ವಂದಿಸುತ್ತೇನೆ.

ಕೊನೆಯದಾಗಿ, ಕನ್ನಡ ಮಾಧ್ಯಮದಲ್ಲಿ ವಿಜ್ಞಾನ ವಿಷಯಗಳನ್ನು ಕಲಿಯುವುದು ಹಾಗೂ ಬೋಧಿಸುವುದು ಸಾಧ್ಯವೇ ಎಂಬ ಸಂದೇಹವನ್ನು ನಿವಾರಿಸಿ, ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳಲ್ಲಿ ಹಾಗೂ ಅಧ್ಯಾಪಕರಲ್ಲಿ ಕನ್ನಡ ಮಾಧ್ಯಮದ ಬಗ್ಗೆ ವಿಶ್ವಾಸವನ್ನು ಮೂಡಿಸುವಲ್ಲಿ ಕನ್ನಡ ವಿಶ್ವವಿದ್ಯಾಲಯದ ಈ ಮಹತ್ವಾಕಾಂಕ್ಷೆಯ ಯೋಜನೆ ಸಫಲವಾದರೆ ನಮ್ಮ ಶ್ರಮ ಸಾರ್ಥಕ.

ಡಾ. ಎಚ್. ಎಸ್. ಶ್ರೀಮತಿ

ಮುಖ್ಯ ಸಂಪಾದಕರ ಮಾತು

ಶೈಕ್ಷಣಿಕ ವರ್ಷ ೧೯೯೫-೯೬ ರಿಂದ ಪದವಿಪೂರ್ವ ತರಗತಿಗಳಿಗೆ ಹೊಸ ಪಠ್ಯಕ್ರಮವು ಜಾರಿಗೆ ಬರುತ್ತಿದೆಯಷ್ಟೆ. ಈ ಸಂದರ್ಭದಲ್ಲಿ ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರದ ಹೊಸ ಪಠ್ಯಕ್ರಮಕ್ಕೆ ಅನುಗುಣವಾಗಿ ಬರೆದ ಈ ಪಠ್ಯಪುಸ್ತಕವನ್ನು ಕಾಲೇಜು ಶಿಕ್ಷಣಕ್ಕೆ ಬಹಳ ಉತ್ಸಾಹದಿಂದ ಹೊಸದಾಗಿ ಪದಾರ್ಪಣ ಮಾಡುತ್ತಿರುವ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿನಿಯರಿಗೆ ನೀಡುತ್ತಿದ್ದೇವೆ.

ಆಡುಭಾಷೆಯಾದ ಕನ್ನಡದ ಮೂಲಕ ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರವನ್ನು ಇನ್ನೂ ಚೆನ್ನಾಗಿ ಅರ್ಥಮಾಡಿಕೊಳ್ಳಬಹುದು ಎಂಬ ದೃಢ ವಿಶ್ವಾಸದಿಂದ ಗಣಿತದ ತತ್ವಗಳನ್ನು, ಪ್ರಮೇಯ- ಸಾಧನೆಗಳನ್ನು, ಉದಾಹರಣೆಗಳನ್ನು ಹಾಗೂ ಅಭ್ಯಾಸಗಳನ್ನು ಆದಷ್ಟು ಸರಳವಾಗಿ ಕನ್ನಡ ಭಾಷೆಯಲ್ಲಿ ವಿವರಿಸಲಾಗಿದೆ. ಹಾಗೆಂದು ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರದ ಮತ್ತು ಒಂದು ಪಠ್ಯಪುಸ್ತಕದಲ್ಲಿ ಕಾಪಾಡಿಕೊಂಡು ಬರಬೇಕಾದ ಭಾಷಾ ಗಾಂಭೀರ್ಯಕ್ಕೆ ಹಾಗೂ ನಿಖರತೆಗೆ ಕುಂದು ತಂದಿಲ್ಲ.

ಹೊಸ ಪಠ್ಯಕ್ರಮದ ಮುಖ್ಯವಾದ ವಿಶೇಷಗಳು :

(೧) ಈ ಹಿಂದಿನ ಪಠ್ಯಕ್ರಮದಲ್ಲಿದ್ದ ಒಂದೆರಡು (ಮುಖ್ಯವಾಗಿ ಶುದ್ಧ ರೇಖಾಗಣಿತ) ವಿಷಯಗಳನ್ನು ಈಗ ಪ್ರೌಢಶಾಲೆಯ ಮಟ್ಟದಲ್ಲೇ ಬೋಧಿಸುವುದರಿಂದ ಇಲ್ಲಿ ಕೈ ಬಿಡಲಾಗಿದೆ.

(೨)ಹೊಸ ವಿಷಯಗಳಾದ ಕಲನಶಾಸ್ತ್ರದ ಆದಿಭಾಗ, ನಿರ್ದೇಶಕ (ಬೀಜ-) ರೇಖಾಗಣಿತದ 'ಜೋಡಿ ಸರಳರೇಖೆಗಳು' ಹಾಗೂ ತ್ರಿಕೋನಮಿತಿಯ ಒಂದೆರಡು ಭಾಗಗಳು - ಹಿಂದೆ ಇದ್ದ ಎರಡನೇ ವರ್ಷದ ಪದವಿಪೂರ್ವ ಪಠ್ಯಕ್ರಮದಿಂದ - ಈಗ ಮೊದಲನೇ ವರ್ಷದ ಪಠ್ಯಕ್ರಮದಲ್ಲಿ ಸೇರಿಸಲಾಗಿದೆ.

(೩) ಬಹಳ ಸಂತೋಷದ ವಿಷಯವೆಂದರೆ, ಈವರೆಗೂ ಕಡೆಗಣಿಸಲಾಗಿದ್ದ ಭಾರತೀಯ ಗಣಿತಜ್ಞರ ಕೊಡುಗೆಯ ಬಗ್ಗೆ ಪರಿಚಯಿಸಲು ಮೊಟ್ಟ ಮೊದಲಿಗೆ ಈ ಹೊಸ ಪಠ್ಯಕ್ರಮದಲ್ಲಿ ಅವಕಾಶ ಮಾಡಿಕೊಡಲಾಗಿದೆ. ಈ ಭಾಗವನ್ನು (ಗಣಿತ) ಚಟುವಟಿಕೆಗಳ ರೂಪದಲ್ಲಿ ವಿಶೇಷ ಪುರವಣಿಯಲ್ಲಿ ಸೇರ್ಪಡಿಸಲಾಗಿದೆ.

ಪ್ರಸ್ತುತ ಪಠ್ಯಪುಸ್ತಕದ ವಿಶೇಷವಾದ ಅಂಶಗಳು :

(೧) ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಅಧ್ಯಾಯದಲ್ಲೂ ನಿರೂಪಿಸಲಾದ ಗಣಿತ ತತ್ವಗಳನ್ನು, ಪ್ರಮೇಯಗಳನ್ನು ಮತ್ತು ವ್ಯಾಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಹೆಚ್ಚು ಸಂಖ್ಯೆಯ ವೈವಿಧ್ಯಮಯವಾದ ಉದಾಹರಣೆಗಳ ಮೂಲಕ ವಿವರಿಸಲಾಗಿದೆ.

(೨) ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಅಧ್ಯಾಯದ - ಕೆಲವೊಮ್ಮೆ ಉಪ ಅಧ್ಯಾಯಗಳ-

ಕೊನೆಯಲ್ಲಿ ಬಹಳಷ್ಟು ಲೆಕ್ಕಗಳ ಅಭ್ಯಾಸಗಳನ್ನು ಕೊಟ್ಟಿದೆ. ಎಲ್ಲಾ ಅಭ್ಯಾಸಗಳ ಲೆಕ್ಕಗಳಿಗೂ ಉತ್ತರಗಳನ್ನು ಪುಸ್ತಕದ ಕೊನೆಯಲ್ಲಿ ಸೇರಿಸಲಾಗಿದೆ.

(೩) ಪುಸ್ತಕದ ಕೊನೆಯಲ್ಲಿ - ಅನುಬಂಧಗಳಲ್ಲಿ - ಅಧಿಕೃತ ಪಠ್ಯಕ್ರಮವನ್ನು, ಮಾದರಿ ಪ್ರಶ್ನೆ ಪತ್ರಿಕೆಯನ್ನು ಮತ್ತು (ಗಣಿತ) ಚಟುವಟಿಕೆಗಳನ್ನು ಕೊಡಲಾಗಿದೆ.

(೪) ಈ ಪಠ್ಯಪುಸ್ತಕದಲ್ಲಿ ಬಳಸಲಾದ ಪಾರಿಭಾಷಿಕ ಶಬ್ದಗಳನ್ನು (technical terms) ಪುಸ್ತಕದ ಕೊನೆಯಲ್ಲಿ **ಕನ್ನಡ - ಇಂಗ್ಲಿಷ್ ಮತ್ತು ಇಂಗ್ಲಿಷ್ - ಕನ್ನಡ** ಪಾರಿಭಾಷಿಕ ಶಬ್ದಗಳ ಪಟ್ಟಿಗಳ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಕೊಡಲಾಗಿದೆ.

ಇಲ್ಲಿ ಒಂದು ಮಾತು. ಗಣಿತದಲ್ಲಿ ಬಳಸುವ ಕನ್ನಡ ಪಾರಿಭಾಷಿಕ ಶಬ್ದಗಳನ್ನು ಆದಷ್ಟು ಎಚ್ಚರ ವಹಿಸಿ, ಈ ಹಿಂದೆ ಪ್ರಕಟವಾದ ಕನ್ನಡ ಮಾಧ್ಯಮದ ಪಠ್ಯಪುಸ್ತಗಳನ್ನೂ ಮತ್ತು ವಿದ್ವಾಂಸರಿಂದ ರಚಿಸಲ್ಪಟ್ಟಿರುವ ಪಾರಿಭಾಷಿಕ ಪದಗಳ ಶಬ್ದಕೋಶಗಳನ್ನೂ ವೀಕ್ಷಿಸಿ ಕೊಡಲಾಗಿದೆ. ಈ ವಿಷಯದಲ್ಲಿ ಭಿನ್ನಾಭಿಪ್ರಾಯ ಬರುವುದು ಸಹಜ. ಅಧ್ಯಾಪಕರು ಬೇರೆ ಸೂಕ್ತವಾದ ಪದಗಳನ್ನೂ ಸಂದರ್ಭೋಚಿತವಾಗಿ ಬಳಸಬಹುದು. ಕೆಲವೊಮ್ಮೆ ಇಂಗ್ಲಿಷ್ ಪದಗಳನ್ನೇ ಬಳಸುವುದು ಸೂಕ್ತವೆಂದು ತೋರಬಹುದು.

(೫) ಪಠ್ಯಕ್ರಮದಲ್ಲಿ (ಗಣಿತ) ಚಟುವಟಿಕೆಗಳ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಕೊಡಲಾಗಿರುವ **ಭಾರತೀಯ ಗಣಿತಜ್ಞರ** ಕೊಡುಗೆಯ ಭಾಗವನ್ನು ಮತ್ತು ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳಿಗೆ ಆಸಕ್ತಿಯನ್ನು ಕೆರಳಿಸುವ ಕೆಲವು ವಿಷಯಗಳನ್ನು ಈ ಪಠ್ಯಪುಸ್ತಕದ ಹೆಚ್ಚುವರಿ ಭಾಗದ ರೂಪದಲ್ಲಿ ''ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರ ಪುರವಣಿ''ಯಲ್ಲಿ ನೀಡಲಾಗಿದೆ.

(೬) ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಅಭ್ಯಾಸಕ್ಕೆ ಬಹಳ ಸಹಾಯವಾಗುವಂತೆ ಒಂದು ಅಂಕದ ಸಣ್ಣ ಉತ್ತರಗಳನ್ನು ನೀಡಬೇಕಾಗಿರುವ ಸುಮಾರು ೩೦೦-೪೦೦ ಸಮಸ್ಯೆಗಳ **ಪ್ರಶ್ನಾವಳಿ** ಯನ್ನು ಪುರವಣಿಯಲ್ಲಿ ಕೊಡಲಾಗಿದೆ.

ಈ ಪಠ್ಯಪುಸ್ತಕದ ಹಸ್ತಪ್ರತಿಯನ್ನು ಬಹಳ ಶ್ರದ್ಧೆಯಿಂದ ಬರೆದುಕೊಟ್ಟ ನನ್ನ ಸಹ-ಲೇಖಕ ಮಿತ್ರರನ್ನು ಮತ್ತು ಸೂಕ್ತ ತಿದ್ದುಪಡಿಗಳನ್ನು ಮತ್ತು ಸೂಚನೆಗಳನ್ನು ನೀಡಿ ಸಹಕರಿಸಿದ ಸಂಪಾದಕ ಮಂಡಲಿಯ ಸದಸ್ಯರನ್ನು ಹಾಗೂ ರೇಖಾ ಚಿತ್ರಗಳ ರಚನೆಯಲ್ಲಿ ಸಹಾಯ ಮಾಡಿದ ಶ್ರೀ ಎಸ್. ಕೇದಾರ ಶಂಕರ ಅವರನ್ನು ಕೃತಜ್ಞತಾಪೂರ್ವಕವಾಗಿ ಸ್ಮರಿಸಿಕೊಳ್ಳುತ್ತೇನೆ.

ಈ ಯೋಜನೆಯಲ್ಲಿ ಪಾಲ್ಗೊಳ್ಳಲು ಅವಕಾಶ ಕಲ್ಪಿಸಿಕೊಟ್ಟ ಕನ್ನಡ ವಿಶ್ವವಿದ್ಯಾಲಯದ ಕುಲಪತಿಗಳಾದ ಡಾ. ಚಂದ್ರಶೇಖರ ಕಂಬಾರ ಅವರಿಗೂ, ಸಂಕಲನ ವಿಭಾಗದ ಮುಖ್ಯಸ್ಥೆ ಡಾ. ಎಚ್. ಎಸ್. ಶ್ರೀಮತಿ ಅವರಿಗೂ ಪ್ರಸಾರಾಂಗದ ನಿರ್ದೇಶಕರಾದ ಡಾ. ಕರೀಗೌಡ ಬೀಚನಹಳ್ಳಿ ಅವರಿಗೂ ಸಮಿತಿಯ ಪರವಾಗಿ ಹೃತ್ಪೂರ್ವಕ ವಂದನೆಗಳು.

ಡಾ. ಎಸ್. ಬಾಲಚಂದ್ರ ರಾವ್

ಮುಖ್ಯ ಸಂಪಾದಕರು

ಪರಿವಿಡಿ

ಅಧ್ಯಾಯ - 1

ಘಾತಾಂಕಗಳು ಮತ್ತು ಪ್ರತಿಘಾತಗಳು

1.1 ಘಾತಾಂಕಗಳ ಸಿದ್ಧಾಂತದ ಪುನರ್ನಿರೂಪಣೆ

ಕೆಳಗೆ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಘಾತಾಂಕಗಳ ನಿಯಮಗಳನ್ನು ಮತ್ತು ಅವುಗಳ ಸಾಧನೆಯ ಕ್ರಮಗಳನ್ನೂ ಹಿಂದಿನ ತರಗತಿಗಳಲ್ಲಿ ನೀವು ಅಭ್ಯಾಸ ಮಾಡಿದ್ದೀರಿ:

I (a) $a \in R$ ಮತ್ತು $m, n \in N$ ಆದರೆ

$$a^m \times a^n = a^{m+n}$$

(b) $m > n$ ಆದರೆ, $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$

$m < n$ ಆದರೆ, $\frac{a^m}{a^n} = \frac{1}{a^{n-m}}$

II $(a^m)^n = a^{mn}$

III $(ab)^m = a^m b^m$ ಮತ್ತು $\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}$

ಸೂಚನೆ: R ಎಂಬುದು ಎಲ್ಲಾ ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗಣವನ್ನೂ, N ಎಂಬುದು ಎಲ್ಲಾ ಸ್ವಾಭಾವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗಣವನ್ನೂ ಸೂಚಿಸುತ್ತವೆ.

ಈ ಘಾತಾಂಕಗಳ ಮೂಲ ನಿಯಮಗಳು m, n ಗಳು ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾಗಿದ್ದರೂ, ಋಣ ಘಾತಾಂಕಗಳಾಗಿದ್ದರೂ, ಅನ್ವಯವಾಗುತ್ತವೆ ಎಂದು ತೋರಿಸಬೇಕಾಗುತ್ತದೆ.

ಆದ್ದರಿಂದ $a^{p/q}$, a^{-n} ಮುಂತಾದ ಚಿಹ್ನೆಗಳ ಅರ್ಥವನ್ನು ತಿಳಿದುಕೊಳ್ಳಬೇಕಾಗಿದೆ. ಈ ಅರ್ಥವಿವರಣೆ ಕೊಡುವುದಕ್ಕೆ

$$a^m \times a^n = a^{m+n}$$

ಎಂಬ ಮೂಲ ನಿಯಮವು m, n ಗಳ ಎಲ್ಲಾ ಬೆಲೆಗಳಿಗೂ ಅನ್ವಯಿಸುತ್ತದೆ ಎಂದು ಭಾವಿಸಿಕೊಳ್ಳಬೇಕಾಗುತ್ತದೆ.

p, q ಗಳು ಧನ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾದಾಗ $a^{p/q}$ ಎಂಬುದರ ಅರ್ಥ

ಮೂಲ ನಿಯಮವು m, n ಗಳ ಎಲ್ಲಾ ಬೆಲೆಗಳಿಗೂ ಅನ್ವಯಿಸುತ್ತದೆ; ಆದ್ದರಿಂದ m, n ಗಳನ್ನು p/q ನಿಂದ ಆದೇಶಿಸಿದಾಗ

$a^{p/q} \times a^{p/q} = a^{p/q + p/q} = a^{2p/q}$ ಆಗುತ್ತದೆ.

ಇದೇ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ

$a^{p/q} \times a^{p/q} \times a^{p/q} = a^{2p/q + p/q} = a^{3p/q}$ ಆಗುತ್ತದೆ.

ಹೀಗೆಯೇ, 4, 5, ... q ಅಪವರ್ತನಗಳವರೆಗೆ ಮುಂದುವರೆದರೆ

$a^{p/q} \times a^{p/q} \times a^{p/q}$.........$q$ ಅಪವರ್ತನಗಳು $= a^{qp/q}$ ಆಗುವುದು.

ಅಂದರೆ, $\left(a^{p/q}\right)^q = a^p$ ಎಂದು ಆಯಿತು.

ಈಗ q ನೆಯ ಮೂಲವನ್ನು ತೆಗೆಯುವುದರಿಂದ

$a^{p/q} = \sqrt[q]{a^p}$ ಎಂದು ಬರುವುದು.

ಅಂದರೆ, $a^{p/q}$ನ ಬೆಲೆಯು a^pಯ 'q' ನೆಯ ಮೂಲ ಎಂದು ಹೇಳಬಹುದು.

ಉದಾಹರಣೆಗಳು : (1) $x^{3/7} = \sqrt[7]{x^3}$

(2) $a^{1/5} = \sqrt[5]{a}$

(3) $4^{3/2} = \sqrt{4^3} = \sqrt{64} = 8$

(4) $a^{2/3} \times a^{7/6} = a^{2/3 + 7/6} = a^{(4+7)/6} = a^{11/6}$

(5) $3a^{2/3}b^{1/2} \times 5a^{1/3}b^{4/3} = 15a^{2/3 + 1/3}\, b^{1/2 + 4/3}$

$= 15ab^{11/6}$

a^0ನ ಅರ್ಥವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವುದು

$a^m \times a^n = a^{m+n}$ ಎನ್ನುವುದು m, n ಗಳ ಎಲ್ಲಾ ಬೆಲೆಗಳಿಗೂ ಸತ್ಯವಾಗಿದೆ ಎಂದು ಒಪ್ಪಿಕೊಂಡಿರುವುದರಿಂದ m ಗೆ '0' ಬೆಲೆಯನ್ನು ಆದೇಶಿಸಿದಾಗ

$a^0 \times a^n = a^{0+n} = a^n$

$\therefore \quad a^0 = \dfrac{a^n}{a^n} = 1$

ಎಂದಾಗುತ್ತದೆ. ಈ ಫಲಿತಾಂಶವನ್ನು ಇನ್ನೊಂದು ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಈ ಕೆಳಕಂಡಂತೆ ತೋರಿಸಬಹುದು :

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} \qquad \text{.... (1)}$$

ಎಂದು ಆಗಿದೆ. ಈಗ, m ಗೆ n ಎಂದು ಆದೇಶಿಸಿದಾಗ

ಸಮೀಕರಣ (1) ರಿಂದ $\frac{a^n}{a^n} = a^{n-n}$

ಅಂದರೆ, $1 = a^0$

ಎಂದಾಗುತ್ತದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ, ಯಾವುದೇ ಸಂಖ್ಯೆಯ ($\neq 0$) ಘಾತಾಂಕ '0' ಆದಾಗ ಆ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಬೆಲೆ 1 ಆಗುವುದು. ಅಂದರೆ

$a \in R, (a \neq 0)$, ಆಗುವ ಎಲ್ಲಾ a ಗಳಿಗೂ $a^0 = 1$.

a^{-n}ನ ಅರ್ಥವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವುದು

$a^m \times a^n = a^{m+n}$ ಎನ್ನುವ ನಿಯಮ m, n ಗಳ ಎಲ್ಲಾ ಬೆಲೆಗಳಿಗೂ ಸತ್ಯ ಎಂದು ಒಪ್ಪಿಕೊಂಡಿರುವುದರಿಂದ, m ಗೆ $-n$ ಎಂಬ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಆದೇಶಿಸಿದಾಗ

$$a^{-n} \times a^n = a^{-n+n} = a^0$$

ಎಂದು ಆಗುವುದು. ಆದರೆ $a^0 = 1$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿದೆ.

ಆದ್ದರಿಂದ, $a^{-n} \times a^n = 1$

ಅಥವಾ $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$

ಮತ್ತು $a^n = \frac{1}{a^{-n}}$ ಎಂದಾಗುತ್ತದೆ.

ಇದರಿಂದ, ಒಂದು ಅಪವರ್ತನವನ್ನು ಅಂಶದಿಂದ ಛೇದಕ್ಕೂ, ಛೇದದಿಂದ ಅಂಶಕ್ಕೂ ವರ್ಗಾಯಿಸಬೇಕಾದರೆ ಅದರ ಘಾತದ ಚಿಹ್ನೆಯನ್ನು ಬದಲಾಯಿಸಬೇಕಾಗುತ್ತದೆ ಎಂದು ತಿಳಿಯಬಹುದು.

ಉದಾಹರಣೆಗಳು : (1) $a^{-2} = \frac{1}{a^2}$

(2) $\frac{1}{x^{-1/2}} = x^{1/2} = \sqrt{x}$

$$(3)\ (125)^{-2/3} = \frac{1}{(125)^{2/3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{125^2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt[3]{5^6}} = \frac{1}{5^2} = \frac{1}{25}$$

ಭಿನ್ನರಾಶಿಯ ಮತ್ತು ಋಣಾತ್ಮಕ ಘಾತಾಂಕಗಳ ನಿಯಮಗಳು:

ಮೊದಲನೇ ನಿಯಮ : $a^m . a^n = a^{m+n}$

(i) m, n ಗಳು ಧನಾತ್ಮಕ ಪೂರ್ಣಸಂಖ್ಯೆಗಳಾಗಿದ್ದಾಗ ಈ ನಿಯಮವು ಸತ್ಯವಾಗಿದೆ ಎಂದು ಹಿಂದಿನ ತರಗತಿಗಳಲ್ಲಿ ತಿಳಿದಿದ್ದೇವೆ.

ಘಾತಾಂಕಗಳು ಋಣಾತ್ಮಕ ಅಥವಾ ಧನಾತ್ಮಕ ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾಗಿದ್ದಾಗಲೂ ನಿಯಮವು ನಿಜವಾಗಿದೆ.

ಉದಾಹರಣೆಗಳು :

$$(1)\ x^3 \div x^5 = x^{3-5} = x^{-2} = \frac{1}{x^2}$$

$$(2)\ a \div a^{-3/5} = a^{1+3/5} = a^{8/5}$$

$$(3)\ x^{p-q} \div x^{p-r} = x^{p-q-(p-r)} = x^{r-q}$$

(ii) m, n ಗಳು ಧನಾತ್ಮಕ ಭಿನ್ನರಾಶಿಯಾದಾಗ, ಅಂದರೆ

$m = \frac{p}{q}$ ಮತ್ತು $n = \frac{r}{s}$ (ಇಲ್ಲಿ, $p, q, r, s \in N$) ಆಗಿರಲಿ.

$$x = a^m \times a^n \quad \text{.... (1)}$$

ಆಗಿರಲಿ. ಅಂದರೆ

$$x = a^{p/q} \times a^{r/s}$$

ಎರಡು ಕಡೆಗಳಲ್ಲಿ qs ನೆಯ ಘಾತವನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೆ

$$x^{qs} = (a^{p/q} \times a^{r/s})^{qs}$$

$$= (a^{p/q})^{qs} \times (a^{r/s})^{qs}$$ [$\because (ab)^m = a^m b^m$, m ಧನಸಂಖ್ಯೆ]

$$= \left[\left(a^{p/q}\right)^q\right]^s \times \left[\left(a^{r/s}\right)^s\right]^q$$ ($\because$ q ಮತ್ತು s ಗಳು ಧನಸಂಖ್ಯೆಗಳು)

$$=\left[\left(\sqrt[q]{a^p}\right)^q\right]^s \times \left[\left(\sqrt[s]{a^r}\right)^s\right]^q$$

$$= (a^p)^s \times (a^r)^q$$

ಅಂದರೆ, $x^{qs} = a^{ps+rq}$ ($\because p, q, r, s$ ಗಳು ಧನಾತ್ಮಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು)

ಈಗ, ಎರಡು ಕಡೆಗಳಲ್ಲಿ qs ನೆಯ ಮೂಲವನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೆ

$$x = \sqrt[qs]{a^{ps+rq}}$$

$$= a^{(ps+rq)/qs}$$

$$= a^{ps/qs + rq/qs}$$

ಅಂದರೆ, $x = a^{(p/q)+(r/s)}$

ಅಥವಾ $x = a^{m+n}$ ... (2)

ಸಮೀಕರಣ (1) ಮತ್ತು (2) ರಿಂದ

$$a^m \times a^n = a^{m+n}$$

ಎಂದು ದೊರೆಯುತ್ತದೆ.

ಎರಡನೆಯ ನಿಯಮ : $(a^m)^n = a^{mn}$

$m = \frac{p}{q}$, $n = \frac{r}{s}$ ಮತ್ತು $p, q, r, s \in N$ ಆಗಿದ್ದಾಗ

ನಿಯಮದ ಸಾಧನೆ :

ಈಗ, $x^m = x^{p/q} = \sqrt[q]{x^p}$

$$\therefore (x^m)^q = \left(\sqrt[q]{x^p}\right)^q$$

$$\left[(x^m)^r\right]^q = \left[\left(\sqrt[q]{x^p}\right)^r\right]^q$$

$$= \left(\sqrt[q]{x^p}\right)^{rq}$$

$$= \left(\sqrt[q]{x^p}\right)^{qr}$$

$$= \left[\left(\sqrt[q]{x^p}\right)^q\right]^r$$

$$= \left[x^p\right]^r$$

$$= x^{pr}$$

ಎರಡು ಕಡೆಗಳಲ್ಲೂ q ನೆಯ ಮೂಲವನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೆ

$$\left[x^m\right]^r = \sqrt[q]{x^{pr}} = x^{pr/q}$$

ಈಗ ಎರಡು ಕಡೆಯಲ್ಲೂ s ನೆಯ ಮೂಲವನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೆ

$$\sqrt[s]{\left(x^m\right)^r} = \sqrt[s]{x^{pr/q}}$$

$$\therefore \left[x^m\right]^{r/s} = x^{pr/qs}$$

ಅಂದರೆ $\left[x^{p/q}\right]^{r/s} = x^{(p/q)\times(r/s)}$

(ii) m ಅಥವಾ n ಋಣ ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಿದ್ದಾಗ $(x^m)^n = x^{mn}$ ಎಂದು ತೋರಿಸುವುದು.

ಇಲ್ಲಿ $m = -k$ ಇರಲಿ ; ಅಂದರೆ $k > 0$

$$\therefore x^m = x^{-k} = \frac{1}{x^k}$$

$$\therefore (x^m)^n = \left(\frac{1}{x^k}\right)^n = \frac{1^n}{\left(x^k\right)^n} = \frac{1}{x^{kn}}$$

$$= x^{-kn}$$

$$= x^{(-k)n}$$

$$\therefore (x^m)^n = x^{mn}$$

ಮೂರನೆಯ ನಿಯಮ :

$(xy)^m = x^m y^m$ನ್ನು $m = p/q$ ಆದಾಗ ಮತ್ತು $m = -k$ ಆದಾಗ ಸಾಧಿಸುವ ಕ್ರಮವನ್ನು ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳಿಗೆ ಅಭ್ಯಾಸಕ್ಕಾಗಿ ಬಿಡಲಾಗಿದೆ.

ಉದಾಹರಣೆಗಳು

1. ಸುಲಭರೂಪಕ್ಕೆ ತನ್ನಿ :

$$\left(x^{a/b}\, y^{-1}\right)^{b} \div \left(\frac{x^{a^2-b^2}}{y^{ab+b^2}}\right)^{\frac{1}{a+b}}$$

$$= \left(x^{a}y^{-b}\right) \div \left(\frac{x^{(a-b)(a+b)}}{y^{b(a+b)}}\right)^{\frac{1}{a+b}} \qquad \text{(ಮೂರನೇ ನಿಯಮದಂತೆ)}$$

$$= \left(x^{a}y^{-b}\right) \div \frac{x^{a-b}}{y^{b}}$$

$$= \frac{x^{a}y^{-b}y^{b}}{x^{a-b}} = x^{a-(a-b)}\; y^{-b+b} \qquad \text{(ಮೊದಲನೇ ನಿಯಮದಂತೆ)}$$

$$= x^{a-a+b}$$

$$= x^{b}$$

2. $x^{b-c} \times x^{c-b} \times x^{a-b} \times x^{b-a}$

$= x^{b-c+c-b} \times x^{a-b+b-a}$

$= x^{0} \times x^{0}$

$= 1 \times 1$

$= 1.$

3. $a^{1/3} + b^{1/3} + c^{1/3} = 0$ ಆದರೆ $(a+b+c)^3 = 27abc$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಸಮೀಕರಣದಿಂದ, $a^{1/3} + b^{1/3} = -c^{1/3}$

ಎರಡು ಕಡೆಗೂ 3ರ ಘಾತಕ್ಕೆ ಏರಿಸಿದಾಗ

$$\left(a^{1/3} + b^{1/3}\right)^3 = \left(-c^{1/3}\right)^3$$

ಎಂದು ದೊರೆಯುತ್ತದೆ.

$$\therefore \left(a^{1/3}\right)^3 + \left(b^{1/3}\right)^3 + 3a^{1/3}\, b^{1/3}\left(a^{1/3} + b^{1/3}\right) = \left(-c^{1/3}\right)^3$$

ಅಂದರೆ, $a + b + 3a^{1/3}\, b^{1/3}\left(-c^{1/3}\right) = -c$

$$\therefore\ a + b + c = 3a^{1/3}\, b^{1/3}\, c^{1/3}$$

ಪುನಃ ಎರಡು ಕಡೆಗೂ 3 ರ ಘಾತಕ್ಕೆ ಏರಿಸಿದರೆ

$$(a + b + c)^3 = 27\left(a^{1/3}\, b^{1/3}\, c^{1/3}\right)^3$$

ಎಂದಾಗುತ್ತದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ

$$(a + b + c)^3 = 27abc\ .$$

4. $a^x = b^y = c^z$ ಮತ್ತು $b^2 = ac$ ಆದರೆ $\dfrac{2}{y} = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{z}$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಸಮೀಕರಣದಲ್ಲಿ $a^x = b^y = c^z = K$ ಆಗಿರಲಿ.

$\therefore\ a = K^{1/x},\ b = K^{1/y}$ ಮತ್ತು $c = K^{1/z}$. ಎಂದಾಗುವುದು.

ಈಗ $b^2 = ac$ ಎಂಬ ಸಮೀಕರಣದಲ್ಲಿ a, b, c ಗಳಿಗೆ ಮೇಲೆ ಪಡೆದಿರುವ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಆದೇಶಿಸಿದರೆ

$$\left(K^{1/y}\right)^2 = K^{1/x} \cdot K^{1/z}$$

ಎಂದಾಗುತ್ತದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ

$$\left(K^{2/y}\right) = K^{1/x + 1/z}$$

$$\therefore\ \frac{2}{y} = \frac{1}{x} + \frac{1}{z}$$ ($\because$ ಘಾತಗಳು ಸಮವಾಗಿರಬೇಕು.)

5. $\left(\dfrac{x^{b-c}}{x^{a-c}}\right)^{b+a} \cdot \left(\dfrac{x^{c-a}}{x^{b-a}}\right)^{c+b} \cdot \left(\dfrac{x^{a-b}}{x^{c-b}}\right)^{a+c} = 1$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

ದತ್ತ ಬೀಜವಾಕ್ಯ: $\left(x^{b-c-(a-c)}\right)^{b+a} . \left(x^{c-a-b+a)}\right)^{c+b} . \left(x^{a-b-c+c)}\right)^{a+c}$

$=\left(x^{b-a}\right)^{b+a} . \left(x^{c-b}\right)^{c+b} . \left(x^{a-c}\right)^{a+c}$

$= x^{b^2-a^2} . x^{c^2-b^2} . x^{a^2-c^2}$

$= x^{b^2-a^2+c^2-b^2+a^2-c^2}$

$= x^0$

$= 1.$

6. ಬಿಡಿಸಿ: $7^{x-y} = 49, \ 7^{x+y} = 343.$

ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಸಮೀಕರಣಗಳಿಂದಾಗಿ

$7^{x-y} = 7^2$ ಮತ್ತು $7^{x+y} = 7^3$

ಎಂದು ಬರೆಯಬಹುದು. ಘಾತಗಳನ್ನು ಸಮಾನೀಕರಿಸಿದಾಗ

$x - y = 2$

$x + y = 3$

ಎಂದು ಬರುವುದು. ಇವುಗಳನ್ನು ಬಿಡಿಸಿದಾಗ

$x = \frac{5}{2}$ ಮತ್ತು $y = \frac{1}{2}$

ಎಂದು ಬರುವುದು.

7. $a^b = c, \ b^c = a, \ c^a = b$ ಆದರೆ $abc = 1$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

(ಇಲ್ಲಿ a, b, c ಗಳು ಶೂನ್ಯವಲ್ಲದ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿವೆ.)

ಈಗ, $a = b^c$ (ಕೊಟ್ಟಿದೆ)

$= (c^a)^c$ (ಏಕೆಂದರೆ $b = c^a$ ಎಂದು ಕೊಟ್ಟಿದೆ)

$= c^{ac}$ (ಘಾತ ನಿಯಮದಿಂದ)

$= (a^b)^{ac}$ (ಏಕೆಂದರೆ $c = a^b$ ಎಂದು ಕೊಟ್ಟಿದೆ)

$a = a^{bac}$ (ಘಾತ ನಿಯಮದಿಂದ)

$\therefore\ abc = 1\ (a \neq 0\ ,\ a \neq 1)$

8. ಸುಲಭ ರೂಪಕ್ಕೆ ತನ್ನಿ:

$$\frac{1}{1+x^{a-b}+x^{a-c}}+\frac{1}{1+x^{b-c}+x^{b-a}}+\frac{1}{1+x^{c-a}+x^{c-b}}$$

ದತ್ತ ಬೀಜವಾಕ್ಯದಲ್ಲಿನ ಮೂರು ಪದಗಳನ್ನು x^{-a}, x^{-b}, x^{-c}ಗಳಿಂದ ಅನುಕ್ರಮವಾಗಿ ಗುಣಿಸಿದರೆ, ಅದು

$$\frac{x^{-a}}{x^{-a}+x^{-b}+x^{-c}}+\frac{x^{-b}}{x^{-b}+x^{-c}+x^{-a}}+\frac{x^{-c}}{x^{-c}+x^{-a}+x^{-b}}$$

ಎಂದು ಬದಲಾಗುವುದು. ಇದರ ಬೆಲೆ

$$\frac{x^{-a}+x^{-b}+x^{-c}}{x^{-a}+x^{-b}+x^{-c}} = 1$$ ಎಂದು ಆಗುವುದು.

9. $xyz = 1$ ಆದರೆ

$(1+x+y^{-1})^{-1} + (1+y+z^{-1})^{-1} + (1+z+x^{-1})^{-1} = 1$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

ಇಲ್ಲಿ ಬೀಜವಾಕ್ಯದ ಎಡಭಾಗ

$$\frac{1}{1+x+y^{-1}}+\frac{1}{1+y+z^{-1}}+\frac{1}{1+z+x^{-1}}$$

$$=\frac{y}{y+xy+1}+\frac{z}{z+yz+1}+\frac{x}{x+zx+1}$$

$$=\frac{y}{y+xy+1}+\frac{z}{z+\frac{1}{x}+1}+\frac{x}{x+\frac{1}{y}+1}$$

[ಏಕೆಂದರೆ, $yz=\frac{1}{x}$, $zx=\frac{1}{y}$ ಎಂದು 2ನೇ ಮತ್ತು 3ನೇ ಪದಗಳಲ್ಲಿ ಆದೇಶಿದೆ]

$$=\frac{y}{y+xy+1}+\frac{zx}{zx+1+x}+\frac{xy}{xy+1+y}$$

$$=\frac{y}{y+xy+1}+\frac{1}{y\left(\frac{1}{y}+1+x\right)}+\frac{xy}{xy+1+y}$$

($\because$ $xz = \frac{1}{y}$ ಎಂದು 2ನೇ ಪದದಲ್ಲಿ ಆದೇಶಿಸಿದೆ)

$$= \frac{y}{y+xy+1} + \frac{1}{1+y+xy} + \frac{xy}{xy+1+y}$$

$$= \frac{y+1+xy}{xy+y+1} = 1.$$

ಅಭ್ಯಾಸ – 1.1

1. ಸಂಕ್ಷೇಪಿಸಿರಿ : $\left[x^{\frac{1}{3}}\left\{x^{\frac{-1}{2}}y^{\frac{-1}{2}}(x^2y^2)^{\frac{2}{3}}\right\}^{\frac{-1}{2}}\right]^6$

2. $\left[\left(p+\frac{1}{q}\right)^p \left(p-\frac{1}{q}\right)^q\right] \div \left[\left(q+\frac{1}{p}\right)^p \left(q-\frac{1}{p}\right)^q\right]$

3. $a = x+\sqrt{x^2+1}$ ಆದರೆ $a+a^{-1} = 2x$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

4. $x = 2^{1/3} - 2^{-1/3}$ ಆದರೆ $2x^3+6x = 3$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

5. $a = 2^x$, $b = 2^y$ ಮತ್ತು $a^{3y}. b^{5x} = 2^{1/2}$ ಆದರೆ $8xyz=1$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

6. $m = a^x$, $n = a^y$, $m^y. n^x = a^{2(x+y)}$ ಆದರೆ $\frac{1}{x}+\frac{1}{y} = 1$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

7. $a^x = b^y = c^z = d^w$ ಮತ್ತು $ab=cd$ ಆದರೆ
   $\frac{1}{x}+\frac{1}{y} = \frac{1}{z} + \frac{1}{w}$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

8. $x = a^{1/3}+ a^{-1/3}$ ಆದರೆ $x^3-3x = a+\frac{1}{a}$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

9. $x = 2+ 2^{1/3}+ 2^{2/3}$ ಆದರೆ $x^3-6x^2+6x-2 = 0$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

10. ಸಂಕ್ಷೇಪಿಸಿ : $\dfrac{8^{2/3}+(-2)^0+4^{-1}}{(16^{1/4})+(81^{-3/4})}$

11. ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಬಿಡಿಸಿ : $4^x-10.2^x+16 = 0$.

1.2 ಪ್ರತಿಘಾತಗಳ ನಿಯಮಗಳು

$a > 0$ ಮತ್ತು $a \neq 1$ ಆಗಿದ್ದು, $y = a^x$ ಆದಾಗ x ನ್ನು a ಆಧಾರದಲ್ಲಿ y ನ ಪ್ರತಿಘಾತ ಎಂದು ಹೇಳುತ್ತೇವೆ ಮತ್ತು $x = \log_a y$ ಎಂದು ಬರೆಯುತ್ತೇವೆ ಎನ್ನುವ ವಿಷಯವು ಈಗಾಗಲೇ ನಿಮಗೆ ತಿಳಿದಿದೆ.

ಪ್ರತಿಘಾತಗಳ ಮೂಲ ಗುಣಗಳನ್ನು ಮತ್ತು ಅವುಗಳ ಸಾಧನೆಗಳನ್ನು ಮುಂದೆ ಕೊಡಲಾಗಿದೆ.

ಪ್ರತಿಘಾತಗಳ ಮೂಲಗುಣಗಳು :

ಘಾತಾಂಕ ನಿಯಮಗಳ ನೇರವಾದ ಪ್ರತಿಫಲವೇ ಪ್ರತಿಘಾತಗಳ ನಿಯಮಗಳು ಎಂದು ಹೇಳಬಹುದು.

(1) $a^m \times a^n = a^{(m+n)}$

(2) $a^m + a^n = a^{m-n}$

(3) $(a^m)^n = a^{mn}$

ಈ ಘಾತಾಂಕ ನಿಯಮಗಳಿಂದ ಕೆಳಗಿನ ಪ್ರತಿಘಾತ ನಿಯಮಗಳನ್ನು ಪಡೆಯಬಹುದು:

(1) $\log_a mn = \log_a m + \log_a n$

(2) $\log_a \frac{m}{n} = \log_a m - \log_a n$

(3) $\log_a m^k = k \log_a m$

ಪ್ರಮೇಯ 1 :

$$\log_a mn = \log_a m + \log_a n$$

ಸಾಧನೆ : $m = a^x$ .... (1)

ಮತ್ತು $m = a^y$ .... (2)

ಎಂದಿರಲಿ.

ಆಗ, $x = \log_a m$ ಮತ್ತು $y = \log_a n$ ಆಗುವುದು.

ಸಮೀಕರಣ (1) ಮತ್ತು (2) ರಿಂದ

$$a^x . a^y = a^{x+y} = mn$$

ಎಂದು ದೊರೆಯುತ್ತದೆ.

ಈಗ, ಪ್ರತಿಘಾತದ ವ್ಯಾಖ್ಯೆಯನ್ನು ಬಳಸಿದಾಗ

$$x + y = \log_a mn$$

ಎಂದಾಗುತ್ತದೆ. ಈಗ, x, y ಗಳಿಗೆ ಆಯಾ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಆದೇಶಿಸಿದರೆ

$$\log_a m + \log_a n = \log_a (mn)$$

ಎಂದಾಗುವುದು. ಆದ್ದರಿಂದ ಒಂದು ಗುಣಲಬ್ಧದ ಪ್ರತಿಘಾತವು ಅದರ ಅಪವರ್ತನಗಳ ಪ್ರತಿಘಾತಗಳ ಮೊತ್ತಕ್ಕೆ ಸಮ.

ಪ್ರಮೇಯ 2 :

$$\log_a \frac{m}{n} = \log_a m - \log_a n$$

ಸಾಧನೆ : $m = a^x$ .... (1)

ಮತ್ತು $n = a^y$ .... (2)

ಎಂದು ಇರಲಿ. ಆಗ

$$x = \log_a m \text{ ಮತ್ತು } y = \log_a n$$

$$\therefore \frac{m}{n} = \frac{a^x}{a^y} = a^{x-y} \quad \text{((1) ಮತ್ತು (2) ರಿಂದ)}$$

ಈಗ, ಪ್ರತಿಘಾತದ ವ್ಯಾಖ್ಯೆಯನ್ನು ಬಳಸಿದಾಗ

$$x - y = \log_a \left(\frac{m}{n}\right)$$ ಎಂದಾಗುತ್ತದೆ.

x ಮತ್ತು y ಗಳಿಗೆ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಆದೇಶಿಸಿದರೆ

$$\log_a m - \log_a n = \log_a \left(\frac{m}{n}\right)$$

ಅಂದರೆ, ಎರಡು ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಭಾಗಲಬ್ಧದ ಪ್ರತಿಘಾತವು ಅವುಗಳ ಪ್ರತಿಘಾತಗಳ ವ್ಯತ್ಯಾಸಕ್ಕೆ ಸಮವಾಗಿರುವುದು.

ಪ್ರಮೇಯ 3 :

$$\log_a m^k = k \log_a m$$

ಸಾಧನೆ : $m = a^x$ ಇರಲಿ $\therefore x = \log_a m$

ಆಗ $m^k = (a^x)^k = a^{kx}$

$$\therefore \log_a m^k = kx$$

ಅಂದರೆ, $\log_a m^k = k \log_a m$

ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆಯ k ನೆಯ ಘಾತದ ಪ್ರತಿಘಾತವು ಆ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಪ್ರತಿಘಾತದ k ಆವರ್ತದಷ್ಟು ಇರುತ್ತದೆ.

ಉದಾಹರಣೆಗಳು : ಆಧಾರವು ಯಾವುದೇ ಇರಲಿ.

(1) $\log (13 \times 17) = \log 13 + \log 17$

(2) $\log \dfrac{7.1425}{2.41} = \log 7.1425 - \log 2.41$

(3) $\log 57^{2/3} = \dfrac{2}{3} \log 57$

ಆಧಾರದ ಪರಿವರ್ತನೆ

ಯಾವುದಾದರೂ ಒಂದು ಆಧಾರವನ್ನು ಅನುಸರಿಸಿ ಗಣಿಸಿದ ಪ್ರತಿಘಾತಗಳನ್ನು ಬೇರೆ ಯಾವುದಾದರೂ ಆಧಾರಕ್ಕೆ ಈ ಕೆಳಗೆ ಕಾಣಿಸಿರುವಂತೆ ಸುಲಭವಾಗಿ ಪರಿವರ್ತಿಸಬಹುದು.

$\log_a N$ ಕೊಟ್ಟಾಗ, $\log_b N$ ಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವುದು :

$\log_b N = x$ ಇರಲಿ. ಆಗ, $N = b^x$ ಆಗುವುದು.

ಈಗ, $N = b^x$ ಸಮೀಕರಣದ ಎರಡು ಕಡೆಗಳಲ್ಲೂ a ಆಧಾರಕ್ಕೆ ಪ್ರತಿಘಾತಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೆ

$$\log_a N = \log_a b^x = x \log_a b$$

$$\therefore \quad x = \frac{\log_a N}{\log_a b}$$

$$\therefore \quad \log_b N = \frac{\log_a N}{\log_a b}$$

ಉದಾಹರಣೆಗಳು

1. $\log_a b . \log_b a = 1$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

ಎಡ ಪಾರ್ಶ್ವದ ಎರಡು ಪ್ರತಿಘಾತಗಳ ಆಧಾರವನ್ನು 10 ರ ಆಧಾರಕ್ಕೆ ಪರಿವರ್ತಿಸಿದರೆ

$$\text{ಎಡಪಾರ್ಶ್ವ} = \frac{\log_{10} b}{\log_{10} a} \times \frac{\log_{10} a}{\log_{10} b} = 1$$

ಎಂಬ ಅಪೇಕ್ಷಿತ ಉತ್ತರವು ದೊರೆಯುತ್ತದೆ.

2. $\frac{\log_a x}{m-n} = \frac{\log_a y}{n-p} = \frac{\log_a z}{p-m}$ ಆದರೆ $xyz = 1$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಪ್ರಮಾಣವೂ k ಇರಲಿ.

ಆಗ, $\log_a x = k(m-n)$

$\log_a y = k(n-p)$

ಮತ್ತು $\log_a z = k(p-m)$

$\therefore \log_a x + \log_a y + \log_a z = k(m-n+n-p+p-m) = k(0)$

ಆದ್ದರಿಂದ, $\log_a xyz = 0$

ಅಥವಾ $xyz = a^0 = 1$

3. ಪ್ರತಿಘಾತಗಳ ಪಟ್ಟಿಯನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸದೆ ಬೆಲೆ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ:

(i) $\log_{10} 35 + \log_{10}\left(\frac{6}{7}\right) + \log_{10}\left(3\frac{1}{3}\right)$

(ii) $\frac{\log 625}{\log 125}$

(iii) $10^{\log_{10} 7}$

(i) $\log p + \log m + \log n = \log(p \times m \times n)$

ಎಂಬುದು ಯಾವುದೇ ಆಧಾರಕ್ಕೆ ನಿಜ ಆಗಿರುವುದರಿಂದ

ದತ್ತ ಬೀಜವಾಕ್ಯವು

$$\log_{10}\left(35 \times \frac{6}{7} \times \frac{10}{3}\right)$$

$$= \log_{10} 100 = \log_{10} 10^2 = 2 \log_{10} 10$$

$$= 2 \times 1$$

$$= 2.$$

(ii) $\frac{\log\ 625}{\log\ 125} = \frac{\log\ 5^4}{\log\ 5^3} = \frac{4 \log\ 5}{3 \log\ 5} = \frac{4}{3}.$

(iii) $x = 10^{\log_{10} 7}$ ಇರಲಿ.

ಆಧಾರ 10 ಇಟ್ಟುಕೊಂಡು ಎರಡು ಕಡೆಯೂ ಪ್ರತಿಘಾತ ತೆಗೆದಾಗ

$$\log_{10} x = \log_{10} 7\ .\ \log_{10} 10$$

$$= \log_{10} 7 \times 1 = \log_{10} 7$$

ಎಂದು ಬರುತ್ತದೆ.

$\therefore x = 7$

4. ಬಿಡಿಸಿ :

(i) $4^x = 32$

ಈ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು

$$\left(2^2\right)^x = 2^5$$

ಎಂದು ಬರೆಯಬಹುದು

$\therefore\ 2x = 5$

ಅಥವಾ $x = 5/2$

(ii) $4^x = 21$

ಎರಡು ಕಡೆಯೂ 10ರ ಆಧಾರದಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿಘಾತ ತೆಗೆದಾಗ

$$x \log_{10} 4 = \log_{10} 21$$

ಎಂದಾಗುತ್ತದೆ.

ಆದ್ದರಿಂದ, $x = \frac{\log_{10} 21}{\log_{10} 4}$

[ಅಂದರೆ, $x = \frac{1.3222}{0.6021} \approx 2.20$

(ಪ್ರತಿಘಾತಗಳ ಪಟ್ಟಿಯನ್ನು ಬಳಸಿದಾಗ)].

5. x, y ಗಳನ್ನು ಪ್ರತಿಘಾತವಿಲ್ಲದಂತೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿ :

(i) $\log x^2 - \log y^3 = \log 11$.

ಪ್ರತಿಘಾತದ ಗುಣವನ್ನು ಬಳಸಿ ದತ್ತ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು

$$\log \frac{x^2}{y^3} = \log 11$$

ಎಂದು ಬರೆಯಬಹುದು.

$$\therefore \frac{x^2}{y^3} = 11 \quad \text{ಅಥವಾ} \quad x^2 = 11\ y^3.$$

(ii) $2 \log (x + y) = \log (x - y) + 3$

ದತ್ತ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು (10ನ್ನು ಆಧಾರವಾಗಿಸಿ)

$$\log_{10} (x+y)^2 = \log_{10} (x-y) + 3 \log_{10} 10$$

$$= \log_{10} (x-y) + \log_{10} 10^3$$

ಎಂದು ಬರೆಯಬಹುದು.

ಅಂದರೆ, $\log (x+y)^2 = \log\left[10^3(x-y)\right]$

$$\therefore \quad (x+y)^2 = 10^3(x-y).$$

6. 4^{333} ಎಂಬ ಸಂಖ್ಯೆಯಲ್ಲಿ ಎಷ್ಟು ಅಂಕಗಳಿವೆ?

ಈಗ, $x = 4^{333}$ ಇರಲಿ.

ಎರಡು ಕಡೆಯೂ 10ರ ಆಧಾರದಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿಘಾತ ತೆಗೆದಾಗ

$$\log_{10} x = 333 \log_{10} 4$$

$$\approx 333 \times 0.6021$$

$$\approx 200.4993$$

ಎಂದಾಗುತ್ತದೆ.

ಆದ್ದರಿಂದ, ಇರುವ ಅಂಕಗಳು : $200 + 1 = 201$.

7. $x=\log_c ab$, $y=\log_a bc$ ಮತ್ತು $z=\log_b ca$ ಆದರೆ $(x+y)^{-1} + (y+1)^{-1} + (z+1)^{-1} = 1$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

ದತ್ತ ಬೀಜವಾಕ್ಯ $\sum(x+1)^{-1} = \sum\frac{1}{x+1}$

$$=\sum\frac{1}{(\log_c ab)+1} = \sum\frac{1}{(\log ab / \log c + 1)}$$

$$=\sum\frac{1}{\frac{\log ab + \log c}{\log c}} = \sum\frac{\log c}{\log abc}$$

$$=\frac{\log c}{\log abc} + \frac{\log a}{\log abc} + \frac{\log b}{\log abc}$$

$$=\frac{\log c + \log a + \log b}{\log abc}$$

$$=\frac{\log abc}{\log abc} = 1.$$

8. $b^2 = ac$ ಆದರೆ $\frac{1}{\log_a x} + \frac{1}{\log_c x} = \frac{2}{\log_b x}$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

ಸಾಧಿಸಬೇಕಾಗಿರುವ ಸಮೀಕರಣದ ಎಡಭಾಗ

$$\frac{1}{\log_a x} + \frac{1}{\log_c x}$$

$$=\frac{1}{\left[\frac{\log x}{\log a}\right]} + \frac{1}{\left[\frac{\log x}{\log c}\right]}$$

$$=\frac{\log a}{\log x} + \frac{\log c}{\log x} = \frac{\log a + \log c}{\log x}$$

$$=\frac{\log ac}{\log x}$$

$$= \frac{\log b^2}{\log x} \qquad (\because\ b^2 = ac)$$

$$= 2\frac{\log b}{\log x}$$

$$= \frac{2}{\log x / \log b} = \frac{2}{\log_b x}$$

9. $a^2 + b^2 = 7ab$ ಆದರೆ $\log\left(\frac{a+b}{3}\right) = \frac{1}{2}(\log a + \log b)$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

ಈಗ, $a^2 + b^2 = 7ab$ ಎಂದು ಕೊಟ್ಟಿದೆ.

$$\therefore\ a^2 + b^2 + 2ab = 9ab$$

ಅಂದರೆ, $(a+b)^2 = 9ab$

ಅಥವಾ $(a+b) = 3(ab)^{1/2}$

ಅಥವಾ $\frac{a+b}{3} = (ab)^{1/2}$

ಎರಡು ಕಡೆಯೂ ಪ್ರತಿಘಾತವನ್ನು ತೆಗೆದಾಗ

$$\log \frac{a+b}{3} = \frac{1}{2}\log(ab)$$

$$= \frac{1}{2}(\log a + \log b)$$

ಎಂಬ ಅಪೇಕ್ಷಿತ ಫಲಿತಾಂಶ ದೊರೆಯುತ್ತದೆ.

10. $x = 10^{1/(1-\log_{10} z)}$, $y = 10^{1/(1-\log_{10} x)}$ ಆದರೆ

$z = 10^{1/(1-\log_{10} y)}$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

ಈಗ, ದತ್ತ ಸಮೀಕರಣ

$$x = 10^{1/(1-\log_{10} z)}$$

ಎರಡು ಕಡೆಯೂ 10ರ ಆಧಾರದಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿಘಾತವನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡಾಗ

$$\log_{10} x = \frac{1}{1-\log_{10} z} \log_{10} 10$$

ಎಂದಾಗುತ್ತದೆ. ಅಂದರೆ

$$\log_{10} x = \frac{1}{1-\log_{10} z} \qquad \text{.... (i)}$$

ಇದೇ ರೀತಿ, $\log_{10} y = \dfrac{1}{1-\log_{10} x}$ .... (ii)

ಈಗ (ii)ರಲ್ಲಿ (i)ರಿಂದ $\log x$ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಆದೇಶಿಸಿದರೆ

$$\log_{10} y = \frac{1}{1-\dfrac{1}{1-\log_{10} z}} = \frac{1-\log_{10} z}{-\log_{10} z}$$

$$\therefore\ 1-\log_{10} z = -\log_{10} y \,.\, \log_{10} z$$

ಅಥವಾ $\log_{10} z - \log_{10} z \log_{10} y = 1$

ಅಥವಾ $\log_{10} z\,(1-\log_{10} y) = 1$

$$\therefore \quad \log_{10} z = \frac{1}{1-\log_{10} y}$$

ಅಭ್ಯಾಸ 1.2

1. ಪ್ರತಿಘಾತದ ಪಟ್ಟಿಯನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸದೆ ಕೆಳಗಿನವುಗಳ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ:

   (i) $\log 42 + \log 1\frac{1}{3} + \log 17\frac{6}{7}$

   (ii) $\log \frac{3}{5} + 2\log 2\frac{1}{2} - \log \frac{5}{36} - \log 27$

   (iii) $\dfrac{\log 216}{\log \frac{1}{6}}$

   (iv) $\log \frac{1000}{\sqrt{10}}$

   (v) $10^{\log 9}$

2. ಸಾಧ್ಯವಿದ್ದಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿಘಾತದ ಪಟ್ಟಿಯನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸದೆ ಬಿಡಿಸಿ :

   (i) $2^{3x-2} = 4.3^{x-1}$

   (ii) $2^{3x} = 8^{2y+1}$; $9^{2y} = 3^{3x-9}$

   (iii) $25^x = 5^{x+1} - 6$

3. ಪ್ರತಿಘಾತವಿಲ್ಲದಂತೆ x, y ಗಳನ್ನು ಸಂಬಂಧಿಸಿ :

   (i) $\log (x^2 - y^2) = 2\log x - 3\log y$

   (ii) $2\log \sqrt{x^3 + y^3} = 3\log x + 1$

   (iii) $\log x\sqrt{x} + \log y = 2$

4. $x^2 + y^2 = 3xy$ ಆದರೆ, $\log (x-y) = \frac{1}{2} (\log x + \log y)$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

5. $3 \log_{1000} x = \log_{10} x$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

6. (i) 5^{23} (ii) 3^{48} ಇವುಗಳಲ್ಲಿನ ಅಂಕಿಗಳೆಷ್ಟು?

7. $\log_{2a} a,\ y = \log_{3a} 2a,\ z = \log_{4a} 3a$ ಆದರೆ, $xyz+1=2yz$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

8. $\log\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{1}{2}(\log x + \log y)$ ಆದರೆ, $x = y$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

9. $x = \log_7 9,\ y = \log_5 7$ ಮತ್ತು $\log_3 5$ ಆದರೆ, $xyz = 2$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

10. $\log_a (b^c) \,.\, \log_b (c^a) \,.\, \log_c (a^b) = abc$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

11. $x^{\log y - \log z} \,.\, y^{\log z - \log x} \,.\, z^{\log x - \log y} = 1$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

12. $x^{1/3} + y^{1/3} + z^{1/3} = 0$ ಆದರೆ

$\log\left(\frac{x+y+z}{3}\right) = \frac{1}{3}(\log x + \log y + \log z)$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

13. $2\log\left(\frac{16}{9}\right) + \log\left(\frac{54}{224}\right) + \log\left(\frac{21}{16}\right) = 0$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

14. $a^2 + b^2 = c^2$ ಆದರೆ, $\frac{1}{\log c + b^a} + \frac{1}{\log c - b^a} = 2$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

15. $x^{\log_z y} = y^{\log_z x}$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

ಅಧ್ಯಾಯ-2

ಶ್ರೇಢಿಗಳು

2.1 ಶ್ರೇಢಿಗಳ ಸ್ವರೂಪ

ಒಂದು ನಿರ್ದಿಷ್ಟವಾದ ನಿಯಮಾನುಸಾರ ರಚಿತವಾದ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಪರಂಪರೆಗೆ ಶ್ರೇಢಿ ಎಂದು ಹೆಸರು.

ಒಂದು ಶ್ರೇಢಿಯಲ್ಲಿನ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ***ಶ್ರೇಢಿಯ ಪದ*** ಎಂದೂ, ಪದಗಳ ಮೊತ್ತವನ್ನು ***ಶ್ರೇಢಿಯ ಮೊತ್ತ*** ಎಂದೂ ಕರೆಯುವರು.

ಉದಾ : (i) 1, 3, 5, 7, 9, ...

(ii) 4, 2, 0, -2, -4, ...

(iii) –5, –9, –13, –17, –21, ...

(iv) $a, a+2b, a+4b, a+6b, ...$

(v) $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5} ....$

(vi) 1, 2 , 4 , 8 , 16, ...

ಇವು ಶ್ರೇಢಿಯ ಉದಾಹರಣೆಗಳಾಗಿವೆ.

ಒಂದು ಶ್ರೇಢಿಯ ಮುಖ್ಯ ಗುಣ ಎಂದರೆ, ಅದರ ಕೆಲವು ಪದಗಳನ್ನು ಬರೆದಾಗ ಶ್ರೇಢಿಯ ನಿಯಮವನ್ನು ಗಮನಿಸಿ ಮುಂದಿನ ಪದವನ್ನು ಬರೆಯಬಹುದು.

ಸ್ವಾಭಾವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗಣಕ್ಕೂ, ವಾಸ್ತವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗಣಕ್ಕೂ ಸಂಬಂಧಿಸಿದ ಯಾವುದಾದರೂ ನಿರ್ದಿಷ್ಟವಾದ ನಿಯಮದಿಂದ ಬದ್ಧವಾದ ಒಂದು ಉತ್ಪನ್ನವನ್ನು ಶ್ರೇಢಿ ಎಂದು ಪರಿಗಣಿಸಬಹುದು. ಅಂದರೆ

$$f : N \rightarrow R$$

ಎನ್ನುವ ಒಂದು ಉತ್ಪನ್ನವು ಶ್ರೇಢಿಯನ್ನು ಸೂಚಿಸುತ್ತದೆ. ಇಲ್ಲಿ N ಎಂಬುದು ಸ್ವಾಭಾವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗಣ ಮತ್ತು R ಎಂಬುದು ವಾಸ್ತವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗಣ.

ಉದಾ : $f : N \longrightarrow R$ ಎನ್ನುವುದು $f(n) = 2n - 1$

ಎಂಬ ನಿಯಮದಿಂದ ಬದ್ಧವಾಗಿದೆ. ಆಗ

$f(1) = 2.1 - 1 = 1$

$f(2) = 2.2 - 1 = 3$

$f(3) = 2.3 - 1 = 5$ ಇತ್ಯಾದಿ.

ಆದ್ದರಿಂದ, 1, 3, 5, ..., $(2n-1)$ ಎನ್ನುವುದು ಒಂದು ಶ್ರೇಢಿ. ಈ ಶ್ರೇಢಿಯ n ನೆಯ ಪದ $(2n-1)$ ಆಗಿದೆ.

ಪರಿಮಿತ ಮತ್ತು ಅಪರಿಮಿತ ಶ್ರೇಢಿಗಳು

ಒಂದು ಶ್ರೇಢಿಯು ಒಂದು ನಿಯತವಾದ ಸಂಖ್ಯೆಯಷ್ಟು ಪದಗಳನ್ನು ಒಳಗೊಂಡಿದ್ದರೆ ಅದನ್ನು ಪರಿಮಿತ ಶ್ರೇಢಿ ಎಂದೂ, ಪದಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ ಅಪರಿಮಿತವಾಗಿದ್ದಲ್ಲಿ ಅಪರಿಮಿತ ಶ್ರೇಢಿ ಎಂದೂ ಕರೆಯುವರು.

ಉದಾ : (i) 1, 4, 7, 1,0 ....., 25 ಮತ್ತು

(ii) 2, 4, 8, 16 , ..., 256

ಇವು ಪರಿಮಿತ ಶ್ರೇಢಿಗಳು ಹಾಗೂ

(iii) 1, 3, 5, 7, ...

(iv) 2^2, 4^2, 8^2, 16^2, ...

ಇವು ಅಪರಿಮಿತ ಶ್ರೇಢಿಗಳು.

2.2 ಸಮಾಂತರ ಶ್ರೇಢಿಗಳು

ಇದರಲ್ಲಿ, (ಮೊದಲನೆಯ ಪದವನ್ನು ಬಿಟ್ಟು ಉಳಿದ) ಯಾವುದೇ ಪದವನ್ನು ಅದರ ಹಿಂದಿನ ಪದಕ್ಕೆ ಒಂದು ಸ್ಥಿರಾಂಕವನ್ನು ಕೂಡಿಸುವುದರಿಂದ ಪಡೆಯಬಹುದು. ಈ ಸ್ಥಿರಾಂಕಕ್ಕೆ **ಸಾಮಾನ್ಯ ವ್ಯತ್ಯಾಸ** (ಪ್ರಚಯ) ಎನ್ನುತ್ತಾರೆ. ಯಾವುದಾದರೂ ಪದದಲ್ಲಿ ಅದರ ಹಿಂದಿನ ಪದವನ್ನು ಕಳೆಯುವುದರಿಂದ ಈ ಸಾಮಾನ್ಯ ವ್ಯತ್ಯಾಸವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದು.

ಸೂಚನೆ : ಸಾಮಾನ್ಯ ವ್ಯತ್ಯಾಸವು ಧನ ಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಲೀ ಅಥವಾ ಋಣ ಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಲೀ ಆಗಿರಬಹುದು.

ಉದಾ :

(i) 10, 15, 20, 25, 30 – ಇದು ಒಂದು ಸಮಾಂತರ ಶ್ರೇಢಿ. ಇದರಲ್ಲಿ ಸಾಮಾನ್ಯ ವ್ಯತ್ಯಾಸ 5.

(ii) –12, –9, –6, –3, 0, 3, 6, 9

ಎಂಬ ಸಮಾಂತರ ಶ್ರೇಢಿಯಲ್ಲಿ ಸಾಮಾನ್ಯ ವ್ಯತ್ಯಾಸ 3.

(iii) 50, 47, 44, 41 ....

∴ ಈ ಸಮಾಂತರ ಶ್ರೇಢಿಯಲ್ಲಿ ಸಾಮಾನ್ಯ ವ್ಯತ್ಯಾಸ (–3)

ಗಮನಿಸಿ : ಇನ್ನು ಮುಂದೆ ಸಮಾಂತರ ಶ್ರೇಢಿಯನ್ನು *A. P.* (ಅಂದರೆ Arithmetic Progression) ಎಂದು ಸೂಚಿಸಲಾಗಿದೆ.

ಒಂದು ಸಮಾಂತರ ಶ್ರೇಢಿಯ n ನೆಯ ಪದ :

ಸಾರ್ವತ್ರಿಕವಾಗಿ ಪ್ರಥಮ ಪದ a, ಸಾಮಾನ್ಯ ವ್ಯತ್ಯಾಸ d ಇರುವ A.P ಯ ಪದಗಳನ್ನು ಈ ಕೆಳಗಿನ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಬರೆಯಬಹುದು :

$a, a+d, a+2d, a+3d, a+4d, ...$

ಈ ಶ್ರೇಢಿಯ n ನೇ ಪದವನ್ನು T_n ಎಂದು ಸೂಚಿಸಿದರೆ

$T_n = a + (n-1)d$

ಎನ್ನುವುದು ಸೂತ್ರವಾಗುವುದು. ಹೇಗೆಂದರೆ, ಈ ಮೇಲಿನ ಶ್ರೇಢಿಯಲ್ಲಿ 2ನೆಯ ಪದವನ್ನು

$a + (2-1)d$ ಎಂದು ಬರೆಯಬಹುದು.

ಅಂತೆಯೇ, 3ನೆಯ ಪದವನ್ನು $a + (3-1)d$ ಎಂದೂ

4ನೆಯ ಪದವನ್ನು $a + (4-1)d$ ಎಂದೂ

.. ..

.. ..

.. ..

.. ..

n ನೆಯ ಪದವನ್ನು $a + (n-1)d$ ಎಂದೂ ಬರೆಯಬಹುದು. ಆದ್ದರಿಂದ,

$$\boxed{T_n = a + (n-1)d}$$

ಉದಾಹರಣೆಗಳು

1. 3, 10, 17, 24 .... ಈ ಶ್ರೇಢಿಯ 10ನೇ ಪದ ಬರೆಯಿರಿ.

ಇಲ್ಲಿ, $a = 3, d = 7, n = 10$. ಈ ಮೇಲೆ ತೋರಿಸಿರುವಂತೆ

$$T_n = a + (n-1)d$$

ಆದ್ದರಿಂದ, $T_{10} = 3 + (10-1)7$

$= 3 + (9)\,7$

$= 66.$

2. $-15, -10, -5, 0, 5, 10, ...$ ಶ್ರೇಢಿಯ 15ನೇ ಪದ ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಇಲ್ಲಿ, $a = -15$, $d = 5$ ಮತ್ತು $n = 15$

ಆದ್ದರಿಂದ, $T_{15} = -15 + (15-1)5$

$= -15 + 70$

$= 55.$

3. ಒಂದು ಸಮಾಂತರ ಶ್ರೇಢಿಯ nನೆಯ ಪದ $\frac{1}{15}(11-6n)$ ಆಗಿದೆ. ಮೊದಲನೆಯ ಪದ ಮತ್ತು ಸಾಮಾನ್ಯ ವ್ಯತ್ಯಾಸ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಇಲ್ಲಿ, $T_n = \frac{11-6n}{15}$ ಎಂದು ಕೊಡಲಾಗಿದೆ. ಇದರಲ್ಲಿ

$n = 1$ ಆದೇಶಿಸಿದಾಗ, $T_1 = \frac{11-6(1)}{15} = \frac{5}{15} = \frac{1}{3}$

ಮತ್ತು $n = 2$ ಆದೇಶಿಸಿದಾಗ, $T_2 = \frac{11-6(2)}{15} = \; = \frac{-1}{15}$

ಎಂದಾಗುತ್ತದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ, ಸಾಮಾನ್ಯ ವ್ಯತ್ಯಾಸ

$$d = T_2 - T_1 = \left(\frac{-1}{15}\right) - \left(\frac{1}{3}\right) = \frac{-6}{15} = \frac{-2}{5}$$

$\therefore$ ಪ್ರಥಮ ಪದ $a = \frac{1}{3}$ ಮತ್ತು ಸಾಮಾನ್ಯ ವ್ಯತ್ಯಾಸ $d = \frac{-2}{5}$

4. 10, 12, 14, ... 40 ಎನ್ನುವ $A.P.$ ಯಲ್ಲಿ ಎಷ್ಟು ಪದಗಳಿವೆ?

ಇಲ್ಲಿ, nನೆಯ ಪದ $T_n = a + (n-1)d = 40$, ಕೊನೆಯ ಪದಾಗಿರಲಿ.

ಇದರಲ್ಲಿ, $a = 10$, $d = 2$ ಆದೇಶಿಸಿದಾಗ, ಮೇಲಿನ ಸೂತ್ರದಿಂದ

$$10 + (n-1)2 = 40$$

ಎಂದಾಗುತ್ತದೆ. ಆಗ

$$2n - 2 = 30$$

ಅಥವಾ $2n = 32$

ಅಥವಾ $n = 16$

ಅಂದರೆ, ದತ್ತ $A.P.$ಯಲ್ಲಿ 16 ಪದಗಳಿವೆ.

5. ಒಂದು *A.P.* ಯ 12ನೇ ಪದ 6.5 ಮತ್ತು 21ನೇ ಪದ 11 ಆದರೆ 31ನೇ ಪದ ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಇಲ್ಲಿ, $T_{12} = a + (12-1)d = 6.5$

ಮತ್ತು $T_{21} = a + (21-1)\,d = 11$

ಅಂದರೆ, $a + 11d = 6.5$

$a + 20d = 11$

ಈ ಎರಡು ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಬಿಡಿಸಿದಾಗ

$d = 0.5$, ಮತ್ತು $a = 1$ ಎಂದು ಬರುವುದು. ಆದ್ದರಿಂದ

31ನೇ ಪದ, $T_{31} = a + (31-1)d$

$= 1 + 30\,(0.5)$

$= 16$

ಅಂದರೆ, 31ನೇ ಪದ $= 16$.

ಒಂದು ಸಮಾಂತರ ಶ್ರೇಢಿಯ *n* ಪದಗಳ ಮೊತ್ತ

ಒಂದು ಸಮಾಂತರ ಶ್ರೇಢಿಯ ಪ್ರಥಮ ಪದ a ಇರಲಿ. ಈ ಶ್ರೇಢಿಯ ಸಾಮಾನ್ಯ ವ್ಯತ್ಯಾಸ (ಅಥವಾ ಪ್ರಚಯ) d ಆಗಿರಲಿ ಮತ್ತು ಪದಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ n ಇರಲಿ.

ಈ ಶ್ರೇಢಿಯ ಕೊನೆಯ ಪದ (n ನೆಯ ಪದ)ವನ್ನು T_n ಎಂದು ಕರೆದರೆ, ಆಗ

$T_n = a + (n-1)d$

ಎಂದು ಸೂತ್ರದಿಂದ ಆ ಪದವು ತಿಳಿಯುತ್ತದೆ.

ಈ ಶ್ರೇಢಿಯ n ಪದಗಳ ಮೊತ್ತ S_n ಇರಲಿ. ಶ್ರೇಢಿಯ ಪದಗಳನ್ನು ಎಡದಿಂದ ಬಲಕ್ಕೆ ಬರೆದಾಗ

$$S_n = a + (a+d) + (a+2d) + \ldots + \{\, a + (n-1)\,d \,\} \qquad \ldots (1)$$

ಎಂದು ಬರೆಯಬಹುದು ಮತ್ತು ಇದೇ ಶ್ರೇಢಿಯ ಪದಗಳನ್ನು ಬಲದಿಂದ ಎಡಕ್ಕೆ ಬರೆದಾಗ

$$S_n = \{a + (n-1)\,d\,\} + \ldots + (a + 2d) + (a + d) + a \qquad \ldots (2)$$

ಎಂದು ಬರೆಯಬಹುದು. ಈ ಮೇಲಿನ (1) ಮತ್ತು (2) ಸಮೀಕರಣಗಳ ಅನುರೂಪ ಪದಗಳನ್ನು ಕೂಡಿಸಿದರೆ

$$2S_n = \{2a + (n-1)\,d\} + \{2a + (n-1)\,d\,\} + \ldots\ldots + \{2a + (n-1)d\,\} \quad \ldots (3)$$

ಎಂಬ ಸಮೀಕರಣ ಬರುವುದು. ಈ (3)ನೇ ಸಮೀಕರಣದ ಬಲಭಾಗದಲ್ಲಿ n ಪದಗಳು ಇರುವುದರಿಂದ

$$2S_n = n\{2a + (n-1)d\}$$

ಅಥವಾ $\boxed{S_n = \frac{n}{2}\{2a + (n-1)d\}}$

ಎಂದಾಗುವುದು.

ಉದಾಹರಣೆಗಳು

1. 1, 3, 5, ... *A.P.* ಯ 20 ಪದಗಳ ಮೊತ್ತವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಇಲ್ಲಿ $a = 1, d = 2$ ಮತ್ತು $n = 20$

$$\therefore\ S_{20} = \frac{20}{2}\{2(1) + (20-1)2\}$$

$$= 10(2 + 38)$$

$$= 400.$$

2. ಒಂದು *A.P.*ಯ 5ನೆಯ ಪದವು 50ಆಗಿದೆ. ಈ ಶ್ರೇಢಿಯ ಮೊದಲ 9 ಪದಗಳ ಮೊತ್ತವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಈಗ, $T_5 = a + (5-1)d = 50$

$$\therefore\ a + 4d = 50 \qquad \text{.... (1)}$$

ಮೊತ್ತ, $S_n = \frac{n}{2}\{2a + (n-1)d\}$

ಎಂಬ ಸೂತ್ರದಿಂದ

$$S_9 = \frac{9}{2}\{2a + (9-1)d\}$$

$$= \frac{9}{2}\{2a + 8d\}$$

$$= 9(a + 4d)$$

$$= 9(50) \qquad \text{[(1) ನ್ನು ಬಳಸುವುದರಿಂದ]}$$

$$= 450$$

ಇನ್ನೊಂದು ವಿಧಾನ :

ಈ ಶ್ರೇಢಿಯಲ್ಲಿ 9 ಪದಗಳಿದ್ದು, 5ನೆಯ ಪದವು ಮಧ್ಯದ ಪದವಾಗಿದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ಈ ಶ್ರೇಢಿಯನ್ನು $(50-4d)$, $(50-3d)$, (50-2d), $(50-d)$, 50 $(50+d)$, $(50+2d)$, $(50+3d)$, $(50+4d)$ ಎಂದು ಬರೆಯಬಹುದು.

ಈ ಶ್ರೇಢಿಯ ಮೊತ್ತ

$S_9 = 50 + (50 - d) + (50 + d) + (50 - 2d) + (50 + 2d) + ...$

ಇತ್ಯಾದಿ 9 ಪದಗಳು

$\therefore S_9 = 50 \times 9$ (ಉಳಿದ ಪದಗಳು ನಿರಸನಗೊಳ್ಳುತ್ತವೆ)

$= 450.$

3. 2, 7,12 ...... ಶ್ರೇಢಿಯ ಎಷ್ಟು ಪದಗಳ ಮೊತ್ತವು 245 ಆಗುವುದು?

ಇಲ್ಲಿ, $a = 2, d = 5$; ಪದಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ n ಆಗಿರಲಿ. ಆಗ

$$S_n = \frac{n}{2}\{2a + (n-1)d\}$$

ಅಂದರೆ $245 = \frac{n}{2}\{2(2) + (n-1)5\}$

ಅಥವಾ $490 = n(4 + 5n - 5)$

ಅಥವಾ $5n^2 - n - 490 = 0$

ಅಥವಾ $(5n + 49)(n - 10) = 0$

$\therefore n = 10$ ಅಥವಾ $n = \frac{49}{5}$

ಪದಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ ಒಂದು ಪೂರ್ಣ ಸಂಖ್ಯೆ ಆಗಿರಬೇಕಾಗಿರುವುದರಿಂದ ಪದಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ 10 ಆಗುತ್ತದೆ.

4. 100ರ ಒಳಗಿರುವ ಮತ್ತು 7 ರಿಂದ ಭಾಗವಾಗುವ ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳ ಮೊತ್ತವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಈ ಶ್ರೇಢಿಯ ಪ್ರಥಮ ಪದ $= 7$

ಮತ್ತು ಕೊನೆಯ ಪದ $= 98$

ಹಾಗೂ ಸಾಮಾನ್ಯ ವ್ಯತ್ಯಾಸ $= 7$

ಇಲ್ಲಿ, ಕೊನೆಯ ಪದವು n ನೆಯ ಪದವಾಗಿರಲಿ. ಆದ್ದರಿಂದ

$$T_n = 7 + (n-1)d = 98$$

ಅಂದರೆ, $7 + (n - 1) = 98$

ಅಥವಾ $(n - 1)7 = 91$

ಅಥವಾ $n - 1 = 13$

$\therefore n = 14$

ಅಂತಹ ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳ ಮೊತ್ತ

$$S_{14} = \frac{14}{2} \{2(7) + (14-1)7\}$$

$$= 7(14 + 91)$$

$$= 735$$

5. ಒಂದು *A.P.*ಯ 3 ಪದಗಳ ಮೊತ್ತ 15 ಮತ್ತು ಅವುಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧ 80 ಆಗಿದೆ. ಆ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

[*ಗಮನಿಸಿ* : $a, a+d, a+2d$ .... ಶ್ರೇಢಿಯ ಪದಗಳಾಗಿ ಬಳಸುವ ಬದಲು, 3 ಪದಗಳನ್ನು ಕೊಟ್ಟಾಗ $a-d, a, a+d$ ಎಂದು ಶ್ರೇಢಿಯನ್ನು ಸೂಚಿಸಬಹುದು. ಇದೇ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ, 4 ಪದಗಳನ್ನು ಕೊಟ್ಟಾಗ, $a-3d, a-d, a+d, a+3d$ ಎಂತಲೂ, 5 ಪದಗಳನ್ನು ಕೊಟ್ಟಾಗ $a-2d, a-d, a, a+d, a+2d$ ಎಂತಲೂ ಶ್ರೇಢಿಯನ್ನು ಬಳಸುವುದು ಹೆಚ್ಚು ಉಪಯೋಗಕರವಾಗುವುದು.]

ಶ್ರೇಢಿಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು $a-d, a, a+d$ ಇರಲಿ.

ಆಗ ಅವುಗಳ ಮೊತ್ತ : $(a-d) + a + (a+d) = 15$

ಅಂದರೆ, $3a = 15$ ಅಥವಾ $a = 5$ ಮತ್ತು

ಗುಣಲಬ್ಧ : $(a-d)\,a\,(a+d) = 80$

ಅಂದರೆ, $a(a^2 - d^2) = 80$

ಅಥವಾ $5(5^2 - d^2) = 80$ ($a = 5$ ಆಗಿರುವುದರಿಂದ)

ಅಥವಾ $5^2 - d^2 = \frac{80}{5} = 16$

ಅಥವಾ $25 - d^2 = 16$

ಅಂದರೆ, $d^2 = 25 - 16 = 9$

$\therefore \quad d = \pm 3$

ಆದ್ದರಿಂದ, ಈಗ $a = 5$ ಮತ್ತು $d = 3$ ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೆ

$5-3, 5, 5+3$ ಅಂದರೆ, 2, 5, 8 ಬೇಕಾದ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಆಗಿರುತ್ತವೆ. ಒಂದು ವೇಳೆ $a = 5$ ಜೊತೆಯಲ್ಲಿ $d = -3$ ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೆ, 8, 5, 2 ಎಂದು ಅವೇ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಬರುತ್ತವೆ.

6. ಒಂದು ಶ್ರೇಢಿಯ m ಪದಗಳ ಮೊತ್ತಕ್ಕೂ ಮತ್ತು n ಪದಗಳ ಮೊತ್ತಕ್ಕೂ ಇರುವ ಪ್ರಮಾಣ $m^2 : n^2$ ಆದರೆ m ನೆಯ ಪದಕ್ಕೂ nನೆಯ ಪದಕ್ಕೂ ಇರುವ

ಪ್ರಮಾಣ $2m-1:2n-1$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ. ಹಾಗೂ ಈ ಶ್ರೇಢಿ *A.P.* ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

ಶ್ರೇಢಿಯ ಮೊದಲ ಪದವು $T_1 = a$ ಆಗಿರಲಿ; n ಪದಗಳ ಮೊತ್ತವನ್ನು S_n ಎಂದು ಸೂಚಿಸಿದರೆ, $S_m : S_n = m^2 : n^2$ ಎಂದು ಕೊಟ್ಟಿದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ $m=1$, $n=2$ ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೆ $S_1/S_2 = 1/4$ ಎಂದಾಗುವುದು; ಅಂದರೆ

$$S_2 = 4S_1$$

ಆದರೆ, $S_1 = T_1 = a$

$$\therefore \; S_2 = 4a$$

ಈಗ, $T_2 = S_2 - S_1 = 4a - a = 3a$

ಆದ್ದರಿಂದ, $T_2 - T_1 = 3a - a = 2a$

ಅಂತೆಯೇ, $\dfrac{S_3}{S_2} = \dfrac{9}{4}$ ಅಥವಾ $S_3 = \dfrac{9}{4}\,S_2 = 9a$

ಆದ್ದರಿಂದ, $T_3 = S_3 - S_2 = 9a - 4a = 5a$

ಮತ್ತು $T_3 - T_2 = 5a - 3a = 2a$

ಅಂದರೆ, $T_3 - T_2 = T_2 - T_1 = 2\,a (= d)$

ಎಂಬುದು ಸಾಮಾನ್ಯ ವ್ಯತ್ಯಾಸ.

ಆದ್ದರಿಂದ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಶ್ರೇಢಿಯು ಒಂದು *A.P.* ಆಗಿದೆ. ಈಗ

$$\frac{T_m}{T_n} = \frac{a+(m-1)d}{a+(n-1)d} = \frac{a+(m-1)2a}{a+(n-1)2a} = \frac{2m-1}{2n-1}$$

ಎಂಬ ಪದಗಳ ಪ್ರಮಾಣವು ದೊರೆಯುತ್ತದೆ. ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಸಮಾಂತರ ಶ್ರೇಢಿಯನ್ನು a, $3a$, $5a$ ..... ಎಂದು ಬರೆಯಬಹುದು.

ಅಭ್ಯಾಸ –2.1

1. ಕೆಳಗಿನವುಗಳಲ್ಲಿ ಸಮಾಂತರ ಶ್ರೇಢಿಗಳು ಯಾವುವು ಎಂದು ಕಂಡುಹಿಡಿದು ಅವುಗಳ ಮುಂದಿನ ಎರಡು ಪದಗಳನ್ನು ಬರೆಯಿರಿ.

   (i) $-5, -2, 1, 4, 7,$ ....

   (ii) $5, 7, 4, 1, 2,$ ....

   (iii) $x, 2x, 3x, 4x,$ ....

   (iv) $x-2, x, x+2, x+4,$ ....

(v) $x,\ x+2,\ x+3,\ x+5, ...$

(vi) $4.5,\ 4.3,\ 4.1,\ 3.9, ...$

2. ಈ ಕೆಳಗಿನ *A.P.*ಗಳಲ್ಲಿ 8ನೆಯ ಮತ್ತು 22ನೆಯ ಪದಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
   (i) $3,\ 5,\ 7,\ 9, ...$
   (ii) $-8,\ -6,\ -4,\ -2, ...$
   (iii) $-2y,\ -y,\ 0,\ y, ...$
   (iv) $64,\ 62,\ 60, ...$
   (v) $4,\ 4\frac{1}{4},\ 4\frac{2}{7},\ 4\frac{3}{7}, ...$

3. ಕೆಳಗಿನ ಸಮಾಂತರ ಶ್ರೇಢಿಗಳಲ್ಲಿ ನಮೂದಿಸಿರುವ ಪದಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
   (i) $-3,\ -6,\ -9,\ -12$ .... 21ನೇ ಪದ
   (ii) $8,\ 6,\ 4,\ 2,\ 0,$ .... 12 ನೇ ಪದ
   (iii) $x-y,\ 2x,\ 3x+y,$ .... 10ನೇ ಪದ
   (iv) $3-p,\ 5,\ 7+p,$ .... 11ನೇ ಪದ
   (v) $-16,\ -11,\ -6,\ -1,$ .... 8ನೇ ಪದ
   (vi) $10,\ 15,\ 20,\ 25,$ .... nನೇ ಪದ

4. ಈ ಕೆಳಗಿನ ಸಮಾಂತರ ಶ್ರೇಢಿಗಳಲ್ಲಿ ಎಷ್ಟು ಪದಗಳಿವೆ?
   (i) $10,\ 12,\ 14, ..., 40$
   (ii) $7,\ 10,\ 13, ..., 31$
   (iii) $x-3,\ 2x+1, ..., 10x+33$
   (iv) $p-q,\ 2p,\ 3p+q, ..., 18p+16q$

5. (i) ಒಂದು ಸಮಾಂತರ ಶ್ರೇಢಿಯ 5ನೆಯ ಪದ 30 ಮತ್ತು 30ನೆಯ ಪದ 100 ಇದ್ದರೆ, 20ನೆಯ ಪದವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
   (ii) ಒಂದು ಸಮಾಂತರ ಶ್ರೇಢಿಯ 8ನೆಯ ಪದ -20 ಮತ್ತು 15ನೆಯ ಪದ -41 ಆದರೆ, 30ನೆಯ ಪದವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

6. ಒಂದು *A.P.*ಯ ಮೂರು ಪದಗಳ ಮೊತ್ತ 21 ಮತ್ತು ಅವುಗಳ ವರ್ಗಗಳ ಮೊತ್ತ 155 ಆದರೆ ಆ ಶ್ರೇಢಿಯನ್ನು ಬರೆಯಿರಿ.

7. 12, 10, 8 ... ಎಂಬ ಸಮಾಂತರ ಶ್ರೇಢಿಯ ಎಷ್ಟು ಪದಗಳ ಮೊತ್ತ 30 ಆಗುವುದು?

8. 2000ದಿಂದ 3000ದವರೆಗೆ ಇರುವ 7ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಲ್ಪಡುವ ಎಲ್ಲಾ ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳ ಮೊತ್ತ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

9. 2+5+8+...... ಶ್ರೇಢಿಯಲ್ಲಿ S_{12}, S_{20} ಮತ್ತು S_{30} ಇವುಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

10. (i) n ಸರಿ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮೊತ್ತವೆಷ್ಟು?

(ii) $2n$ ಸರಿ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮೊತ್ತವೆಷ್ಟು?

(iii) n ಬೆಸ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮೊತ್ತಕ್ಕೂ $2n$ ಸರಿ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮೊತ್ತಕ್ಕೂ ಇರುವ ವ್ಯತ್ಯಾಸವೆಷ್ಟು?

11. ಒಂದು ಸಮಾಂತರ ಶ್ರೇಢಿಯ nನೆಯ ಪದ $2n-1$ ಆಗಿದೆ. ಈ ಶ್ರೇಢಿಯ 30 ಪದಗಳ ಮೊತ್ತವೆಷ್ಟು?

12. 500 ರಿಂದ 900 ರವರೆಗಿನ ಬೆಸ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮೊತ್ತವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

13. 20 ರಿಂದ 350 ರವರೆಗೆ ಎಷ್ಟು ಸಮ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿವೆ? ಮತ್ತು ಈ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮೊತ್ತವೆಷ್ಟು?

14. ಒಂದು A.P.ಯ ಮೂರು ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮೊತ್ತ 36 ಮತ್ತು ಆ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧ 1620 ಆಗಿರುವುದು. ಆ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

15. ಒಂದು ಸಮಾಂತರ ಶ್ರೇಢಿಯಲ್ಲಿರುವ 4 ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮೊತ್ತ 40 ಮತ್ತು ಅವುಗಳ ವರ್ಗಗಳ ಮೊತ್ತ 580 ಆದರೆ ಆ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಯಾವುವು?

16. ಒಂದು A.P.ಯ ನಾಲ್ಕು ಪದಗಳ ಮೊತ್ತ 36. ಮೊದಲನೆಯ ಮತ್ತು ನಾಲ್ಕನೆಯ ಪದಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧಕ್ಕೂ 2ನೇ ಮತ್ತು 3ನೇ ಪದಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧಕ್ಕೂ ಇರುವ ಪ್ರಮಾಣ 9 : 10 ಆದರೆ ಆ ಪದಗಳು ಯಾವುವು?

17. $\frac{1}{x+y}$, $\frac{1}{z+x}$, $\frac{1}{y+z}$ ಗಳು A.P. ಆಗಿದ್ದರೆ , z^2, y^2, x^2 ಗಳು A.P. ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

18. ಒಂದು ಸಮಾಂತರ ಶ್ರೇಢಿಯ p, q ಮತ್ತು r ನೆಯ ಪದಗಳು x, y ಮತ್ತು z ಆಗಿದ್ದರೆ, $(y-z)p + (z-x)q + (x-y)r = 0$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

19. ನಾಲ್ಕು ಸಂಖ್ಯೆಗಳುಳ್ಳ ಸಮಾಂತರ ಶ್ರೇಢಿಯ ಮೊದಲ ಮೂರು ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮೊತ್ತ 45 ಮತ್ತು ಕೊನೆಯ ಮೂರು ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮೊತ್ತ 51 ಆದರೆ, ಆ ನಾಲ್ಕು ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

20. ಒಂದು ಸಮಾಂತರ ಶ್ರೇಢಿಯ x ನೆಯ ಪದ y ಆಗಿಯೂ, yನೆಯ ಪದ x ಆಗಿಯೂ ಇದ್ದರೆ, $(x+y)$ ನೆಯ ಪದ 0 ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

21. ಒಂದು ಸಮಾಂತರ ಶ್ರೇಢಿಯಲ್ಲಿ $2x$ ಎನ್ನುವುದು pನೆಯ ಪದ ಮತ್ತು $3y$ ಎನ್ನುವುದು qನೆಯ ಪದವಾಗಿದ್ದರೆ ಆ ಶ್ರೇಢಿಯ rನೆಯ ಪದ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

22. l, m, n ಗಳು 2ನೆಯ, 9ನೆಯ ಮತ್ತು 11ನೆಯ ಪದಗಳಾಗಿ ಉಳ್ಳ ಸಮಾಂತರ ಶ್ರೇಢಿಯಲ್ಲಿ $2l + 7n = 9m$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

23. ಒಂದು ಸಮಾಂತರ ಶ್ರೇಢಿಯಲ್ಲಿನ 5 ಪದಗಳ ಮೊತ್ತ 60 ಆಗಿದೆ. ಇದರ 2ನೆಯ, 3ನೆಯ ಮತ್ತು 4ನೆಯ ಪದಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧ 1620 ಆಗಿದ್ದರೆ ಆ ಶ್ರೇಢಿಯ 5 ಪದಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

24. ಒಬ್ಬ ವ್ಯಕ್ತಿಯು ತನ್ನ ಮೊದಲನೆಯ ವರ್ಷದ ಸೇವಾವಧಿಯಲ್ಲಿ 800 ರೂ.ಗಳನ್ನು ಮತ್ತು ನಂತರದ ವರ್ಷಗಳಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿವರ್ಷವೂ ಹಿಂದಿನ ವರ್ಷಕ್ಕಿಂತ 200ರೂ.ಗಳನ್ನು ಹೆಚ್ಚಾಗಿಯೂ ಉಳಿತಾಯ ಮಾಡುವನು. 10 ವರ್ಷಗಳಲ್ಲಿ ಆತನ ಉಳಿತಾಯ ಎಷ್ಟಾಗುವುದು?

25. ನಾನು ತಿಂಗಳಿಗೆ 100 ರೂ. ಉಳಿತಾಯ ಪ್ರಾರಂಭಿಸಿ ಪ್ರತಿತಿಂಗಳೂ 20 ರೂ ಹೆಚ್ಚುವರಿಯಂತೆ ಉಳಿತಾಯ ಮಾಡುತ್ತ ಬಂದರೆ, 5800 ರೂ.ಗಳು ಉಳಿಸಲು ಎಷ್ಟು ತಿಂಗಳುಗಳು ಆಗುವುವು?

26. ಒಂದು ಭಿನ್ನರಾಶಿಯನ್ನು ಒಳಗೊಂಡ ಶ್ರೇಢಿಯನ್ನು ಕೆಳಕಂಡಂತೆ ಬರೆದಿದೆ:
$\frac{1}{1}, \frac{1+3}{1+4}, \frac{1+3+5}{1+4+7}, \frac{1+3+5+7}{1+4+7+10}$
ಈ ಶ್ರೇಢಿಯ n ನೆಯ ಪದವನ್ನು ಸುಲಭವಾಗಿ ಹೇಗೆ ಬರೆಯಬಹುದು?

27. ಒಂದು ತೋಟದಲ್ಲಿ ಒಟ್ಟು 2427 ಹಣ್ಣಿನ ಗಿಡಗಳಿವೆ. ಪ್ರತಿ ಸಾಲಿನಲ್ಲಿರುವ ಗಿಡಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ ಹಿಂದಿನ ಸಾಲಿನಲ್ಲಿ ಇರುವ ಗಿಡಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಗಿಂತ ಒಂದು ನಿರ್ದಿಷ್ಟಸಂಖ್ಯೆಯಲ್ಲಿ ಹೆಚ್ಚು ಇದೆ. ಮೊದಲನೆಯ ಸಾಲಿನಲ್ಲಿ 77 ಮತ್ತು ಕೊನೆಯ ಸಾಲಿನಲ್ಲಿ 157 ಗಿಡಗಳಿದ್ದರೆ ಒಟ್ಟು ಎಷ್ಟು ಸಾಲು ಗಿಡಗಳಿವೆ?

2.3 ಗುಣೋತ್ತರ ಶ್ರೇಢಿಗಳು

ಒಂದು ಶ್ರೇಢಿಯಲ್ಲಿ (ಮೊದಲನೆಯ ಪದದ ವಿನಾ) ಯಾವುದೇ ಪದವನ್ನು ಅದರ ಹಿಂದಿನ ಪದದಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದಾಗ ಒಂದು ಸ್ಥಿರ ಸಂಖ್ಯೆ ಬಂದರೆ ಆ ಶ್ರೇಢಿಗೆ **ಗುಣೋತ್ತರ ಶ್ರೇಢಿ** ಎಂದು ಹೆಸರು. ಈ ಸ್ಥಿರ ಸಂಖ್ಯೆಗೆ **ಸಾಮಾನ್ಯ ಪ್ರಮಾಣ** ಎನ್ನುವರು.

ಇನ್ನು ಮುಂದೆ ಇಂತಹ ಶ್ರೇಢಿಯನ್ನು ಸಂಕ್ಷೇಪವಾಗಿ *G.P* (ಅಂದರೆ Geometric Progression) ಎಂದು ಬರೆಯಲಾಗಿದೆ.

ಒಂದು *G.P.* ಯಲ್ಲಿ $\frac{\text{ಯಾವುದಾದರೂ ಪದ}}{\text{ಅದರ ಹಿಂದಿನ ಪದ}}$ = ಸ್ಥಿರಸಂಖ್ಯೆ

ಉದಾಹರಣೆ : (i) 1, 3, 9, 27 ...... ಒಂದು $G.P.$

ಇದರ ಸಾಮಾನ್ಯ ಪ್ರಮಾಣ $= 3$.

(ii) $\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{8}$.......... ಒಂದು $G.P.$

ಇದರ ಸಾಮಾನ್ಯ ಪ್ರಮಾಣ $= -\frac{1}{2}$

ಒಂದು ಗುಣೋತ್ತರ ಶ್ರೇಢಿಯ n ನೆಯ ಪದ

ಒಂದು ಗುಣೋತ್ತರ ಶ್ರೇಢಿಯಲ್ಲಿ a ಯು ಮೊದಲನೆಯ ಪದವಾಗಿದ್ದು r ಸಾಮಾನ್ಯ ಪ್ರಮಾಣವಾಗಿದ್ದಾಗ ಆ ಶ್ರೇಢಿಯನ್ನು

a, ar, ar^2, ar^3,......... ಎಂದು ಬರೆಯಬಹುದು.

ಇದರಲ್ಲಿ, 2ನೆಯ ಪದ $= ar = ar^{2-1}$

3ನೆಯ ಪದ $= ar^2 = ar^{3-1}$

4ನೆಯ ಪದ $= ar^3 = ar^{4-1}$

..

..

..

ಇದೇ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ, n ನೆಯ ಪದ $= ar^{n-1}$

ಆದ್ದರಿಂದ, n ನೆಯ ಪದವನ್ನು T_n ಎಂದು ಸೂಚಿಸಿದರೆ,

$$\boxed{T_n = ar^{n-1}}$$

ಎಂದಾಗುವುದು.

ಉದಾಹರಣೆಗಳು

1. ಒಂದು $G.P.$ಯ ಮೊದಲನೆಯ ಪದ 2 ಮತ್ತು ಸಾಮಾನ್ಯ ಪ್ರಮಾಣ 3 ಆದರೆ 6ನೆಯ ಪದ ಎಷ್ಟು?

   ಇಲ್ಲಿ, $a = 2, r = 3$, ಮತ್ತು $n = 6$

   ಸೂತ್ರದ ಪ್ರಕಾರ, $T_n = ar^{n-1}$

   $\therefore \; T_6 = 2.3^{6-1}$

   $= 2.3^5 = 486$

   ಅಂದರೆ, 6ನೆಯ ಪದ $= 486$

2. ಒಂದು $G.P.$ಯ 5ನೆಯ ಪದ 81 ಮತ್ತು 3ನೆಯ ಪದ 36 ಆಗಿವೆ. ಆ $G.P.$ಯನ್ನು ಬರೆಯಿರಿ.

ಇಲ್ಲಿ 5ನೆಯ ಪದ $= ar^4 = 81$ .... (i)

3ನೆಯ ಪದ $= ar^2 = 36$ .... (ii)

ಫಲಿತಾಂಶ (i) ನ್ನು (ii) ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದಾಗ

$$\frac{ar^4}{ar^2} = \frac{81}{36}$$

ಎಂದಾಗುತ್ತದೆ. ಅಂದರೆ

$$r^2 = \frac{81}{36}$$

$$\therefore \quad r = \pm\frac{9}{6} = \pm\frac{3}{2}$$

(i) ಅಥವಾ (ii) ರಲ್ಲಿ $r = \frac{3}{2}$ ಆದೇಶಿಸಿದಾಗ $a = 16$ ಆಗುವುದು.

ಆದ್ದರಿಂದ, ಶ್ರೇಢಿಯು 16, 24, 36, 54, 81 .... ಆಗಿದೆ.

ಶ್ರೇಢಿಯಲ್ಲಿ $r = -\frac{3}{2}$ ಆದೇಶಿಸಿದರೆ ಶ್ರೇಢಿಯು 16, –24, 36, –54, 81 .... ಎಂದಾಗುತ್ತದೆ.

ಗುಣೋತ್ತರ ಶ್ರೇಢಿಯಲ್ಲಿ ಮೊದಲ n ಪದಗಳ ಮೊತ್ತ

ಶ್ರೇಢಿಯ ಮೊದಲ ಪದ a, ಸಾಮಾನ್ಯ ಪ್ರಮಾಣ r ಮತ್ತು ಪದಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ n ಇರಲಿ. n ಪದಗಳ ಮೊತ್ತವನ್ನು S_n ಎಂದು ಸೂಚಿಸಿದೆ. ಆಗ

$$S_n = a + ar + ar^2 + ar^3 + ...+ ar^{n-1} \quad ... (1)$$

ಸಮೀಕರಣ (1) ನ್ನು r ನಿಂದ ಗುಣಿಸಿದಾಗ

$$rS_n = ar + ar^2 + ar^3 + ... + ar^{n-1} + ar^n \quad ... (2)$$

ಎಂದಾಗುವುದು. ಈಗ (1) ರಲ್ಲಿ (2)ನ್ನು ಕಳೆದರೆ

$$S_n - rS_n = a - ar^n$$

ಎಂದು ದೊರೆಯುವುದು.

$$\therefore \quad S_n(1-r) = a(1-r^n)$$

ಅಥವಾ $\boxed{S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r}}$ $(r \neq 1)$

ಗಮನಿಸಿ : (i) $r > 1$ ಆದರೆ ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ ಈ ಮೇಲಿನ ಸೂತ್ರವನ್ನು

$$S_n = \frac{a(r^n - 1)}{(r-1)}$$ ಎಂದು ಬರೆಯಬಹುದು.

(ii) $r = 1$ ಆದಾಗ

$S_n = a + a + a + ...$ ಇತ್ಯಾದಿ n ಪದಗಳು

ಅಂದರೆ, $S_n = na$.

ಉದಾಹರಣೆ : $5 + 10 + 20 + 40 + ...$ ಇತ್ಯಾದಿ 10 ಪದಗಳನ್ನುಳ್ಳ $G.P.$ಯ ಮೊತ್ತವೇನು?

ಇಲ್ಲಿ $a = 5$, $r = 2$ ಮತ್ತು $n = 10$.

$$S_n = \frac{a(r^n-1)}{r-1}$$

ಎಂಬ ಸೂತ್ರವನ್ನು ಬಳಸಿದಾಗ

$$S_{10} = \frac{5(2^{10}-1)}{2-1}$$

$$= 5(2^{10}-1)$$

ಎಂದಾಗುವುದು.

$\therefore S_{10} = 5115.$

2.4.1 ಅಪರಿಮಿತ ಪದಗಳ ಗುಣೋತ್ತರ ಶ್ರೇಢಿಯ ಮೊತ್ತ

ಒಂದು ಗುಣೋತ್ತರ ಶ್ರೇಢಿಯಲ್ಲಿ $a, ar, ar^2, ...ar^{n-1}$ ಎಂಬುವು ಅದರ n ಪದಗಳು. ಈ ಶ್ರೇಢಿಯ ಮೊತ್ತ S ಆದರೆ

$$S = \frac{a(1-r^n)}{1-r}$$

ಎಂಬ ಸೂತ್ರವನ್ನು ಈ ಹಿಂದೆಯೇ ಸಾಧಿಸಿದ್ದೇವೆ.

$$\therefore \; S = \frac{a}{1-r} - \frac{ar^n}{1-r}$$

ಎಂದು ಬರೆಯಬಹುದು.

ಆದರೆ, $-1 < r < 1$ ಅಂದರೆ $|r| < 1$ ಆದಾಗ, $r^2, r^3, r^4 ....$ ಸತತವಾಗಿ ಅತಿ ಸಣ್ಣ ಸಂಖ್ಯೆಯಾಗುತ್ತಾ ಬರುತ್ತದೆ. ಪದಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ (n) ಹೆಚ್ಚುತ್ತಾ ಹೋದಂತೆಲ್ಲಾ r^n ನ ಬೆಲೆಯು ಅತೀ ಕಡಿಮೆಯಾಗುತ್ತಾ ಬರುವುದು n ನ್ನು ಅತೀ ಹೆಚ್ಚಿನ ಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಿ ತೆಗೆದುಕೊಂಡಾಗ r^n ಬೆಲೆ ತೀರಾ ಕಡಿಮೆಯಾಗಿ ಶೂನ್ಯಕ್ಕೆ ಸಮೀಪವಾಗುವುದು ಎಂದು ಹೇಳಬಹುದು. ಆ ಸಂದರ್ಭದಲ್ಲಿ ಅಪರಿಮಿತ ಗುಣೋತ್ತರ ಶ್ರೇಢಿಯ "ಮೊತ್ತವು" $\frac{a}{1-r}$ ಆಗುತ್ತದೆ. ಮತ್ತು ಅದನ್ನು S_∞ ಎಂದು ಸೂಚಿಸುತ್ತೇವೆ.

ಅಂದರೆ, $\boxed{S_\infty = \frac{a}{1-r}}$, $(-1 < r < 1)$

ಎಂದು ಸೂಚಿಸುತ್ತೇವೆ.

ಉದಾಹರಣೆಗಳು

1. $S = \frac{a}{1-r} - \frac{ar^n}{1-r}$ ... (i)

ಎಂಬ ಸೂತ್ರದಲ್ಲಿ

$$r = \frac{1}{10}$$

ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಂಡಾಗ

$n = 2$ ಆದರೆ, $r^2 = \frac{1}{100}$

$n=3$ ಆದರೆ, $r^3 = \frac{1}{1000}$

$n = 4$ ಆದರೆ, $r^4 = \frac{1}{10,000}$

ಹೀಗೆ, n ನ ಬೆಲೆ ಹೆಚ್ಚಿದಂತೆಲ್ಲಾ r^n ನ ಬೆಲೆ ಕಡಿಮೆ ಆಗುತ್ತಾ ಹೋಗುತ್ತದೆ. ಹೀಗೆ ಆದಾಗ $r^n \to 0$ ಅಂದರೆ, ಸೂತ್ರ (i) ರಲ್ಲಿ ಎರಡನೆಯ ಪದ 0 ಆಗುವುದು.

$$\therefore \; S_\infty = \frac{a}{1-r} = \frac{a}{1-1/10} = \frac{10}{9}a$$

2. $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + ...$ ಎಂಬ ಅಪರಿಮಿತ ಶ್ರೇಢಿಯ ಮೊತ್ತವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಇಲ್ಲಿ $a = 1$ ಮತ್ತು $r = \frac{1}{2} < 1$ ಆದ್ದರಿಂದ ಈ ಶ್ರೇಢಿಯ ಅಪರಿಮಿತ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮೊತ್ತ

$S_\infty = \frac{a}{1-r} = \frac{1}{1-1/2} = \frac{1}{1/2} = 2$ ಆಗಿರುತ್ತದೆ.

3. ಒಂದು ಲೋಲಕವು ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಆವರ್ತನದಲ್ಲಿಯೂ ಹಿಂದಿನ ಆವರ್ತಕ್ಕಿಂತ ⅘ ರಷ್ಟು ಉದ್ದ ಚಲಿಸಿದರೆ ಮತ್ತು ಮೊದಲನೆಯ ಆವರ್ತದಲ್ಲಿ 25 ಸೆಂ.ಮೀ. ಚಲಿಸಿದರೆ, ಲೋಲಕವು ವಿಶ್ರಾಂತಿ ಸ್ಥಿತಿಗೆ ಬರುವ ಮೊದಲು ಎಷ್ಟು ದೂರ ಚಲಿಸುತ್ತದೆ?

ಮೊದಲನೆಯ ಆವರ್ತದಲ್ಲಿ ಚಲಿಸಿದ್ದು $a = 25$ ಸೆಂ.ಮೀ.

ಎರಡನೆಯ ಆವರ್ತದಲ್ಲಿ $ar = 25 \times \frac{4}{5} = 20$ ಸೆಂ.ಮೀ.

ಮೂರನೆಯ ಆವರ್ತದಲ್ಲಿ $ar^2 = 20 \times \frac{4}{5} = 16$ ಸೆಂ.ಮೀ.

ಆದ್ದರಿಂದ, 25, 20, 16 .... ಈ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮೊತ್ತವೇ ಲೋಲಕವು ಚಲಿಸಿದ ಒಟ್ಟು ದೂರ. ಆದರೆ, ಈ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಒಂದು ಅಪರಿಮಿತ *G.P.* ಆಗಿದೆ.

ಇಲ್ಲಿ, $a = 25, r = \frac{16}{20} = \frac{20}{25} = \frac{4}{5}$

$\therefore \quad S_\infty = \frac{a}{1-r} = \frac{25}{1-4/5} = \frac{25}{5-4}(5) = 125$ ಸೆಂ.ಮೀ.

ಆದ್ದರಿಂದ, ಲೋಲಕವು ಚಲಿಸಿದ ದೂರ $= 125$ ಸೆಂ.ಮೀ.

2.4.2. ಅಪರಿಮಿತ ಪುನರಾವೃತ್ತಿ ಹೊಂದುವ ದಶಮಾಂಶ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು

ಅಪರಿಮಿತ ಪುನರಾವೃತ್ತಿ ಹೊಂದುವ ದಶಮಾಂಶ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾಗಿರುತ್ತವೆ.

ಉದಾಹರಣೆ : $4.2\dot{8}\dot{3}$ ಎಂಬ ಅಪರಿಮಿತ ಪುನರಾವೃತ್ತಿ ಹೊಂದುವ ದಶಮಾಂಶ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಿ ಪರಿವರ್ತಿಸಿ.

ಈಗ, $4.2\dot{8}\dot{3} = 4.2838383.........$

$$= 4 + \frac{2}{10} + \frac{8}{10^2} + \frac{3}{10^3} + \frac{8}{10^3} + \frac{3}{10^5} + \frac{8}{10^6} + \;..........$$

ಎಂದು ಬರೆಯಬಹುದು. ಆದರೆ

$$\frac{8}{10^2} + \frac{8}{10^4} + \frac{8}{10^6} + ...$$

ಮತ್ತು

$$\frac{3}{10^3} + \frac{3}{10^5} + ...$$

ಎಂಬುವು ಎರಡು ಅಪರಿಮಿತ *G.P.*ಗಳಾಗಿವೆ.

ಈ ಎರಡು ಅಪರಿಮಿತ ಗುಣೋತ್ತರ ಶ್ರೇಢಿಗಳ ಮೊತ್ತಗಳು ಈ ರೀತಿ ಇವೆ :

$$\frac{8}{10^2} + \left(1 - \frac{1}{10^2}\right) = \frac{8}{99}$$

ಮತ್ತು $\frac{3}{10^3} + \left(1 - \frac{1}{10^2}\right) = \frac{3}{990}$

$$\therefore \quad 4.2\dot{8}\dot{3} = 4 + \frac{2}{10} + \frac{8}{99} + \frac{3}{990}$$

$$= 4 + \frac{198 + 80 + 3}{990}$$

$$= 4\frac{281}{990}$$

ಇದು ಒಂದು ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆ.

ಸೂಚನೆಗಳು:

(i) ಅಪರಿಮಿತ ಗುಣೋತ್ತರ ಶ್ರೇಢಿಯ ಮೊತ್ತ $|r| > 1$ ಆದಾಗ ಏನಾಗುವುದೆಂದು ವಿಚಾರ ಮಾಡೋಣ.

$|r| > 1$ (ಅಂದರೆ $r > 1$ ಅಥವಾ $r < -1$) $r^2, r^3, r^4 .... r^n$ ಗಳ ಬೆಲೆ ಹೆಚ್ಚುತ್ತಾ ಹೋಗುವುದರ ಮೂಲಕ r^n ಬೆಲೆಯನ್ನು ಯಾವ ದತ್ತ ಸಂಖ್ಯೆಗಿಂತಲೂ ಹೆಚ್ಚು ಆಗುವಂತೆ ಮಾಡಬಹುದು. ಆಗ

$$S_n = \frac{a(r^n - 1)}{r - 1}$$

ಇದರಲ್ಲಿ r^n ಹೆಚ್ಚುತ್ತಾ ಹೋಗುವುದರಿಂದ ಶ್ರೇಢಿಯ ಅಪರಿಮಿತ ಮೊತ್ತ ಪಡೆಯಲು ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲ, ಶ್ರೇಢಿಯು **ಅಪಸರಣ** ಆಗಿದೆ ಎನ್ನುವರು.

(ii) $r = 1$ ಆದಾಗಲೂ ಶ್ರೇಢಿಯು **ಅಪಸರಣ** ಆಗುವುದರಿಂದ ಶ್ರೇಢಿಯ ಅಪರಿಮಿತ ಮೊತ್ತ ಪಡೆಯಲಾಗುವುದಿಲ್ಲ,

(iii) $r = -1$ ಆದಾಗ ಶ್ರೇಢಿಯ ಮೊತ್ತವು ಪದಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ (n) ಎನ್ನುವುದು ಬೆಸ ಅಥವಾ ಸಮ ಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಿದೆಯೇ ಎನ್ನುವುದರ ಮೇಲೆ ಅವಲಂಬಿತವಾಗಿದೆ:

n ಬೆಸ ಸಂಖ್ಯೆಯಾದರೆ ಶ್ರೇಢಿಯ ಮೊತ್ತ a ಆಗುವುದು.

n ಸಮ ಸಂಖ್ಯೆಯಾದರೆ ಶ್ರೇಢಿಯ ಮೊತ್ತ 0 ಆಗುವುದು.

ಆಗ ಶ್ರೇಢಿಯು **ಡೋಲಾಯಮಾನವಾಗಿದೆ** ಎನ್ನಬಹುದು.

ಆದ್ದರಿಂದ $|r|<1$ ಆದಾಗ ಮಾತ್ರ ಗುಣೋತ್ತರ ಶ್ರೇಢಿಯ ಅಪರಿಮಿತ ಮೊತ್ತ $\frac{a}{1-r}$ ಆಗುವುದು ಮತ್ತು ಈ ಸಂದರ್ಭದಲ್ಲಿ ಶ್ರೇಢಿಯು **ಅಭಿಸರಣ** ಆಗುವುದು.

ಉದಾಹರಣೆಗಳು

1. ಒಂದು G.P.ಯ ಮೊದಲ 3 ಪದಗಳ ಮೊತ್ತ 336 ಮತ್ತು 5, 6, ಮತ್ತು 7 ನೇ ಪದಗಳ ಮೊತ್ತ 21. ಮೂರನೇ ಪದ ಎಷ್ಟು?

ಕೊಟ್ಟಿರುವ ನಿರ್ಬಂಧಗಳ ಪ್ರಕಾರ

$$a + ar + ar^2 = 336 \qquad ...(i)$$

$$ar^4 + ar^5 + ar^6 = 21 \qquad ...(ii)$$

ಅಥವಾ

$$ar^4(1 + r + r^2) = 21$$

ಸಮೀಕರಣ (ii) ರಲ್ಲಿ (i) ನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿದರೆ

$$r^4(336) = 21$$

ಅಥವಾ

$$r^4 = \frac{21}{336} = \frac{1}{16}$$

$$\therefore \ r^2 = \frac{1}{4}$$

ಅಥವಾ

$$r = \pm \frac{1}{2}$$

(i) ರಲ್ಲಿ $r = \frac{1}{2}$ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಆದೇಶಿಸಿದರೆ

$$a\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right) = 336$$

ಎಂದಾಗುತ್ತದೆ.

$$\therefore \ a\left(\frac{7}{4}\right) = 336$$

ಅಥವಾ $a = 192$

ಎಂದು ದೊರೆಯುತ್ತದೆ.

ಈಗ, ಮೂರನೆಯ ಪದ $T_3 = ar^2$

$$= 192.\left(\frac{1}{2}\right)^2 = 48$$

ಸೂಚನೆ **:** $r = -1/2$ ಆದರೆ, $a = 448$, $T_3 = 112$ ಆಗುತ್ತದೆ.

2. ಒಂದು *G.P.*ಯ ಮೊದಲನೆಯ ಮತ್ತು ಮೂರನೆಯ ಪದಗಳ ಮೊತ್ತ 30ಮತ್ತು ಮೊದಲ ನಾಲ್ಕು ಪದಗಳ ಮೊತ್ತ 45. ಈ ಶ್ರೇಢಿಯ n ಪದಗಳ ಮೊತ್ತ ಎಷ್ಟು? ಈ ಶ್ರೇಢಿಯ ಅಪರಿಮಿತ ಪದಗಳ ಮೊತ್ತ ಎಷ್ಟು?

ದತ್ತ ಶ್ರೇಢಿ $a + ar + ar^2 + ar^3 + \ldots\ldots$ ಇರಲಿ. ಆಗ

$$a + ar^2 = 30 \quad \ldots \text{(i)}$$

$$a + ar + ar^2 + ar^3 = 45 \quad \ldots \text{(ii)}$$

ಸಮೀಕರಣ (ii)ನ್ನು $a + ar^2 + r(a + ar^2) = 45$ ಎಂದು ಬರೆಯಬಹುದು.

$$\therefore (a + ar^2)(1 + r) = 45 \quad \ldots \text{(iii)}$$

ಫಲಿತಾಂಶ (iii) ರಲ್ಲಿ (i) ನ್ನು ಬಳಸುವುರಿಂದ

$$30(1 + r) = 45$$

ಅಥವಾ $1 + r = \frac{45}{30} = \frac{3}{2}$

ಅಥವಾ $r = \frac{1}{2}$

ಎಂದಾಗುತ್ತದೆ.

ಈಗ, r ನ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಸಮೀಕರಣ (i)ರಲ್ಲಿ ಆದೇಶಿಸಿ

$$a\left(1 + \frac{1}{4}\right) = 30$$

ಎಂದು ಬರೆಯಬಹುದು.

$$\therefore a = \frac{30 \times 4}{5} = 24$$

ಈ ಶ್ರೇಢಿಯ n ಪದಗಳ ಮೊತ್ತ

$$S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r}$$

$$= \frac{24\left(1-\frac{1}{2^n}\right)}{1-\frac{1}{2}}$$

ಅಥವಾ $S_n = 48\left(1-\frac{1}{2^n}\right)$

ಈ ಶ್ರೇಢಿಯ ಅಪರಿಮಿತ ಪದಗಳ ಮೊತ್ತ

$$S_\infty = \frac{a}{1-r}$$

$$= \frac{24}{1-\frac{1}{2}} = 48.$$

3. ಒಂದು ಗುಣೋತ್ತರ ಶ್ರೇಢಿಯ ಮೂರು ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮೊತ್ತ 42 ಮತ್ತು ಅವುಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧ 512 ಆದರೆ, ಆ ಸಂಖ್ಯೆ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

$G.P$ ಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು $\frac{a}{r}, a, ar$ ಇರಲಿ. ಅವುಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧ

$$\frac{a}{r} \cdot a.\ ar = 512$$

ಅಥವಾ $a^3 = 512$

$$\therefore\ a = 512^{1/3}$$

ಅಥವಾ $a = 8.$

ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮೊತ್ತ

$$\frac{a}{r} + a + ar = a\left(\frac{1}{r} + 1 + r\right) = 42$$

ಅಂದರೆ $\frac{8(1+r+r^2)}{r} = 42$

ಅಥವಾ $8(1+r+r^2) = 42r$

ಅಥವಾ $4(1+r+r^2) = 21r$

ಅಥವಾ $4r^2 - 17r + 4 = 0$

ಅಥವಾ $(r-4)(4r-1) = 0$

$\therefore r = 4$ ಅಥವಾ $r = \frac{1}{4}$

ಆದ್ದರಿಂದ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು $\frac{8}{4}$, 8 , 8(4) ಅಂದರೆ 2, 8, 32 ಆಗಿರುತ್ತವೆ.

[***ಸೂಚನೆ*** : $r = 1/4$ ಆದಾಗ 32, 8, 2 ಎಂದು ಬರುವುವು.]

4. ಒಂದು *G.P*ಯ ಮೊದಲ ನಾಲ್ಕು ಪದಗಳ ಮೊತ್ತಕ್ಕೂ ಮತ್ತು ಮೊದಲ 8 ಪದಗಳ ಮೊತ್ತಕ್ಕೂ ಇರುವ ಪ್ರಮಾಣ 81:82 ಆಗಿದೆ. ಈ *G.P* ಯ ಸಾಮಾನ್ಯ ಪ್ರಮಾಣ ಎಷ್ಟು?

ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಮೊತ್ತಗಳನ್ನು ಪರಿಗಣಿಸಿದಾಗ

$$S_4 = \frac{a(1-r^4)}{1-r}, \qquad S_8 = \frac{a(1-r^8)}{1-r}$$

$$\therefore \quad \frac{S_4}{S_8} = \frac{1-r^4}{1-r^8} = \frac{1-r^4}{(1-r^4)(1+r^4)} = \frac{1}{1+r^4}$$

ಎಂದಾಗುತ್ತದೆ. ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಮೊತ್ತಗಳ ಪ್ರಮಾಣ

$$\frac{1}{1+r^4} = \frac{81}{82}$$

ಅಥವಾ $1 + r^4 = \frac{82}{81}$

ಅಥವಾ $r^4 = \frac{1}{81} \quad \therefore \quad r^2 = \frac{1}{9}$

ಅಥವಾ $r = \pm\frac{1}{3}$

ಎಂದು ಬರುತ್ತದೆ.

5. ಒಂದು $G.P$ಯ n ಪದಗಳ ಮೊತ್ತ $3^n - 1$ ಆದರೆ ಮೊದಲ 3 ಪದಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಗುಣೋತ್ತರ ಶ್ರೇಢಿಯ n ಪದಗಳ ಮೊತ್ತ

$$S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r} = 3^n - 1$$

ಅಥವಾ $a(1-r^n) = (3^n - 1)(1-r)$

$$= (r-1)(1-3^n)$$

ಎಂದಾಗುತ್ತದೆ. ಸಮೀಕರಣದ ಎರಡು ಕಡೆಯ ಪದಗಳನ್ನು ಹೋಲಿಸಿದರೆ

$a = r-1$ ಎಂದೂ, $r = 3$ ಎಂದೂ ಹೇಳಬಹುದು.

ಆದ್ದರಿಂದ, $a = 2$ ಮತ್ತು $r = 3$.

ಅಂದರೆ, ಮೊದಲ 3 ಪದಗಳು 2, 6, 18 ಎಂದು ಆಗುವುವು.

6. $1 + 2 + 4 + \ldots\ldots$ $G.P$ಯ ಎಷ್ಟನೆಯ ಪದ 256 ಆಗುವುದು ?

ಬೇಕಾಗಿರುವ ಪದವು n ನೇ ಪದವಾಗಿರಲಿ. ಆದ್ದರಿಂದ

$$ar^{n-1} = 256$$

ಇಲ್ಲಿ $a = 1,\ r = 2$

$$\therefore\ 1.(2)^{n-1} = 256$$

ಅಥವಾ $2^{n-1} = 2^8$

$\therefore\ n - 1 = 8$

ಅಥವಾ $n = 9$

ಅಂದರೆ ಶ್ರೇಢಿಯ 9ನೆಯ ಪದ 256 ಆಗುವುದು.

7. a, b, c, d ಗಳು $G.P$ ಯಲ್ಲಿದ್ದರೆ $(a^3+b^3)^{-1}, (b^3+c^3)^{-1}, (c^3+d^3)^{-1}$ ಗಳೂ ಸಹ $G.P$ ಯಲ್ಲಿವೆ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ ಮತ್ತು ಈ ಎರಡನೆಯ $G.P$ ಯ n ಪದಗಳ ಮೊತ್ತವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

$G.P$ ಯ ನಾಲ್ಕು ಪದಗಳು a, b, c, d ಗಳು

a, ar, ar^2, ar^3, ಆಗಿರಲಿ.

ಇವೆರಡನ್ನೂ ಹೋಲಿಸಿದರೆ, $b = ar$ ...(i)

$$c = ar^2 \quad ...(ii)$$

$$d = ar^3 \quad ...(iii)$$

ಎಂದು ದೊರೆಯುತ್ತದೆ. ಈಗ

$$\frac{1}{a^3+b^3}, \frac{1}{b^3+c^3}, \frac{1}{c^3+d^3}$$

ಪದಗಳಲ್ಲಿ b, c, d ಗಳಿಗೆ (i), (ii), (iii) ಗಳಿಂದ ಆದೇಶಿಸಿದಾಗ

$$\frac{1}{a^3+b^3} = \frac{1}{a^3+a^3r^3} = \frac{1}{a^3(1+r^3)} \quad ...(1)$$

$$\frac{1}{b^3+c^3} = \frac{1}{a^3r^3+a^3r^6} = \frac{1}{a^3r^3(1+r^3)} \quad ...(2)$$

$$\frac{1}{c^3+d^3} = \frac{1}{a^3r^6+a^3r^9} \Rightarrow \frac{1}{a^3r^6(1+r^3)} \quad ...(3)$$

ಸಮೀಕರಣ (1) ಮತ್ತು (2) ರಿಂದ

$$\frac{1}{b^3+c^3} \div \frac{1}{a^3+b^3} = \frac{1}{a^3(1+r^3)r^3} \times a^3(1+r^3) = \frac{1}{r^3}$$

ಎಂಬುದಾಗಿ ದೊರೆಯುತ್ತದೆ. ಹೀಗೆಯೇ (2) ಮತ್ತು (3)ರಿಂದ

$$\frac{1}{c^3+d^3} \div \frac{1}{b^3+c^3} = \frac{1}{r^3}$$

ಅಂದರೆ

$$\frac{1}{a^3+b^3}, \frac{1}{b^3+c^3}, \frac{1}{c^3+d^3}$$

ಪದಗಳು ಒಂದು ಸಾಮಾನ್ಯ ಪ್ರಮಾಣವನ್ನು ಹೊಂದಿವೆ.

ಆದ್ದರಿಂದ ಇವು ಒಂದು ಗುಣೋತ್ತರ ಶ್ರೇಢಿಯಲ್ಲಿವೆ.

ಶ್ರೇಢಿಯ ಮೊದಲ n ಪದಗಳ ಮೊತ್ತ

$$S_n = \frac{1}{a^3+b^3}\frac{\left[1-\left(\frac{1}{r^3}\right)^n\right]}{\left(1-\frac{1}{r^3}\right)}$$

$$= \frac{1}{a^3+a^3r^3}\frac{(r^{3n}-1)}{r^{3n}(r^3-1)}r^3$$

$$= \frac{r^{3-3n}(r^{3n}-1)}{a^3(r^3+1)(r^3-1)} = \frac{r^{3(1-n)}(r^{3n}-1)}{a^3(r^6-1)}$$

8. ಕೆಳಗಿನ ಶ್ರೇಢಿಯ n ಪದಗಳ ಮೊತ್ತವನ್ನು ಮತ್ತು ಸಾಧ್ಯವಿದ್ದಲ್ಲಿ ಅಪರಿಮಿತ ಪದಗಳ ಮೊತ್ತವನ್ನೂ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

$$1+\left(1+\frac{1}{2}\right)+\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right)+\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}\right)+\ ....$$

ಈ ಶ್ರೇಢಿಯ nನೆಯ ಆವರಣದಲ್ಲಿರುವ ಪದಗಳು ಒಂದು $G.P$ ಆಗಿದೆ.

ಈ $G.P.$ಯ ಮೊದಲನೇ ಪದ 1 ಮತ್ತು ಸಾಮಾನ್ಯ ಪ್ರಮಾಣ $\frac{1}{2}$. ಈ n ನೆಯ ಆವರಣದಲ್ಲಿ n ಪದಗಳಿವೆ. ದತ್ತ ಶ್ರೇಢಿಯ n ನೇ ಪದವು (T_n) n ನೆಯ ಆವರಣವಾಗಿದೆ. ಅಂದರೆ

$$T_n = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+.....n \text{ ಪದಗಳು}$$

$$= \frac{1\left(1-\frac{1}{2^n}\right)}{1-\frac{1}{2}} = 2\left(1-\frac{1}{2^n}\right)$$

ದತ್ತ ಶ್ರೇಢಿಯ n ಪದಗಳ ಮೊತ್ತ S_n ಆದರೆ

$$S_n = \sum T_n$$

$$= \sum 2\left(1-\frac{1}{2^n}\right)$$

$$= 2n - 2\Sigma\frac{1}{2^n}$$

$$= 2n - 2\left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots\ldots + \frac{1}{2^n}\right]$$

ಆವರಣದೊಳಗಿರುವ ಪದಗಳು $G.P$ ಯನ್ನು ಸೂಚಿಸುತ್ತದೆ.

$$\therefore\ S_n = 2n - 2\cdot\frac{1}{2}\left[1 + \frac{1}{2} + \ldots\ldots + \frac{1}{2^{n-1}}\right]$$

$$= 2n - \left[\frac{1 - \frac{1}{2^n}}{1 - \frac{1}{2}}\right]$$

ಅಂದರೆ $\quad S_n = 2n - 2\left[1 - \frac{1}{2^n}\right]$

$$= 2n - 2 + \frac{2}{2^n}$$

ಪದಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ $n \to \infty$ ಆದಾಗ ಶ್ರೇಢಿಯ ಮೊತ್ತವು ಅಪರಿಮಿತವಾಗುತ್ತದೆ. ಅಂದರೆ, ಇದು ***ಅಪಸರಣ*** ಶ್ರೇಢಿಯಾಗಿದೆ.

9. ಕೆಳಗಿನ ಶ್ರೇಢಿಯ n ಪದಗಳ ಮೊತ್ತವೇನು?

$$4 + 44 + 444 + \ldots\ldots\ldots$$

ಶ್ರೇಢಿಯ ಮೊತ್ತ S ಇರಲಿ. ಅಂದರೆ

$$S = 4 + 44 + 444 + \ldots\ldots$$

$$= 4(1) + 4\,(11) + 4\,(111) + \ldots\ldots$$

$$= 4\,[1 + 11 + 111 + \ldots\ldots]$$

$$\therefore\ \frac{9S}{4} = [9+99+999+\ldots\ldots]$$

$$= (10 - 1) + (10^2 - 1) + (10^3 - 1) + \ldots\ldots$$

$$= (10 + 10^2 + 10^3 + \ldots\ldots n \text{ ಪದಗಳು})$$

$$+(-1-1-1-1 \ldots\ldots n \text{ ಪದಗಳು})$$

$$= 10(1 + 10 + 10^2 + \ldots\ldots 10^n) - n$$

$$= 10\frac{(10^n - 1)}{10 - 1} - n \quad (G.P.\text{ಯ ಮೊತ್ತದ ಸೂತ್ರದಿಂದ})$$

$$= \frac{10}{9}(10^n - 1) - n$$

$$\therefore \quad S = \frac{40}{81}(10^n - 1) - \frac{4n}{9}.$$

10. ಯಾವುದೇ ಒಂದು $G.P$ಯಲ್ಲಿ S_n, $S_{2n} - S_n$, $S_{3n} - S_{2n}$ ಗಳು $G.P.$ಆಗುತ್ತದೆ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

$a, ar, ar^2 \ldots\ldots$ ಒಂದು $G.P$ ಯ ಪದಗಳು ಇರಲಿ.

n ಪದಗಳ ಮೊತ್ತ, $S_n = \dfrac{a(1-r^n)}{1-r}$

$$\therefore \quad S_{2n} = \frac{a(1-r^{2n})}{1-r} \quad , \quad S_{3n} = \frac{a(1-r^{3n})}{1-r}$$

$$\therefore \quad S_{2n} - S_n = \frac{a(1-r^{2n})}{1-r} - \frac{a(1-r^n)}{1-r}$$

$$= \frac{ar^n}{1-r}(1 - r^n)$$

ಹಾಗೆಯೇ

$$S_{3n} - S_{2n} = \frac{ar^{2n}(1-r^n)}{1-r}$$

ಆದ್ದರಿಂದ $\dfrac{S_{2n} - S_n}{S_n} = \dfrac{ar^n(1-r^n)}{(1-r)} \times \dfrac{(1-r)}{a(1-r^n)} = r^n$

ಮತ್ತು $\dfrac{S_{3n} - S_{2n}}{S_{2n} - S_n} = \dfrac{ar^{2n} \times (1-r^n)(1-r)}{(1-r)ar^n(1-r^n)} = r^n$

ಆದ್ದರಿಂದ, $S_n, S_{2n}-S_n, S_{3n}-S_{2n}$ – ಇವುಗಳು G.P.ಯಲ್ಲಿವೆ, ಏಕೆಂದರೆ, ಅವುಗಳು (ಒಂದು ಸಾಮಾನ್ಯ ಪ್ರಮಾಣ) r^n ವನ್ನು ಹೊಂದಿವೆ.

11. ಒಂದು ಅಪರಿಮಿತ ಗುಣೋತ್ತರ ಶ್ರೇಢಿಯಲ್ಲಿ n ನೆಯ ಪದಕ್ಕೂ ಮತ್ತು ಅದರ ನಂತರದ ಎಲ್ಲಾ ಪದಗಳ ಮೊತ್ತಕ್ಕೂ ಇರುವ ಪ್ರಮಾಣವನ್ನು 1 : 3 ಆದರೆ, ಆ G.P. ಯ ಸಾಮಾನ್ಯ ಪ್ರಮಾಣ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

G.P. ಯು $a, ar, ar^2 ..... ar^{n-1}, ar^n, ar^{n+1}, ... \infty$ ಆಗಿರಲಿ.

ಇದರಲ್ಲಿ, n ನೆಯ ಪದ ar^{n-1}, ನಂತರದ ಪದ ar^n. ಇಲ್ಲಿಂದ ಅಪರಿಮಿತ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮೊತ್ತ $\frac{ar^n}{1-r}$ ಆಗಿದೆ.

ಈಗ, $ar^{n-1} : \frac{ar^n}{1-r} = 1 : 3$

$$\therefore \frac{1-r}{r} = \frac{1}{3}$$

ಅಥವಾ $3 - 3r = r$

ಅಥವಾ $3 = 4r$

ಅಥವಾ, $r = \frac{3}{4}$.

ಆದ್ದರಿಂದ G.P. ಯ ಸಾಮಾನ್ಯ ಪ್ರಮಾಣ $= \frac{3}{4}$.

ಅಭ್ಯಾಸ – 2.2

1. ಕೆಳಗಿನ ಶ್ರೇಢಿಗಳಲ್ಲಿ ಸಾಮಾನ್ಯ ಪ್ರಮಾಣ ಮತ್ತು n ನೆಯ ಪದ ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ:
   (i) $2 + 4 + 8 + ...$
   (ii) $4 + 10 + 25 + ...$
   (iii) $3 - 9 + 27 - ....$
   (iv) $\frac{1}{4} - \frac{1}{16} + \frac{1}{64} - ....$
   (v) $1 + \frac{2}{3} + \frac{4}{9} + ...$
2. ಒಂದು G.P. ಯ ಮೂರನೆಯ ಮತ್ತು 6ನೆಯ ಪದಗಳು 32 ಮತ್ತು 4 ಆಗಿದ್ದರೆ ಆ G.P.ಯನ್ನು ಬರೆಯಿರಿ.

3. 3ನೇ ಪದ 2ಮತ್ತು 5ನೇ ಪದ 32ಇರುವ $G.P.$ಯ nನೇ ಪದವನ್ನು ಬರೆಯಿರಿ.

4. ಒಂದು $G.P.$ ಯಲ್ಲಿರುವ 3 ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮೊತ್ತ 14 ಮತ್ತು ಅವುಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧ 64 ಆದರೆ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಯಾವುವು?

5. ಒಂದು $G.P.$ ಯ ಮೊದಲ ನಾಲ್ಕು ಪದಗಳ ಮೊತ್ತ 60, ಮೊದಲನೆಯ ಮತ್ತು ಕೊನೆಯದರ ಮೊತ್ತ 36 ಆಗಿದ್ದರೆ ಪದಗಳು ಯಾವುವು?

6. ಕೆಳಗಿನ ಶ್ರೇಢಿಗಳಲ್ಲಿ $G.P.$ ಯಾವುದಿದೆ ಎಂದು ಕಂಡುಹಿಡಿದು n ಪದಗಳ ಮೊತ್ತವನ್ನು ಮತ್ತು ಸಾಧ್ಯವಿದ್ದಲ್ಲಿ ಅಪರಿಮಿತ ಪದಗಳ ಮೊತ್ತವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ:

   (i) $1 - 1\frac{2}{3} + \frac{4}{9} - \ldots\ldots$

   (ii) $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \ldots\ldots$

   (iii) $2 + 6 + 18 + 54 + \ldots.$

   (iv) $1 - 3 - 5 - 7 + \ldots\ldots$

   (v) $\frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \ldots..$

7. $y = x + x^2 + x^3 + \ldots\ldots$ ಅಪರಿಮಿತ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಶ್ರೇಢಿಯಾದರೆ, $x = y - y^2 + y^3 \ldots\ldots$ ಎಂಬ ಅಪರಿಮಿತ ಶ್ರೇಢಿ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

8. a, b, c, d ಗಳು ಒಂದು $G.P.$ ಆಗ $|r| > 1$ ಆದರೆ ಮಾತ್ರ $a^2 + d^2 > b^2 + c^2$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

9. $(x + y) + (x^2 + xy + y^2) + (x^3 + x^2y + xy^2 + y^3) + \ldots..$ n ಗುಂಪುಗಳ ಮೊತ್ತವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

10. ಒಂದೇ ಸಾಮಾನ್ಯ ಪ್ರಮಾಣವುಳ್ಳ ಎರಡು $G.P.$ ಗಳಲ್ಲಿ ಮೊದಲ n ಪದಗಳ ಮೊತ್ತಗಳಿಗೆ ಇರುವ ಪ್ರಮಾಣವು ಆ ಎರಡು $G.P$ ಗಳ p ನೆಯ ಪದಗಳಿಗೆ ಇರುವ ಪ್ರಮಾಣಕ್ಕೆ ಸಮ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

11. $3 + \sqrt{3} + 1 + \ldots\ldots$ ಎಂಬ $G.P.$ಯ ಎಷ್ಟನೆಯ ಪದ $\frac{1}{31}$ ಆಗುವುದು?

12. $2 + 3 + 4\frac{1}{2} \ldots\ldots$ $G.P.$ಯ ಎಷ್ಟು ಪದಗಳ ಮೊತ್ತ $26\frac{3}{8}$ ಆಗುವುದು?

13. ಒಂದು $G.P.$ಯ p, m, n ನೇ ಪದಗಳು x, y, z ಆದರೆ

    $x^{m-n} . y^{n-p} . z^{p-m} = 1$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

14. $a, 2a, 3a, \ldots\ldots, na$ ಗಳು ಪ್ರಥಮ ಪದಗಳಾಗಿ ಉಳ್ಳ ಗುಣೋತ್ತರ ಶ್ರೇಢಿಗಳ ಸಾಮಾನ್ಯ ಪ್ರಮಾಣ r ಮತ್ತು ಪದಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ n ಆಗಿದ್ದರೆ ಮತ್ತು n ಪದಗಳ ಮೊತ್ತ S_n ಆದರೆ, ಈ ಶ್ರೇಢಿಗಳ $S_1 + S_2 + S_3 \ldots\ldots + S_n$ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

15. ಒಂದು $G.P$ ಯ $p, 2p, 3p$ ಪದಗಳ ಮೊತ್ತಗಳನ್ನು

    S_1, S_2, S_3 ಎಂದು ಸೂಚಿಸಿದರೆ

    (i) $S_1^2 + S_2^2 = S_1(S_2 + S_3)$

    (ii) $S_1(S_3 - S_2) = (S_2 - S_1)^2$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

16. $x = 1 + a + a^2 + \ldots\ldots\infty, (a < 1)$ ಮತ್ತು

    $y = 1 + b + b^2 + \ldots\ldots\infty, (b < 1)$ ಆದರೆ

    $\dfrac{xy}{x + y - 1} = 1 + ab + ab^2 + \ldots\ldots\infty$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

17. ಈ ಕೆಳಗಿನ ಶ್ರೇಢಿಯ n ಪದಗಳ ಮೊತ್ತವೇನು?

    $1 + (1 + x) + (1 + x + x^2) + (1 + x + x^2 + x^3) + \ldots\ldots$

18. ಒಬ್ಬನು ಪ್ರತಿವರ್ಷದ ಪ್ರಾರಂಭದಲ್ಲಿ p ರೂ.ಗಳನ್ನು ಠೇವಣಿ ಇಡುತ್ತಾ ಬಂದರೆ, ವರ್ಷಕ್ಕೆ $r\%$ ಚಕ್ರಬಡ್ಡಿಯಂತೆ n ವರ್ಷದ ಕೊನೆಯಲ್ಲಿ ಎಷ್ಟು ಮೊತ್ತವಾಗುವುದು?

    [ಸೂಚನೆ : ಒಂದು ವರ್ಷದ ಕೊನೆಯಲ್ಲಿ 1 ರೂ.ಗೆ ಆಗುವ ಮೊತ್ತ $R = 1 + \dfrac{r}{100}$].

19. ಒಂದು ಕಂಪೆನಿಯು ಪ್ರತಿವರ್ಷವೂ ಬಂದ ಲಾಭದಲ್ಲಿ 1000 ರೂ.ಗಳನ್ನು ರಿಸರ್ವ್ ನಿಧಿಗಾಗಿ ಶೇ.4 ಚಕ್ರಬಡ್ಡಿಯಂತೆ ಠೇವಣಿಯಲ್ಲಿ ತೊಡಗಿಸಿದರೆ 10 ವರ್ಷದ ಕೊನೆಯಲ್ಲಿ ಆಗುವ ಮೊತ್ತವೇನು?

20. 0.543175175175...... ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

21. n ಪದಗಳ ಮೊತ್ತ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ:

    $0.4 + .44 + .444 + \ldots\ldots$

22. $a + b + \ldots\ldots + p$ ಒಂದು $G.P$ ಆದರೆ, ಅದರ ಮೊತ್ತ $\dfrac{bp - b^2}{b - a}$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

23. $\dfrac{7}{10} + \dfrac{7}{100} + \dfrac{7}{1000} + \ldots\ldots$ ಶ್ರೇಢಿಯ ಮೊತ್ತವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

24. 0.353535...... ಈ ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಭಿನ್ನರಾಶಿಯ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಬರೆಯಿರಿ.

2.5 ಸಂಗತ ಶ್ರೇಢಿಗಳು

ಒಂದು ಶ್ರೇಢಿಯಲ್ಲಿನ ಪದಗಳ ವಿಲೋಮಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ ಸಮಾಂತರ ಶ್ರೇಢಿಯಾದರೆ ಆ ಶ್ರೇಢಿಗೆ ಸಂಗತ ಶ್ರೇಢಿ ಎನ್ನುವರು. ಇದನ್ನು ಇನ್ನು ಮುಂದೆ *H.P* (Harmonic Progression) ಎಂದು ಸೂಚಿಸಲಾಗುವುದು.

ಉದಾಹರಣೆ : $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}$ .... ಒಂದು ಸಂಗತ ಶ್ರೇಢಿ; ಏಕೆಂದರೆ ಈ ಪದಗಳ ವಿಲೋಮ ಪದಗಳು, ಅಂದರೆ 1, 2, 3, 4, 5,....... ಒಂದು ಸಮಾಂತರ ಶ್ರೇಢಿಯಲ್ಲಿವೆ.

ಸಂಗತ ಶ್ರೇಢಿಯ nನೆಯ ಪದ :

ಸಾಧಾರಣವಾಗಿ ಒಂದು *H.P*ಯ ಮೊದಲ ಪದವನ್ನು aಎಂದೂ, ಎರಡನೆಯ ಪದವನ್ನು b ಎಂದೂ ಕರೆದಾಗ ಈ *H.P* ಯ nನೆಯ ಪದವನ್ನು ಕೆಳಗೆ ತೋರಿಸಿದ ಕ್ರಮದಲ್ಲಿ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದು.

ಈ *H.P* ಯ ವಿಲೋಮ ಪದಗಳಿಂದ ಏರ್ಪಟ್ಟ ಶ್ರೇಢಿಯು

$$\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \quad ......, \quad \frac{1}{T_n}$$

ಒಂದು *A.P* ಆಗಿರುತ್ತದೆ. ಈ ಸಮಾತರ ಶ್ರೇಢಿಯ

ಸಾಮಾನ್ಯ ವ್ಯತ್ಯಾಸ, $d = \frac{1}{b} - \frac{1}{a} = \frac{a-b}{ab}$

ಈ *A.P* ಯ nನೆಯ ಪದ

$$T_n = \frac{1}{a} + (n-1)\frac{(a-b)}{ab}$$

$$= \frac{b + na - nb - a + b}{ab}$$

$$= \frac{a(n-1) - b(n-2)}{ab}$$

$$\therefore \boxed{\frac{1}{T_n} = \frac{ab}{a(n-1) - b(n-2)}}$$

ಒಂದು ಸಂಗತ ಶ್ರೇಢಿಯ nನೆಯ ಪದ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು ಇದು ಒಂದು ಸೂತ್ರವಾಗಿದೆ.

ಒಂದು H.P.ಯ n ಪದಗಳ ಮೊತ್ತ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು ಯಾವ ಸೂತ್ರವೂ ಇಲ್ಲ. ಎಲ್ಲಾ ಪದಗಳನ್ನು ಬರೆದು ಕೂಡಿಸುವುದರಿಂದ ಮೊತ್ತ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದು.

H.P ಯನ್ನು ಒಳಗೊಂಡಿರುವ ಯಾವುದೇ ಸಮಸ್ಯೆ ಅಥವಾ ಲೆಕ್ಕವನ್ನು *A.P* ಗೆ ಬದಲಾಯಿಸಿಕೊಂಡು ಬಿಡಿಸಬಹುದು.

ಉದಾಹರಣೆಗಳು

1. a, b, c ಗಳು *H.P* ಯಲ್ಲಿದ್ದರೆ $\frac{a}{c} = \frac{a-c}{b-c}$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

a, b, c ಗಳು *H.P* ಯಲ್ಲಿದ್ದರೆ, $\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}$ ಗಳು *A.P* ಯಲ್ಲಿವೆ.

$$\therefore \quad \frac{1}{b} - \frac{1}{a} = \frac{1}{c} - \frac{1}{b}$$

ಅಥವಾ $\frac{a-b}{ab} = \frac{b-c}{bc}$

$$\therefore \frac{ab}{bc} = \frac{a-b}{b-c}$$

ಅಥವಾ $\frac{a}{c} = \frac{a-b}{b-c}$

H.P .ಯ ಈ ಗುಣವನ್ನು ಅನೇಕ ವೇಳೆ *H.P.* ಯನ್ನು ನಿರೂಪಿಸಲು ಉಪಯೋಗಿಸಬಹುದು. ಮೇಲಿನ ಗುಣವನ್ನು ಈ ರೀತಿ ನಿರೂಪಿಸಬಹುದು:

ಮೂರು ಪರಿಮಾಣಗಳು *H.P.*ಯಲ್ಲಿರಬೇಕಾದರೆ ಮೊದಲೆರಡು ಪದಗಳ ವ್ಯತ್ಯಾಸಕ್ಕೂ ಕೊನೆಯ ಎರಡು ಪದಗಳ ವ್ಯತ್ಯಾಸಕ್ಕೂ ಇರುವ ಪ್ರಮಾಣವು ಮೊದಲನೆಯ ಮತ್ತು ಕೊನೆಯ ಪದಗಳ ಪ್ರಮಾಣಕ್ಕೆ ಸಮ.

2. ಒಂದು ಸಂಗತ ಶ್ರೇಢಿಯ p ನೆಯ ಪದ q, ಮತ್ತು q ನೆಯ ಪದ p ಆದರೆ pq ನೆಯ ಪದವು 1 ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

$$a, a + d, ..., a + (p - 1) d, ...,$$

ಒಂದು *A.P* ಯ ಸಾರ್ವತ್ರಿಕ ರೂಪ.

ಇದರಲ್ಲಿ, p ನೆಯ ಪದ $= a + (p - 1) d$

q ನೆಯ ಪದ $= a + (q - 1) d$

pq ನೆಯ ಪದ $= a + (pq - 1)d$

$H.P$ ಯ p ನೆಯ ಪದ, $\frac{1}{a+(p-1)d} = q$ ... (i)

ಮತ್ತು q ನೆಯ ಪದ, $\frac{1}{a+(q-1)d} = p$ ... (ii)

ಎಂಬುದಾಗಿ ಕೊಟ್ಟಿದೆ.

ಈಗ $H.P.$ ಯ pqನೆಯ ಪದ, $\frac{1}{a+(pq-1)d} = 1$

ಎಂದು ತೋರಿಸಬೇಕಾಗಿದೆ.

ಫಲಿತಾಂಶ (i) ಮತ್ತು (ii) ಗಳನ್ನು

$$aq + pqd - qd = 1 \quad \text{... (iii)}$$

ಮತ್ತು $ap + pqd - pd = 1$ ... (iv)

ಎಂದು ಬರೆಯಬಹುದು.

(iv) ರಲ್ಲಿ (iii) ನ್ನು ಕಳೆದರೆ

$a(p - q) - d(p - q) = 0$

ಅಥವಾ $(a - d)(p - q) = 0$

ಇಲ್ಲಿ $p \neq q$ ಆಗಿರುವುದರಿಂದ, $a = d$ ...(v)

(iii)ರಲ್ಲಿ (v)ನ್ನು ಆದೇಶಿಸಿದರೆ

$$aq + apq - aq = 1$$

ಅಂದರೆ, $apq = 1$ ...(vi)

$H.P.$ ಯ pq ನೆಯ ಪದ

$$\frac{1}{a+(pq-1)a} = \frac{1}{apq} = 1$$

[(vi)ನ್ನು ಬಳಸುವುದರಿಂದ]

ಎಂದಾಗುತ್ತದೆ

3. a, b, c, d ಗಳು $H.P$ ಯಾಗಿದ್ದರೆ $ad > bc$ ಎಂದೂ ಮತ್ತು $a + b > c + d$ ಎಂದೂ ತೋರಿಸಿ.

ಈಗ a, b, c, d ಗಳು $H.P.$ ಯಲ್ಲಿರುವುದರಿಂದ ವಿಲೋಮಗಳು

$\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}, \frac{1}{d}$ ಗಳು $A.P.$ ಯಲ್ಲಿವೆ. a, b, c, d ಗಳ ಬೆಲೆ

$\frac{1}{x-3q}, \frac{1}{x-q}, \frac{1}{x+q}, \frac{1}{x+3q}$ ಇರಲಿ.

ಆದ್ದರಿಂದ

$$ad = \frac{1}{(x-3q)} \; \frac{1}{(x+3q)} = \frac{1}{x^2-9q^2}$$

ಮತ್ತು

$$bc = \frac{1}{x-q} \cdot \frac{1}{x+q} = \frac{1}{x^2-q^2}$$

ಈಗ $x^2 - 9q^2 < x^2 - q^2$ ಆಗಿರುವುದರಿಂದ

$$\frac{1}{x^2-9q^2} > \frac{1}{x^2-q^2}$$

ಅಂದರೆ, $ad > bc$

ಹಾಗೆಯೇ $a + d = \frac{2x}{x^2-9q^2}$ ಮತ್ತು $b + c = \frac{2x}{x^2-q^2}$

ಈಗ, $\frac{1}{x^2-9q^2} > \frac{1}{x^2-q^2}$ ಆಗಿರುವುದರಿಂದ

$a + d > b + c$ ಎಂಬುದು ಸ್ವತಃ ಸಿದ್ಧ

4. (i) ಒಂದು $H.P.$ ಯ ಎಲ್ಲಾ ಪದಗಳನ್ನು ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆಯಿಂದ ಗುಣಿಸಿದರೆ ಅಥವಾ ಭಾಗಿಸಿದರೆ ಬರುವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳೂ $H.P.$ ಆಗಿರುತ್ತವೆ.

(ii) a, b, c ಗಳು $H.P.$ ಯಲ್ಲಿರಲಿ.

ಆದ್ದರಿಂದ $\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}$ ಗಳು $A.P.$ ಯಲ್ಲಿರುತ್ತವೆ.

ಈ $A.P$ಯ ಎಲ್ಲಾ ಪದಗಳನ್ನು abc ಯಿಂದ ಗುಣಿಸಿದರೆ bc, ca, ab ಗಳು $A.P$ ಆಗಿವೆ.

(iii) ಈ ಮೇಲಿನ $A.P.$ ಯಲ್ಲಿರುವ bc, ca, ab ಗಳನ್ನು $(ab + bc + ca)$ ಯಿಂದ ಕಳೆದಾಗ $a(b + c), b(c + a)$ ಮತ್ತು $c(a + b)$ ಗಳು ಒಂದು $A.P.$ ಯಲ್ಲಿರುತ್ತವೆ.

5. $\frac{a}{b+c}, \frac{b}{c+a}, \frac{c}{a+b}$ $A.P.$ ಆದರೆ $b + c, c + a, a + b$ ಗಳು $H.P$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

ದತ್ತ $A.P$ ಯ ಪದಗಳಿಗೆ 1ನ್ನು ಸೇರಿಸಿದರೆ

$$1 + \frac{a}{b+c}, 1 + \frac{b}{c+a}, 1 + \frac{c}{a+b}$$

ಒಂದು $A.P.$ ಆಗಿದೆ. ಅಂದರೆ

$$\frac{a+b+c}{b+c}, \frac{a+b+c}{c+a}, \frac{a+b+c}{a+b}$$

ಒಂದು $A.P$. ಆದ್ದರಿಂದ

$$\frac{b+c}{a+b+c}, \frac{c+a}{a+b+c}, \frac{a+b}{a+b+c}$$ ಒಂದು $H.P$ ಆಗಿದೆ.

ಈ $H.P$ ಯ ಎಲ್ಲಾ ಪದಗಳನ್ನು $a + b + c$ ಯಿಂದ ಗುಣಿಸಿದರೆ $b + c, c + -a, a + b$ ಒಂದು $H.P.$ ಆಗುತ್ತದೆ.

6. p, q, r ಗಳು $A.P$ ಯಲ್ಲಿದ್ದು q, r, s ಗಳು $H.P$ ಯಲ್ಲಿದ್ದರೆ $p : q = r : s$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

ಈಗ q, r, s ಗಳು $H.P.$ ಯಲ್ಲಿರುತ್ತವೆ.

$\therefore\ q : s = (q - r) / (r - s)$ [ಉದಾ. 1ನ್ನು ನೋಡಿ.]

p, q, r ಗಳು $A.P.$ ಯಲ್ಲಿರುವುದರಿಂದ

$$(q - r) = (p - q)$$

$$\therefore (p - q) : (r - s) = q : s$$

ಅಥವಾ $(p - q) : q = (r - s) : s$

ಅಥವಾ $p : q = r : s$

ಅಭ್ಯಾಸ - 2.3

1. a, b, c ಗಳು $A.P$ ಆಗಿದ್ದರೆ bc, ca, ab ಗಳು $H.P$ ಆಗಿದೆ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

2. $b-c, c-a, a-b$ ಗಳು $A.P$ ಆಗಿದ್ದರೆ $\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}$ ಗಳು $H.P$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

3. $\frac{1}{yx}, \frac{1}{zx}, \frac{1}{xy}$ ಗಳು $H.P$ ಆಗಿದ್ದರೆ

   $\frac{1}{x}\left(\frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right), \frac{1}{y}\left(\frac{1}{z} + \frac{1}{x}\right), \frac{1}{z}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right)$ ಗಳು $A.P.$ ಆಗಿದೆ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

4. p, q, r ಗಳು $H.P$ ಆದರೆ $\frac{q+r}{p}, \frac{r+p}{q}, \frac{p+q}{r}$ ಗಳು $A.P.$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

5. (i) $(a - b) : (b - c) = a : a$ ಆದರೆ a, b, c ಗಳು $A.P$ ಆಗುವುದು;

   (ii) $(a - b) : (b - c) = a : b$ ಆದರೆ a, b, c ಗಳು $G.P$ ಆಗುವುದು;

   ಮತ್ತು

   (iii) $(a - b) : (b - c) = a : c$ ಆದರೆ a, b, c ಗಳು $H.P$ ಆಗುವುದೆಂದು ತೋರಿಸಿ.

6. x, y, z ಗಳು $A.P$ ಯಲ್ಲಿದ್ದು, x, my, z ಗಳು $G.P$ ಯಲ್ಲಿದ್ದರೆ x, m^2y, z ಗಳು $H.P$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

7. ಒಂದು $H.P$ ಯ pನೇ ಪದ q ಮತ್ತು qನೇ p ಆದರೆ pq ನೇ ಪದ ಮತ್ತು $(p + q)$ನೇ ಪದಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

8. ಒಂದು $H.P$ ಯ pನೇ ಪದ qr ಮತ್ತು qನೇ ಪದ rp ಆದರೆ r ನೇ ಪದ pq ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

9. p, q, r ಗಳು $A.P.$ ಆದರೆ, ಒಂದು $G.P.$ಯ pನೇ, qನೇ ಮತ್ತು rನೇ ಪದಗಳು ಒಂದು $G.P.$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

10. p, q, r ಗಳು $A.P.$ ಯಾಗಿದ್ದು q, r, s ಗಳು $G.P.$ ಯಾಗಿದ್ದು, r, s, t ಗಳು $H.P.$ ಆಗಿದ್ದರೆ p, r, t ಗಳು $G.P.$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

11. $a^x = b^y = c^z$ ಆದರೆ ಮತ್ತು a, b, c $G.P.$ ಆದರೆ, x, y, z ಗಳು $H.P.$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

12. a, b, c ಗಳು $H.P.$ ಯಾದರೆ $\frac{b+a}{b-a} + \frac{b+c}{b-c} = 2$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

13. a , b ಮತ್ತು c ಗಳು $H.P.$ ಯಲ್ಲಿದ್ದು, b, c ಮತ್ತು d ಗಳು $G.P.$ ಯಲ್ಲಿದ್ದು, c, d ಮತ್ತು e ಗಳು $A.P.$ ಯಲ್ಲಿದ್ದಾಗ $e = \frac{ab^2}{(2a-b)^2}$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

14. a, b, c ಯು $A.P.$ ಯಲ್ಲಿದ್ದರೆ, ಮತ್ತು

$$x = 1 + a + a^2 + \ldots\ldots\infty \quad , (a < 1)$$

$$y = 1 + b + b^2 + \ldots\ldots\infty \quad , (b < 1)$$

$$z = 1 + c + c^2 + \ldots\ldots\infty \quad , (c < 1)$$

x, y, z ಗಳು $H.P.$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

15. $1, 3, 9$ ಈ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿಗೆ ಯಾವ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಕೂಡಿಸಿದರೆ ಬರುವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಸಂಗತ ಶ್ರೇಢಿ ಆಗುವುದು?

16. a^2, b^2, c^2 ಗಳು $A.P.$ ಆದರೆ $b+c$, $c+a$, $a+b$ ಗಳು $H.P.$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

17. ಒಂದು $G.P.$ ಯಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಪದದಿಂದಲೂ ಅದರ ಹಿಂದಿನ ಪದವನ್ನು ಕಳೆದಾಗ ಬರುವ ಪದಗಳೂ ಸಹ $G.P.$ ಆಗಿದೆ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

    ಈ ಎರಡನೆಯ $G.P.$ಯ ಪದಗಳು $2, 6, 18 \ldots\ldots$ ಇತ್ಯಾದಿ ಇದ್ದರೆ ಮೊದಲನೆಯ $G.P.$ ಯ nನೇ ಪದ 3^{n-1} ಎಂದು ತೋರಿಸಿ ಮತ್ತು n ಪದಗಳ ಮೊತ್ತವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

18. ಒಂದು $G.P.$ಯ ಮೂರು ಅನುಕ್ರಮ ಪದಗಳಿಗೆ ಎರಡನೆಯ ಪದವನ್ನು ಸೇರಿಸಿದೆ. ಈಗ ಹೊಸದಾಗಿ ಬಂದಿರುವ ಪದಗಳು $H.P.$ ಯಲ್ಲಿವೆ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

2.6 ಎರಡು ಧನ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಸಮಾಂತರ, ಗುಣೋತ್ತರ ಮತ್ತು ಸಂಗತ ಮಧ್ಯಕಗಳು

2.6.1 ಸಮಾಂತರ ಮಧ್ಯಕಗಳು

(i) a ಮತ್ತು b ಎರಡು ಧನ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾಗಿರಲಿ. a, A, b ಗಳು A.P. ಯಾಗಿದ್ದರೆ A ಯನ್ನು a ಮತ್ತು b ಗಳ ಸಮಾಂತರ ಮಧ್ಯಕ (A.M.) ಎನ್ನುವರು.

ದತ್ತ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು A.P.ಯಲ್ಲಿರುವುದರಿಂದ

$$A - a = b - A$$

$$\therefore\ 2A = a + b$$

ಅಥವಾ $A = \frac{a+b}{2}$

ಎರಡು ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಸಮಾಂತರ ಮಧ್ಯಕವು ಅವೆರಡು ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಸರಾಸರಿ ಇರುವುದು.

(ii) $a, x_1, x_2 \ldots x_n$, b ಗಳು A.P.ಯಲ್ಲಿರಲಿ. ಆಗ $x_1, x_2 \ldots x_n$ ಗಳನ್ನು a, b ಗಳನಡುವಿನ n ಸಮಾಂತರ ಮಧ್ಯಕಗಳೆಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ.

ಇಲ್ಲಿ, b ಎನ್ನುವುದು A.P.ಯ $(n+2)$ ನೇ ಪದವಾಗಿದೆ.

ಅಂದರೆ, $b = a + (n + 2 - 1)\, d$

ಅಥವಾ $b = a + (n + 1)\, d$

$$\therefore\ d = \frac{b-a}{n+1}$$

ಇದು ಸಾಮಾನ್ಯ ವ್ಯತ್ಯಾಸ. ಸಾಮಾನ್ಯ ವ್ಯತ್ಯಾಸ ತಿಳಿದ ನಂತರ ಉಳಿದ ಸಮಾಂತರ ಮಧ್ಯಕಗಳನ್ನು ಈ ಕೆಳಕಂಡಂತೆ ಬರೆಯಬಹುದು:

$$x_1 = a + d = a + \frac{b-a}{n+1} = \frac{an+b}{n+1}$$

$$x_2 = a + 2d = \frac{a(n-1) + 2b}{n+1}$$

....

....

$$x_n = a + nd = a + \frac{n(b-a)}{n+1} = \frac{a+nb}{n+1}$$

ಉದಾಹರಣೆಗಳು

1. 28 ಮತ್ತು 48ರ ನಡುವೆ 4 ಸಮಾಂತರ ಮಧ್ಯಕಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸಿ.

$28, x_1, x_2, x_3, x_4, 48$ ಒಂದು $A.P.$ ಆಗಿರಲಿ. ಆಗ

6ನೇ ಪದ $= 48$ ಮತ್ತು $a = 28$. ಸಾಮಾನ್ಯ ವ್ಯತ್ಯಾಸ d ಆಗಿರಲಿ

$\therefore\ 28 + (6-1)\, d = 48$

ಅಥವಾ $d = \dfrac{48-28}{5} = 4$

ಅಂದರೆ, $A.P.$ಯ ಸಾಮಾನ್ಯ ವ್ಯತ್ಯಾಸ 4 ಆಗಿದೆ.

$\therefore x_1 = 28 + 4 = 32$

$x_2 = 32 + 4 = 36$

$x_3 = 36 + 4 = 40$

$x_4 = 40 + 4 = 44$

ಇವುಗಳು ಸಮಾಂತರ ಮಧ್ಯಕಗಳಾಗಿವೆ.

2. a, b ಗಳ ನಡುವಿನ n ಸಮಾಂತರ ಮಧ್ಯಕಗಳ ಮೊತ್ತವು, a, b ಗಳ ನಡುವಿನ ಮಧ್ಯಕದ n ರಷ್ಟು ಇದೆ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

ಈಗ, a, b ಗಳ ನಡುವಿನ ಮಧ್ಯಕ $= \dfrac{a+b}{2}$.

$x_1, x_2, \ldots x_n$ ಗಳು ಸಮಾಂತರ ಮಧ್ಯಕಗಳಾದರೆ

ಆಗ ಉಂಟಾಗುವ $A.P.$ ಯಲ್ಲಿ b ಯು $(n+2)$ ನೇ ಪದವಾಗಿರುತ್ತದೆ.

ಅಥವಾ $b = a + (n+2-1)\, d$

$$\therefore\ d = \frac{b-a}{n+1}$$

n ಸಮಾಂತರ ಮಧ್ಯಕಗಳ ಮೊತ್ತ :

$$S_n = \frac{n}{2}\left[2(a+d) + (n-1)\, d\right]$$

$$= \frac{n}{2}\left[2\left\{a+\frac{b-a}{n+1}\right\} + (n-1)\,\frac{(b-a)}{n+1}\right]$$

$$= \frac{n}{2}\,\frac{(a+b)(n+1)}{(n+1)}$$

$$= \frac{n}{2}(a+b)$$

$= n$. (a, b ಗಳ ನಡುವಿನ ಮಧ್ಯಕ).

2. 6. 2 ಗುಣೋತ್ತರ ಮಧ್ಯಕಗಳು

a, G, b ಗಳು G.P. ಯಲ್ಲಿದ್ದರೆ G ಎನ್ನುವುದು a ಮತ್ತು b ಗಳ ಗುಣಾಂತರ ಮಧ್ಯಕ (G.M) ಆಗುವುದು.

ಆದ್ದರಿಂದ

$$\frac{G}{a} = \frac{b}{G} \qquad \text{ಅಥವಾ} \qquad G^2 = ab$$

ಅಂದರೆ, a ಮತ್ತು b ಗಳ ಗುಣಾಂತರ ಮಧ್ಯಕ

$$G = \sqrt{ab}$$

ಆಗಿರುತ್ತದೆ.

ಇದೇ ರೀತಿಯಾಗಿ, $a, x_1 x_2, \ldots x_n, b$ ಗಳು G.P. ಆದಾಗ $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ಗಳನ್ನು a, b ಗಳ ನಡುವಿನ n ಗುಣಾಂತರ ಮಧ್ಯಕಗಳೆನ್ನುವರು.

ಗುಣಾಂತರ ಶ್ರೇಢಿ $a, x_1, x_2, x_3, \ldots x_n, b$ ಯಲ್ಲಿ b ಯು $(n+2)$ ನೇ ಪದ ಹಾಗು ಸಾಮಾನ್ಯ ಪ್ರಮಾಣ r ಆಗಿವೆ.

$$\therefore \quad b = a\, r^{n+2-1}$$

$$= a\, r^{n+1}$$

ಅಥವಾ $r = \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{n+1}}$

ಆದ್ದರಿಂದ

$$x_1 = a\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{n+1}}$$

$$x_2 = a\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{2}{n+1}}$$

$$x_3 = a\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{3}{n+1}}$$

....

....

$$x_n = a\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{n}{n+1}}$$

2.6.3 ಸಂಗತ ಮಧ್ಯಕಗಳು

a, H, b ಗಳು ಸಂಗತ ಶ್ರೇಢಿಯಾದರೆ Hನ್ನು a ಮತ್ತು b ಗಳ ನಡುವಿನ ಸಂಗತ ಮಧ್ಯಕ $(H.M)$ ಎನ್ನುವರು.

ಈಗ a, H, b ಗಳು $H.P.$ ಆಗಿರುವುದರಿಂದ

$\frac{1}{a}, \frac{1}{H}, \frac{1}{b}$ ಗಳು $A.P.$ ಆಗಿದೆ.

$$\therefore \frac{2}{H} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$$

ಅಥವಾ $H = \frac{2ab}{a+b}$

ಅಂದರೆ, $\frac{2ab}{a+b}$ ಎನ್ನುವುದು a, b ಗಳ ನಡುವಿನ ಸಂಗತ ಮಧ್ಯಕವಾಗಿದೆ.

ಇದೇ ರೀತಿ, $x_1, x_2, x_3 \ldots x_n$ ಗಳು a, b ಗಳ ನಡುವಿನ n ಸಂಗತ ಮಧ್ಯಕಗಳಾಗಿದ್ದರೆ ಆಗ $a, x, x_2, \ldots, x_n, b$ ಗಳು $H.P.$ ಯಲ್ಲಿರುತ್ತವೆ.

ಆದ್ದರಿಂದ $\frac{1}{a}, \frac{1}{x}, \frac{1}{x_2} \ldots \frac{1}{x_n}, \frac{1}{b}$ ಗಳು $A.P$. ಆಗಿದ್ದು ಒಟ್ಟು $n+2$ ಪದಗಳಿವೆ.

$$\therefore \frac{1}{b} = \frac{1}{a} + (n+2-1)\, d$$

ಇಲ್ಲಿ, ಸಾಮಾನ್ಯ ವ್ಯತ್ಯಾಸ

$$d = \frac{\frac{1}{b} - \frac{1}{a}}{n+1}$$

ಅಥವಾ $d = \frac{a-b}{(n+1)ab}$

ಆದ್ದರಿಂದ

$$\frac{1}{x_1} = \frac{1}{a} + d = \frac{1}{a} + \frac{(a-b)}{(n+1)ab} = \frac{a+nb}{(n+1)ab}$$

$$\frac{1}{x_2} = \frac{1}{x_1} + d = \frac{2a+(n-1)b}{(n+1)ab}$$

....

....

$$\frac{1}{x_n} = \frac{1}{x_{n-1}} + d = \frac{na+b}{(n+1)ab}$$

ಈ ಮೇಲಿನ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ವಿಲೋಮಗಳೇ $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ಮಧ್ಯಕಗಳನ್ನು ಕೊಡುತ್ತವೆ.

2.6.4 ಸಮಾಂತರ, ಗುಣೋತ್ತರ, ಸಂಗತ ಮಧ್ಯಕಗಳ ಪರಸ್ಪರ ಸಂಬಂಧ

ಪ್ರಮೇಯ :

A, G, H ಗಳು ಎರಡು ಅಸಮಾನ ಧನಾತ್ಮಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ನಡುವಿನ ಸಮಾಂತರ ಮಧ್ಯಕ, ಗುಣೋತ್ತರ ಮಧ್ಯಕ ಮತ್ತು ಸಂಗತ ಮಧ್ಯಕಗಳಾದರೆ,
(i) $AH = G^2$ ಮತ್ತು (ii) $A > G > H$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

ಸಾಧನೆ :

(i) a, b ಗಳು ಎರಡು ಬೇರೆ ಬೇರೆ ಧನಾತ್ಮಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾಗಿರಲಿ. ಇವುಗಳ ನಡುವಿನ ಸಮಾಂತರ ಮಧ್ಯಕ

$$A = \frac{a+b}{2}$$

ಇದೇ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಗುಣೋತ್ತರ ಮಧ್ಯಕ

$$G = \sqrt{ab}$$

ಮತ್ತು ಸಂಗತ ಮಧ್ಯಕ

$$H = \frac{2ab}{a+b}$$

$$\therefore A.\,H = \frac{a+b}{2} \cdot \frac{2ab}{a+b} = ab$$

$$= (\sqrt{ab})^2$$

ಅಂದರೆ

$$A.H. = G^2 \qquad \text{... (i)}$$

ಯಾವುದಾದರೂ ಎರಡು ಧನಾತ್ಮಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ನಡುವಿನ ಗುಣೋತ್ತರ ಮಧ್ಯಕದ ವರ್ಗವು ಅವುಗಳ ಸಮಾಂತರ ಮತ್ತು ಸಂಗತ ಮಧ್ಯಕಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧಕ್ಕೆ ಸಮ.

(ii) $A - G = \frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} = \frac{1}{2}\left[\sqrt{a} - \sqrt{b}\right]^2$ ಆಗಿರುತ್ತದೆ.

($a = b$ ಅಲ್ಲದಿದ್ದಾಗ) ಬಲಗಡೆಯ ಸಂಖ್ಯೆ ಯಾವಾಗಲೂ ಧನಸಂಖ್ಯೆ.

ಆದ್ದರಿಂದ, $a \neq b$ ಆದಾಗ $A > G$ ಆಗಿರುತ್ತದೆ.

[$a = b$ ಆದರೆ $A = G$ ಮತ್ತು ಅವು a ಮತ್ತು b ಗಳಿಗೆ ಸಮ]

$$\therefore \frac{A}{G} > 1 \qquad (a \neq b) \qquad \text{...(2)}$$

ಫಲಿತಾಂಶ (1) ಮತ್ತು (2) ರಿಂದ $\frac{A}{G} = \frac{G}{H} > 1$

ಅಂದರೆ, $G > H$

$\therefore\ A > G > H \quad (a \neq b)$

ಸೂಚನೆ : ಒಂದು ವೇಳೆ $a = b$ ಆಗಿದ್ದರೆ ಆಗ $A = G = H = a$ ಎಂದಾಗುತ್ತದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ, ಈ ವಿಶೇಷ ಸಾಧ್ಯತೆಯನ್ನು ಹಿಂದಿನ ಫಲಿತಾಂಶದೊಂದಿಗೆ ಸೇರಿಸುವುದರಿಂದ $A \geq G \geq H$ ಎಂದಾಗುತ್ತದೆ.

ಉದಾಹರಣೆ : a, b, c ಗಳು $G.P.$ ಆಗಿದ್ದು p ಯು a, b ಗಳ ಸಮಾಂತರ ಮಧ್ಯಕ ಮತ್ತು q ಯು b, c ಗಳ ಸಮಾಂತರ ಮಧ್ಯಕವಾದರೆ b ಯು p, q ಗಳ ಸಂಗತ ಮಧ್ಯಕವಾಗುವುದು ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

ಈಗ, p, q ಗಳು ಸಮಾಂತರ ಮಧ್ಯಕಗಳಾಗಿರುವುದರಿಂದ

$$p = \frac{a+b}{2} \quad ...(i) \quad \text{ಮತ್ತು} \quad q = \frac{b+c}{2} \quad ....(ii)$$

b ಯು p ಮತ್ತು qಗಳ ಸಂಗತ ಮಧ್ಯಕ ಎಂದು ತೋರಿಸಬೇಕು.

ಅಂದರೆ, p, b, q ಗಳು $H.P.$ ಎಂದು ತೋರಿಸಬೇಕು

ಅಥವಾ $\frac{1}{p}, \frac{1}{b}, \frac{1}{q}$ ಗಳು $A.P.$ ಎಂದು ತೋರಿಸಬೇಕು.

ಅಂದರೆ, $\frac{1}{b} - \frac{1}{p} = \frac{1}{q} - \frac{1}{b}$

ಎಂದು ತೋರಿಸಬೇಕು.

$$\text{ಈಗ, } \frac{1}{b} - \frac{1}{p} = \frac{p-b}{pb} = \frac{\frac{a+b}{2} - b}{\frac{a+b}{2}b} = \frac{a-b}{(a+b)b} \quad ... (iii)$$

a, b, c ಗಳು $G.P.$ಯಲ್ಲಿವೆ.

$$\therefore b^2 = ac \quad \text{ಅಥವಾ} \quad b = \sqrt{ac} \quad ... (iv)$$

ಈಗ (iv) ನ್ನು (iii)ರಲ್ಲಿ ಆದೇಶಿದರೆ

$$\frac{1}{b} - \frac{1}{p} = \frac{a-\sqrt{ac}}{(a+\sqrt{ac})\sqrt{ac}} = \frac{\sqrt{a}-\sqrt{c}}{\sqrt{ac}\,(\sqrt{a}+\sqrt{c})}$$

ಇದೇ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ

$$\frac{1}{q} - \frac{1}{b} = \frac{\sqrt{a} - \sqrt{c}}{\sqrt{ac}(\sqrt{a}+\sqrt{c})}$$

ಎಂದು ತೋರಿಸಬಹುದು. ಅಂದರೆ

$\frac{1}{p}, \frac{1}{b}, \frac{1}{q}$ ಒಂದು $A.P.$ ಎಂದಾಯಿತು.

ಆದ್ದರಿಂದ, p, b, q ಗಳು $H.P.$ ಆಗಿದೆ.

$$\therefore\ b = \frac{2pq}{p+q}$$

ಅಂದರೆ, b ಯು p,q ಗಳ ಸಂಗತ ಮಧ್ಯಕವಾಗಿದೆ.

ಅಭ್ಯಾಸ - 2.4

1. ಎರಡು ಧನಾತ್ಮಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಸಮಾಂತರ, ಗುಣಾಂತರ ಮತ್ತು ಸಂಗತ ಮಧ್ಯಕಗಳು $A, G, H.$ ಗಳಾಗಿದ್ದು, $A^x = G^y = H^z$ ಆಗಿದ್ದರೆ x, y, z ಗಳು $H.P.$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

2. x, y ಎಂಬ ಎರಡು ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ನಡುವಿನ ಗುಣೋತ್ತರ ಮಧ್ಯಕಕ್ಕೂ, ಸಂಗತ ಮಧ್ಯಕಕ್ಕೂ ಇರುವ ಪ್ರಮಾಣ $m : n$ ಆದರೆ

   $x : y = m + \sqrt{(m^2-n^2)} : m - \sqrt{(m^2-n^2)}$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

3. a ಯು b, c ಗಳ ಸಮಾಂತರ ಮಧ್ಯಕ ಮತ್ತು b ಯು a, c ಗಳ ಗುಣೋತ್ತರ ಮಧ್ಯಕ ಆಗಿದ್ದರೆ c ಯು a, b ಗಳ ಸಂಗತ ಮಧ್ಯಕ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

4. $\frac{1}{5}$ ಮತ್ತು $\frac{3}{5}$ ರ ನಡುವೆ ಮೂರು ಸಂಗತ ಮಧ್ಯಕಗಳನ್ನು ಬರೆಯಿರಿ.

5. ಒಂದು ಸಮಾಂತರ ಶ್ರೇಢಿಯಲ್ಲಿ 48 ಪದಗಳಿವೆ. ಅವುಗಳಲ್ಲಿ ಮಧ್ಯದ ಎರಡು ಪದಗಳು $2\frac{1}{4}$ ಮತ್ತು $2\frac{3}{4}$ ಆದರೆ ಆ ಶ್ರೇಢಿಯ ಮೊತ್ತವೇನು?

6. a, b, c ಗಳು ಸಂಗತ ಶ್ರೇಢಿ ಮತ್ತು b, c, d ಗಳು ಸಮಾಂತರ ಶ್ರೇಢಿ ಆಗಿದ್ದರೆ $ad = bc$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

7. $\log a + \log a x + \log ax^2 + \ldots\ldots n$ ಪದಗಳು

   $= n \log a + \frac{n(n-1)}{2} \log x$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

8. ಎರಡು ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಸಮಾಂತರ ಮಧ್ಯಕವು 1ಆಗಿದ್ದರೆ ಅವುಗಳ ಸಂಗತ ಮಧ್ಯಕವು ಗುಣೋತ್ತರ ಮಧ್ಯಕದ ವರ್ಗವಾಗಿರುತ್ತದೆ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

9. ಎರಡು ಸಂಖ್ಯೆ a,bಗಳ nಗುಣೋತ್ತರ ಮಧ್ಯಕಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧವು $(ab)^{n/2}$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

10. ಎರಡು ಧನಾತ್ಮಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಸಮಾಂತರ ಮತ್ತು ಗುಣೋತ್ತರ ಮಧ್ಯಕಗಳ ಮೊತ್ತ 96. ಮತ್ತು ಈ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಪ್ರಮಾಣ 9:1 ಆದರೆ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಯಾವುವು?

11. ಎರಡು ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾದ a,bಗಳ ನಡುವೆ a_1, a_2 ಗಳು $A.M.$ಗಳಾಗಿಯೂ h_1, h_2ಗಳು $H.M.$ಗಳಾಗಿಯೂ ಮತ್ತು g_1, g_2 ಗಳು $G.M.$ಗಳಾಗಿಯೂ ಇದ್ದರೆ $a_1h_2 = a_2h_1 = g_1g_2 = ab$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

    [ಇಲ್ಲಿ $A.M$ = ಸಮಾಂತರ ಮಧ್ಯಕಗಳು, $H.M$ = ಸಂಗತ ಮಧ್ಯಕಗಳು ಮತ್ತು $G.M$ = ಗುಣೋತ್ತರ ಮಧ್ಯಕಗಳು.]

12. (i) x, y ಎಂಬ ಎರಡು ಧನಾತ್ಮಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ $A.M, G.M$ ಮತ್ತು $H.M$ ಗಳು $G.P$ ಆಗಿರುತ್ತವೆ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

    (ii) ಈ $G.P$ ಯ ಸಾಮಾನ್ಯ ಪ್ರಮಾಣ $\frac{3}{5}$ ಆದರೆ $\frac{x}{y}$ ಬೆಲೆ ಏನು?

13. aಯು b ಮತ್ತು c ಗಳ ನಡುವಿನ $A.M$ ಆಗಿದೆ. bಯು c ಮತ್ತು a ಗಳ $G.M$ ಆಗಿದೆ ಆಗ cಯು a ಮತ್ತು b ಗಳ $H.M.$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

14. a ಮತ್ತು c ಗಳ ನಡುವೆ b ಯು ಸಮಾಂತರ ಮಧ್ಯಕ ಆದರೆ $b^2(a+c)$ಯು, $a^2(b+c)$ ಮತ್ತು $c^2(a+b)$ ಗಳ ನಡುವೆ ಸಮಾಂತರ ಮಧ್ಯಕ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

15. ಎರಡು ಸಂಖ್ಯೆಗಳ $A.M$ ಆ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ $G.M$ ಗಿಂತ 2 ಹೆಚ್ಚಾಗಿದೆ ಮತ್ತು $H.M$ ಆ ಎರಡು ಸಂಖ್ಯೆಗಳಲ್ಲಿ ದೊಡ್ಡದರ $\frac{1}{5}$ ಭಾಗವಾಗಿದೆ. ಎರಡು ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಯಾವುವು?

16. a, b, c, d, e ಗಳು $G.P$ ಆಗಿದೆ. ಆಗ $(b+d)$ಯು $(a+c)$ ಮತ್ತು $(c+e)$ಗಳ $G.M$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

ಅಧ್ಯಾಯ-3

ಗಣಿತಾನುಮಾನ

3.1 ಗಣಿತಾನುಮಾನದಿಂದ ಸಾಧನೆಯ ಕ್ರಮ

ಗಣಿತ ಶಾಸ್ತ್ರದಲ್ಲಿ ಧನ ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳಿರುವ ಕೆಲವು ಪ್ರಮೇಯಗಳನ್ನು ಸಾಧಿಸಲು ಅಥವಾ ಒಂದು ಸೂತ್ರವು ಸತ್ಯವಾಗಿದೆ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಲು ಬಳಸುವ ಹಲವು ವಿಧಗಳಲ್ಲಿ ಗಣಿತಾನುಮಾನವೂ ಒಂದು ವಿಧ.

ಗಣಿತಾನುಮಾನದಿಂದ ಸಾಧನೆಯ ಕ್ರಮವು ಮೂರು ಹಂತಗಳನ್ನು ಒಳಗೊಂಡಿದೆ:

(i) ಮೊದಲನೆಯ ಹಂತದಲ್ಲಿ ದತ್ತ ಸೂತ್ರವನ್ನು nನ ಅತಿ ಚಿಕ್ಕ ಬೆಲೆಗಳೊಂದಿಗೆ ಅಂದರೆ $n = 1, 2, 3, ...$ ಇವುಗಳಲ್ಲಿ ಯಾವ ಕನಿಷ್ಠ ಸಂಖ್ಯೆಗೆ ತಾಳೆ ಹೊಂದುವುದು ಎಂದು ನೋಡುವುದು.

(ii) ಸೂತ್ರವು nನ ಯಾವುದೇ ಬೆಲೆ $n = m$ಗೆ ಸತ್ಯವಾಗಿದ್ದರೆ nನ ಮುಂದಿನ ಬೆಲೆಯಾದ $n=m+1$ಗೂ ಸಹ ಇದು ಸತ್ಯವಾಗಿದೆ ಎಂದು ತೋರಿಸುವುದು.

(iii) ನಿರ್ಧಾರ : ಸೂತ್ರವು $n=1,2,3,....$ ಬೆಲೆಗಳಲ್ಲಿ ಒಂದು ಕನಿಷ್ಠ ಸಂಖ್ಯೆಗೆ ಸತ್ಯವಾಗಿದೆ ಎಂದು (i)ರಿಂದ ನಮಗೆ ತಿಳಿದಿದೆ. ಉದಾಹರಣೆಗೆ, ಇದು $n=1$ ಕ್ಕೆ ಸತ್ಯವಾಗಿದ್ದರೆ (ii)ರಿಂದ $n=2$ ಕ್ಕೂ ಸತ್ಯವಾಗುವುದು; $n=2$ ಕ್ಕೆ ಸತ್ಯವಾಗಿರುವುದರಿಂದ $n=3$ ಕ್ಕೂ ಸತ್ಯವಾಗುವುದು. ಇದೇ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ $n=4$ಕ್ಕೂ ಸತ್ಯವಾಗುವುದು ಮತ್ತು ಹೀಗೆಯೇ ಎಲ್ಲ ಧನ ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳಿಗೂ ಸತ್ಯವಾಗಿದೆ.

ಉದಾಹರಣೆಗಳು

1. ಗಣಿತಾನುಮಾನ ಕ್ರಮದಿಂದ ಸಾಧಿಸಿ :

$$1+2+3+........+n = \frac{n(n+1)}{2}$$

ಈಗ, $1+2+3+........+n = \frac{n(n+1)}{2}$

ಎಂದು ಸಾಧಿಸಬೇಕಾಗಿರುವ ಫಲಿತಾಂಶವು $p(n)$ ಇರಲಿ.

ಹಂತ (i) :

$$p(1) : 1 = \frac{1(1+1)}{2}$$

$\therefore p(1)$ ಸತ್ಯವಾಗಿದೆ.

$p(2) : 1 + 2 = 3 = \frac{2(2+1)}{2}$

$p(2)$ ಸತ್ಯವಾಗಿದೆ.

$\therefore$ $p(3)$ ಯ ಎಡಭಾಗ $= 1 + 2 + 3 = 6$

ಮತ್ತು ಬಲಭಾಗ

$$\frac{3(3+1)}{2} = 6$$

$\therefore$ $p(3)$ ಸತ್ಯವಾಗಿದೆ.

ಆದ್ದರಿಂದ, $p(n)$ ಗಣಿತವಾಕ್ಯವು $n = 1, 2, 3$ ಗಳಿಗೆ ಸತ್ಯವಾಗಿದೆ.

[**ಸೂಚನೆ:** $n =$ 1ಗೆ ತಾಳೆ ನೋಡಿದ ನಂತರ $n = 2, n = 3$ಗಳ ಆವಶ್ಯಕತೆ ಇಲ್ಲ.]

ಹಂತ (ii) :

$p(n)$ ಗಣಿತವಾಕ್ಯವು $n = m$ ಆದಾಗ ಸತ್ಯವಾಗಿದೆ ಎಂದು ಭಾವಿಸೋಣ. ಅಂದರೆ

$$1 + 2 + 3 + \ldots\ldots + m = \frac{m(m+1)}{2}$$

ಇದು $n = m + 1$ ಆದಾಗ $p(n)$ ಸತ್ಯವಾಗಿದೆಯೇ ಎಂದು ಪರೀಕ್ಷಿಸೋಣ.

$p(m)$ ನ ಎಡಭಾಗದ ಕೊನೆಯ ಪದ $(m + 1)$.

ಈ $(m + 1)$ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು $p(m)$ ನ ಎರಡು ಕಡೆಯೂ ಸೇರಿಸಿದಾಗ

$$1 + 2 + 3 + \ldots\ldots + m + (m+1) = \frac{m(m+1)}{2} + (m+1)$$

ಎಂದಾಗುವುದು.

ಬಲಭಾಗವನ್ನು ಸರಳಗೊಳಿಸಿದಾಗ

$$\frac{m(m+1)}{2} + (m+1) = (m+1)\left[\frac{m}{2} + 1\right]$$

$$= \frac{(m+1)(m+2)}{2}$$

ಎಂದಾಗುವುದು. ಅಂದರೆ $p\,(m + 1)$ ಸತ್ಯ.

$p(m)$ ಸತ್ಯವಾದರೆ $p(m+1)$ ಸಹ ಸತ್ಯವಾಗಿದೆ ಎಂದಾಯಿತು.

ಹಂತ (iii) (ನಿರ್ಧಾರ) :

ಹಂತ (i) ರಿಂದ $p\,(1), p\,(2)$ ಮತ್ತು $p\,(3)$ ಸತ್ಯವಾಗಿವೆ. ಹಂತ (ii) ರಿಂದ $p(4)$ ಸಹ ಸತ್ಯ. $p(4)$ ಸತ್ಯ ಆದ್ದರಿಂದ $p(5)$ ಸತ್ಯ. ಇದೇ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ nನ ಎಲ್ಲಾ ಧನಾಂಕಗಳಿಗೂ $p(n)$ ಸತ್ಯವಾಗಿದೆ.

ಸೂಚನೆ : ಮೇಲಿನ ಉದಾಹರಣೆಯಲ್ಲಿ $p(1)$, $p(2)$, $p(3)$ ಗಣಿತೋಕ್ತಿಗಳ ಸತ್ಯತೆಗಾಗಿ ತಾಳೆ ನೋಡಲಾಗಿದೆ. ಆದರೆ ವಾಸ್ತವವಾಗಿ ಯಾವ ಕನಿಷ್ಠ ಧನಪೂರ್ಣಾಂಕಕ್ಕೆ ತಾಳೆ ನೋಡುವದರಿಂದ ಫಲಿತಾಂಶವು ಸತ್ಯವಾಗಿರುವುದೋ ಅಲ್ಲಿಂದ ಮುಂದಿನ ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳಿಗೆಲ್ಲಾ ಸತ್ಯವಾಗಿರುತ್ತದೆ.

2. ಗಣಿತಾನುಮಾನ ಕ್ರಮದಿಂದ ಸಾಧಿಸಿ :

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \dots\dots\dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

ಹಂತ (i) :

ದತ್ತ ವಾಕ್ಯ $p(n)$ ಇರಲಿ. $n = 1$ ಆದಾಗ, $p(n)$ನ ಎಡಭಾಗ

$$1^2 = 1$$

ಮತ್ತು ಬಲಭಾಗ

$$\frac{1(1+1)(2.1+1)}{6} = \frac{1.2.3}{6} = \frac{6}{6} = 1$$

$\therefore p(1)$ ಸತ್ಯ.

ಹಂತ (ii) :

$p(m)$ ಸತ್ಯವಾಗಿದೆ ಎಂದು ಭಾವಿಸಿದರೆ,

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots\dots + m^2 = \frac{m(m+1)(2m+1)}{6}$$

ಈಗ $p(m+1)$ ಸತ್ಯ ಎಂದು ತೋರಿಸಬೇಕಾಗಿದೆ.

$(m+1)^2$ ನ್ನು ಎರಡು ಕಡೆಯೂ ಸೇರಿಸಿದಾಗ $p(m+1)$ ಉಕ್ತಿಯು

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots\dots + (m+1)^2 = \frac{m(m+1)(2m+1)}{6} + (m+1)^2$$

ಎಂದಾಗುತ್ತದೆ.

$p(m+1)$ ನ ಬಲಭಾಗ

$$= \left(\frac{m+1}{6}\right)[m(2m+1) + 6(m+1)]$$

$$= \left(\frac{m+1}{6}\right)(2m^2 + 7m + 6)$$

$$= \frac{(m+1)(m+2)(2m+3)}{6}$$

$$= \frac{(m+1)(m+2)[2(m+1)+1]}{6}$$

ಅಂದರೆ

$$1^2 + 2^2 + ... + (m+1)^2 = (m+1)(m+2)\,[2(m+1)+1]/6$$

$p(m)$ ಸತ್ಯವಾದಾಗ $p(m+1)$ ಸಹ ಸತ್ಯವಾಗಿದೆ ಎಂದಾಯಿತು.

ಹಂತ (iii) :

ಹಂತ (i) ರಿಂದ $p(1)$ ಸತ್ಯವಾಗಿದೆ.

(ii)ನೇ ಹಂತದಿಂದ $p(2)$, ಹಾಗೂ ಇದರಿಂದಾಗಿ $p(3), p(4), ...$
ಇದೇ ರೀತಿ ಮುಂದುವರೆಸುತ್ತಾ nನ ಎಲ್ಲ ಧನ ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳಿಗೂ $p(n)$ಸತ್ಯವಾಗಿರುತ್ತದೆ.

3. ಗಣಿತಾನುಮಾನ ಕ್ರಮದಿಂದ ಸಾಧಿಸಿ :

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + n^3 = \frac{n^3(n+1)^2}{6}$$

ಹಂತ (i) :

$n = 1$ ಆದರೆ $p(1)$ನ ಎಡಭಾಗ $1^3 = 1$

ಹಾಗೂ ಬಲಭಾಗ

$$\frac{1^2(1+1)^2}{4} = \frac{1.4}{4} = 1 \qquad \therefore p(1) \text{ ಸತ್ಯ.}$$

ಎಂದಾಗುವುದು.

ಹಂತ (ii) :

$n = m$ ಆದಾಗ $p(m)$ ಸತ್ಯವಾಗಿದೆ ಎಂದು ಇರಲಿ. ಅಂದರೆ

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + m^3 = \frac{m^2(m+1)^2}{4}$$

$n = m + 1$ ಆದಾಗ $(m+1)^3$ ನ್ನು ಎರಡು ಕಡೆಗೂ ಸೇರಿಸಬೇಕು.

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + ...+ m^3 + (m+1)^3 = \frac{m^2(m+1)^2}{4} + (m+1)^3$$

$$= \frac{(m+1)^2[m^2 + 4m + 4]}{4}$$

$$= \frac{(m+1)^2(m+2)^2}{4}$$

$\therefore p(m+1)$ ಸತ್ಯ

ಅಂದರೆ $p(m)$ ಸತ್ಯವಾದರೆ $p(m+1)$ ಸಹ ಸತ್ಯ.

ಹಂತ (iii) (ನಿರ್ಧಾರ) :

ಹಂತ (i) ರಿಂದ $p(1)$ ಸತ್ಯ.

ಹಂತ (ii) ರಿಂದ $p(2)$, $p(3)$, ...

ಇದೇ ರೀತಿ ಮುಂದುವರೆಸುತ್ತಾ nನ ಎಲ್ಲಾ ಧನ ಪೂರ್ಣಾಂಕ ಬೆಲೆಗಳಿಗೂ $p(n)$ ಸತ್ಯವಾಗಿದೆ.

ಸೂಚನೆ : ಮೇಲಿನ ಉದಾಹರಣೆಗಳಲ್ಲಿ ಪರಿಗಣಿಸಲಾದ ಎಡಭಾಗದ ಮೊತ್ತಗಳನ್ನು $\sum n$, $\sum n^2$, $\sum n^3$ ಎಂದು ಸೂಚಿಸಲಾಗುವುದು.

3.2 $\sum n$, $\sum n^2$, $\sum n^3$ ಗಳನ್ನು ಆಧರಿಸಿದ ಮೊತ್ತಗಳು

ಈ ಮೇಲೆ ಚರ್ಚಿಸಲಾದ ಮೂರು ಉದಾಹರಣೆಗಳಲ್ಲಿರುವ ಶ್ರೇಢಿಗಳನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿಕೊಂಡು ಅನೇಕ ಇತರ ಶ್ರೇಢಿಗಳ ಮೊತ್ತಗಳನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಬಹುದು.

ಉದಾಹರಣೆಗಳು

1. $1.3.5 + 3.6.8 + 5.9.11 + ...$ ಈ ಶ್ರೇಢಿಯ n ಪದಗಳ ಮೊತ್ತವೇನು?

ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಶ್ರೇಢಿಯ ಪದಗಳ ಮೊದಲನೆಯ ಅಪವರ್ತನಗಳು

$1, 3, 5, ...$ ಒಂದು $A.P$ ಆಗಿದೆ.

ಇದರಲ್ಲಿ, $a = 1$ ಮತ್ತು $d = 2$. ಆದ್ದರಿಂದ

n ನೆಯ ಪದ $= 1 + (n-1)\,2 = 2n - 1$

ಎರಡನೆಯ ಅಪವರ್ತನಗಳು

$3, 6, 9, ...$ ಒಂದು $A.P$ ಆಗಿದೆ.

ಇದರಲ್ಲಿ $a = 3$ ಮತ್ತು $d = 3$ ಆದ್ದರಿಂದ

nನೆಯ ಪದ, $a + (n-1)\,d = 3 + (n-1)\,3$

$= 3 + 3n - 3$

$= 3n.$

ಮೂರನೆಯ ಅಪವರ್ತನಗಳು

$5, 8, 11, ...$ ಒಂದು $A.P.$

ಇದರಲ್ಲಿ $a = 5$ ಮತ್ತು $d = 3$ ಆದ್ದರಿಂದ

n ನೆಯ ಪದ $= 5 + (n-1)\,3 = 3n + 2$

ಹೀಗಾಗಿ, ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಶ್ರೇಢಿಯ nನೆಯ ಪದವನ್ನು u_n ಎಂದು ಕರೆದರೆ

$$u_n = (2n-1).3n.(3n+2)$$
$$= 3(6n^3+n^2-2n)$$

ಆದ್ದರಿಂದ ಶ್ರೇಢಿಯ ಮೊತ್ತ

$$S_n = \sum u_n$$
$$= 3[6\sum n^3 + \sum n^2 - 2\sum n]$$
$$= 18\sum n^3 + 3\sum n^2 - 6\sum n$$
$$= 18.\frac{n^2(n+1)^2}{4} + 3.\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - 6.\frac{n(n+1)}{2}$$
$$= \frac{n(n+1)}{2}[9n(n+1) + (2n+1) - 6]$$
$$= \frac{n(n+1)}{2}[9n^2 + 11n - 5]$$

2. n ಪದಗಳ ಮೊತ್ತ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ :

$$\frac{1^3}{1} + \frac{1^3+2^3}{1+1} + \frac{1^3+2^3+3^3+\ldots}{1+2+3+\ldots}$$

ಈ ಶ್ರೇಢಿಯಲ್ಲಿ n ನೇ ಪದ

$$u_n = \frac{1^3+2^3+3^3+\ldots}{1+2+3+\ldots}$$
$$= \frac{\sum n^3}{\sum n}$$
$$= \frac{n^2(n+1)^2/4}{n(n+1)/2}$$
$$= n\,(n+1)\,/\,2$$
$$= \tfrac{1}{2}(n^2+n).$$
$$\therefore\ S_n = \tfrac{1}{2}\sum n^2 + \tfrac{1}{2}\sum n$$

$$= \frac{1}{2}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{1}{2}\frac{n(n+1)}{2}$$

$$= (1/12)\ n(n+1)\,[2n+1+3]$$

$$= (1/12)\ n\,(n+1)\,(2n+4)$$

$$= (1/6)\ n\,(n+1)\,(n+2)$$

3. ಸಮಾಂತರ ಶ್ರೇಢಿಯಲ್ಲಿರುವ n ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ವರ್ಗಗಳ ಮೊತ್ತವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಸಂಖ್ಯೆಗಳು $a, (a+d), (a+2d), \ldots\ldots\ \{a+(n-1)\,d\}$ ಇರಲಿ.

ಈ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ವರ್ಗಗಳ ಮೊತ್ತ (n ಪದಗಳವರೆಗೆ)

$$a^2 + (a+d)^2 + (a+2d)^2 + (a+3d)^2 + \ldots + \{a+(n-1)\,d\}^2$$

$$= a^2$$

$$+ a^2 + 2ad + d^2$$

$$+ a^2 + 2.2ad + (2d)^2$$

$$+ a^2 + 2.3ad + (3d)^2$$

$$+ a^2 + 2.4ad + (4d)^2$$

. . . .

. . . .

$$+ a^2 + 2(n-1)ad + (n-1)d^2$$

$$= na^2 + 2ad\ \{1 + 2 + 3 + \ldots\ (n-1) + d^2\{\,1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + \{(n-1)^2\}$$

$$= na^2 + n(n-1)ad + \frac{1}{6}n(n-1)(2n-1)d^2$$

$$= \frac{n}{6}[6a^2 + 6(n-1)ad + (n-1)(2n-1)d^2].$$

ಅಭ್ಯಾಸ 3

A ಈ ಕೆಳಗೆ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಫಲಿತಾಂಶಗಳನ್ನು ಗಣಿತಾನುಮಾನದಿಂದ ಸಾಧಿಸಿ :

1. $1.2 + 2.5 + 3.8 + 4.11 + \ldots$ n ಪದಗಳು

$= n^2(n+1)$

2. $1.3 + 3.5 + 5.7 + 7.9 + ... + (2n-1)(2n+1)$
$= \frac{1}{3} n(4n^2 + 6n - 1)$

3. $1.2.2 + 2.3.3 + 3.4.4 + ... + n.(n+1)(n+1)$
$= \frac{n(n+1)}{12}(3n^2 + 11n + 10)$

4. $1.2 + 3.4 + 5.6 + ... + (2n-1)(2n)$
$= \frac{n(n+1)(4n-1)}{3}$

5. $1 + 3 + 5 + 7 + ... + (2n-1) = n^2$

6. $1^2 + 3^2 + 5^2 + ...+(2n-1)^2 = \frac{n(4n^2-1)}{3}$

7. $1^2 + 4^2 + 7^2 + ...+(3n-2)^2 = \frac{n}{2}(6n^2 - 3n - 1)$

8. $1^3 + 3^3 + 5^3 + ...+(2n-1)^3 = n^2(2n^2 - 1)$

9. $\frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + ... + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}$

10. $\frac{1}{3.5} + \frac{1}{5.7} + \frac{1}{7.9} + ... + \frac{1}{(2n+1)(2n+3)} = \frac{n}{3(2n+3)}$

11. $a + ar + ar^2 + \ldots + ar^{r-1} = \frac{a(1-r^n)}{1-r} \quad (r \neq 1)$

12. $1 + 3 + 3^2 + \ldots + 3^{n-1} = \frac{3^n - 1}{2}$

B. $\Sigma n, \Sigma n^2$ ಇತ್ಯಾದಿಗಳ ಸೂತ್ರಗಳನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಈ ಕೆಳಗೆ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಶ್ರೇಢಿಗಳ ಮೊತ್ತಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ:

1. $1.4 + 3.7 + 5.10 + 7.13 + ...$ n ಪದಗಳು

2. $2.5 + 3.7 + 4.9 + 5.11 + \ldots\ldots n$ ಪದಗಳು

3. $1.2 + 2.3 + 3.4 + \ldots\ldots n$ ಪದಗಳು

4. $1.2 + 4.5 + 7.8 + \ldots\ldots n$ ಪದಗಳು

5. $1.2.3 + 2.3.4 + 3.4.5 + \ldots\ldots n$ ಪದಗಳು

6. $2^2 + 4^2 + 6^2 + \ldots\ldots$ n ಪದಗಳು.

7. $10^2 + 11^2 + 12^2 + \ldots\ldots + 23^2 + 24^2$

8. $2^3 + 5^3 + 8^3 + \ldots\ldots n$ ಪದಗಳು

9. $1^2 + (1^2 + 2^2) + (1^2 + 2^2 + 3^2) + \ldots\ldots$ n ಪದಗಳು.

10. $\frac{1^3}{1} + \frac{1^3 + 2^3}{2} + \frac{1^3 + 2^3 + 3^3}{3} + \ldots$ n ಪದಗಳು.

11. $1^2.2 + 3^2.4 + 5^2.6 + \ldots\ldots$ n ಪದಗಳು.

12. $2.3^2 + 4.5^2 + 6.7^2 + \ldots\ldots n$ ಪದಗಳು.

13. $1 + (1 + 2) + (1 + 2 + 3) + \ldots\ldots n$ ಪದಗಳು.

14. $1 + (3 + 5) + (7 + 9 + 11) + \ldots\ldots$ n ಪದಗಳು.

15. $\dfrac{2.4.6 + 4.6.8 + 6.8.10 \ldots\ldots n \text{ ಪದಗಳು}}{1.5 + 2.8 + 3.11 \ldots\ldots n \text{ ಪದಗಳು}}$ ಇದರ ಬೆಲೆ ಏನು?

16. ಕೆಳಗೆ ಕೊಟ್ಟಿರುವ n ನೇ ಪದವನ್ನು ಉಳ್ಳ ಶ್ರೇಢಿಗಳ n ಪದಗಳ ಮೊತ್ತಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ:
   (i) $8n^3 + 4n^2 - 4n$
   (ii) $(n + 2)(2n + 1)(3n - 7)$
   (iii) $4^n + 3n$
   (iv) $3 + 4 + 5 + \ldots (n + 2)$

ಅಧ್ಯಾಯ 4

ಸಮೀಕರಣಗಳ ಸಿದ್ಧಾಂತ

4.1.1 ವರ್ಗಸಮೀಕರಣಗಳ ಪುನರ್ನಿರೂಪಣೆ

ಏಕ ಚರಾಕ್ಷರದ ಒಂದು ಸಾಮಾನ್ಯ ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು

$$ax^2 + bx + c = 0 \qquad ...(1)$$

ಎಂಬ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಬರೆಯಬಹುದು; ಇಲ್ಲಿ $a \neq 0$.

ಸಮೀಕರಣ (1)ರ ಮೂಲಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು ಭಾರತೀಯ ಗಣಿತಜ್ಞ **ಶ್ರೀಧರಾಚಾರ್ಯನ** (ಕ್ರಿ.ಶ.9-10ನೇ ಶತಮಾನ) ವಿಧಾನವನ್ನು ಬಳಸಬಹುದು :

ಸಮೀಕರಣ (1)ನ್ನು $4a$ ಇಂದ ಗುಣಿಸಿದಾಗ

$$4a^2x^2 + 4abx + 4ac = 0$$

ಅಥವಾ

$$4a^2x^2 + 4abx = -4ac$$

ಎಂದಾಗುತ್ತದೆ. ಎರಡು ಭಾಗಗಳಿಗೂ b^2 ಕೂಡಿಸಿದರೆ

$$(2ax)^2 + 2(2ax)(b) + b^2 = b^2 - 4ac$$

ಎಂದಾಗುತ್ತದೆ. ಅಂದರೆ

$$(2ax + b)^2 = b^2 - 4ac$$

ಅಥವಾ $2ax + b = \pm\sqrt{b^2 - 4ac}$

ಅಥವಾ $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ ... (2)

ಎಂಬ ಸೂತ್ರವು ದೊರೆಯುತ್ತದೆ. ಈ ಸೂತ್ರದಿಂದ ಸಮೀಕರಣ (1) ರ ಎರಡು ಮೂಲಗಳನ್ನು ಪಡೆಯಬಹುದು.

4.1.2. ವರ್ಗಸಮೀಕರಣದ ಮೂಲಗಳ ಸ್ವಭಾವ

ಸೂತ್ರ (2) ರಿಂದಾಗಿ ಸಮೀಕರಣ (1)ರ ಎರಡು ಮೂಲಗಳನ್ನು

$$\alpha = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$ ಮತ್ತು

$$\beta = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

ಎಂಬುದಾಗಿ ಪಡೆಯುತ್ತೇವೆ.

ಇಲ್ಲಿ a, b, c ಗಳು ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳೆಂದೂ, $a \neq 0$ ಎಂದೂ ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೆ, **ಶೋಧಕ** $(b^2 - 4ac)$ ಎಂಬುದು (i) ಧನವಾಗಿಯೋ (ii) ಋಣವಾಗಿಯೋ ಅಥವಾ (iii) ಸೊನ್ನೆಯಾಗಿಯೋ ಇರಬಹುದು. ಈ ಮೂರು ಸಂದರ್ಭಗಳಲ್ಲಿ ಮೂಲಗಳ ಸ್ವಭಾವ ಈ ಕೆಳಕಂಡಂತಿವೆ:

ಸಂದರ್ಭ (i) : ಶೋಧಕ $b^2 - 4ac = 0$. ಆಗ, ಮೂಲಗಳಾದ α ಮತ್ತು β ಎರಡೂ ವಾಸ್ತವವಾಗಿಯೂ ಮತ್ತು ಪ್ರತ್ಯೇಕವಾಗಿಯೂ ಇರುತ್ತವೆ.

ಸಂದರ್ಭ (ii) : ಶೋಧಕ $b^2 - 4ac = 0$. ಆಗ, ಮೂಲಗಳಾದ α ಮತ್ತು β ಎರಡೂ ವಾಸ್ತವವಾಗಿಯೂ ಮತ್ತು ಸಮನಾಗಿಯೂ ಇರುತ್ತವೆ. ಅಂದರೆ,

$$\alpha = \beta = \frac{-b}{2a}$$ ಆಗಿರುತ್ತದೆ.

ಸಂದರ್ಭ (iii) : ಶೋಧಕ $b^2 - 4ac < 0$. ಈ ಸಂದರ್ಭದಲ್ಲಿ α ಮತ್ತು β ಮೂಲಗಳೆರಡೂ ಮಿಶ್ರ ಊಹ್ಯವಾಗಿರುತ್ತವೆ. ಅಂದರೆ, ಅವುಗಳು $(g \pm ih)$ ರೂಪದಲ್ಲಿರುತ್ತವೆ. ಇಲ್ಲಿ g ಮತ್ತು h ಎರಡು ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾಗಿದ್ದು, $i = \sqrt{-1}$ ಎಂಬುದು ಊಹ್ಯಮಾನವಾಗಿದೆ.

ಉದಾಹರಣೆಗಳು

1. "ಎಲೈ ಬಾಲೆ, ಹಂಸ ಸಮೂಹದ ವರ್ಗಮೂಲದ ಅರ್ಧದ ಏಳರಷ್ಟು ಹಂಸಗಳು ನದಿಯ ತೀರದಲ್ಲಿ ವಿಲಾಸದಿಂದಾಗಿ ಆಯಾಸಗೊಂಡು ಮೆಲ್ಲಮೆಲ್ಲನೆ ನಡೆಯುತ್ತಿದ್ದವು. ಉಳಿದ ಎರಡು ಹಂಸಗಳು ನೀರಿನಲ್ಲಿ ಪ್ರೇಮ ಕಲಹದಲ್ಲಿ ತೊಡಗಿದ್ದರೆ, ಸಮೂಹದಲ್ಲಿದ್ದ ಹಂಸಗಳ ಒಟ್ಟು ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಹೇಳು" — (ಭಾಸ್ಕರಾಚಾರ್ಯರ ***ಲೀಲಾವತಿ***)

ಸಮೂಹದಲ್ಲಿದ್ದ ಹಂಸಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ x ಆಗಿರಲಿ. ಆಗ

ನದಿಯ ತೀರದಲ್ಲಿದ್ದ ಹಂಸಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ $= \frac{7}{2}\sqrt{x}$

ಮತ್ತು ನೀರಿನಲ್ಲಿದ್ದ ಹಂಸಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ $= 2$

ಹಂಸಗಳ ಒಟ್ಟು ಸಂಖ್ಯೆ $= \frac{7}{2}\sqrt{x} + 2$

ಈ ಸಂಖ್ಯೆಯು ಸಮೂಹದಲ್ಲಿದ್ದ ಹಂಸಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಗೆ ಸಮವಾಗಿದೆ. ಅಂದರೆ

$$\frac{7}{2}\sqrt{x} + 2 = x$$

ಎಂಬ ಸಮೀಕರಣವು ಉಂಟಾಗುತ್ತದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ

$$\frac{7}{2}\sqrt{x} = x - 2$$

ವರ್ಗವನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳುವುದರಿಂದ

$$\frac{49x}{4} = (x-2)^2 \text{ ಅಥವಾ } 4x^2 - 65x + 16 = 0$$

ಎಂದಾಗುತ್ತದೆ. ಎಡಭಾಗವನ್ನು ಅಪವರ್ತಿಸಿದಾಗ

$$(4x-1)(x-16) = 0$$

ಅಥವಾ $x = 1/4$ ಮತ್ತು $x = 16$ ಎಂಬ ಮೂಲಗಳು ದೊರೆಯುತ್ತವೆ. ಇಲ್ಲಿ x ಎಂಬುದು ಹಂಸಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ (ಅಂದರೆ ಧನ ಪೂರ್ಣಾಂಕ) ವಾಗಿರುವುದರಿಂದ, $x = 1/4$ ಎಂಬ ಮೂಲವು ಗ್ರಾಹ್ಯವಲ್ಲ. ಸರಿಯಾದ ಉತ್ತರ $x = 16$ ಎಂಬುದು.

2. ಆನೆಗಳ ಒಂದು ಹಿಂಡಿನ 1/3 ಭಾಗ ಮತ್ತು ಉಳಿದ ಭಾಗದ ವರ್ಗಮೂಲದ ಮೂರರಷ್ಟು ಬೆಟ್ಟದ ತಪ್ಪಲಿನಲ್ಲಿತ್ತು. ಒಂದು ಸಲಗವು (ಗಂಡು ಆನೆ) ಸರೋವರದಲ್ಲಿ ಮೂರು (ಹೆಣ್ಣು) ಆನೆಗಳೊಂದಿಗೆ ರಾಸಕ್ರೀಡೆಯಾಡುತ್ತಿದ್ದರೆ, ಹಿಂಡಿನಲ್ಲಿದ್ದ ಆನೆಗಳ ಒಟ್ಟು ಸಂಖ್ಯೆ ಎಷ್ಟು? — (ಮಹಾವೀರಾಚಾರ್ಯರ ***ಗಣಿತಸಾರ ಸಂಗ್ರಹ***).

ಹಿಂಡಿನಲ್ಲಿದ್ದ ಒಟ್ಟು ಆನೆಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ x ಆಗಿರಲಿ. ಆಗ

$$\frac{x}{3} + 3\sqrt{(2/3)x} + 1 + 3 = x$$

ಎಂದಾಗುತ್ತದೆ. ಅಂದರೆ

$$3\sqrt{(2/3)x} = \frac{2x}{3} - 4$$

ಎಂಬುದಾಗಿಯೂ, ಆನಂತರ ವರ್ಗವನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳುವುದರಿಂದ

$$9\left(\frac{2x}{3}\right) = \frac{4(x-6)^2}{9}$$

ಅಥವಾ $2x^2 - 51x + 72 = 0$

ಎಂಬ ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣ ಉಂಟಾಗುವುದು. ಇದನ್ನು ಅಪವರ್ತಿಸಿದಾಗ

$$(2x-3)(x-24) = 0$$

ಅಥವಾ $x = 3/2$ ಮತ್ತು $x = 24$ ಎಂಬ ವರ್ಗಮೂಲಗಳು ದೊರೆಯುತ್ತವೆ. ಅವುಗಳ ಪೈಕಿ $x = 24$ ಎಂಬುದು ಗ್ರಾಹ್ಯವಾದ ಉತ್ತರ.

4.1.3. ವರ್ಗಸಮೀಕರಣದ ಮೂಲಗಳ ಸಮಾಂಗ ಉತ್ಪನ್ನಗಳು

$f(\alpha, \beta)$ ಎಂಬ ಬೆಲೆಯು, α ಮತ್ತು β ಗಳನ್ನು ಪರಸ್ಪರ ಬದಲಾಯಿಸಿದಾಗ, ವ್ಯತ್ಯಾಸವಾಗದಿದ್ದರೆ $f(\alpha, \beta)$ ವನ್ನು α ಮತ್ತು β ಗಳ ಒಂದು ಸಮಾಂಗ ಉತ್ಪನ್ನವೆಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ.

ಉದಾ : $\alpha + \beta$, $\alpha\beta$, $\alpha^2 + \beta^2$

ವರ್ಗಸಮೀಕರಣ (1)ನ್ನು a ಇಂದ ಭಾಗಿಸಿ

$$x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a} = 0 \qquad \text{... (3)}$$

ಎಂದು ಬರೆಯಬಹುದು.

ಈಗ, α ಮತ್ತು βಗಳು (3)ರ ಮೂಲಗಳಾಗಿದ್ದರೆ, $(x - \alpha)$ ಮತ್ತು $(x - \beta)$ ಎಂಬುವು (3)ರ ಎಡಭಾಗದ ಅಪವರ್ತನಗಳಾಗಿರುತ್ತವೆ. ಆದ್ದರಿಂದ, ಸಮೀಕರಣ (3)ನ್ನು

$$(x - \alpha)(x - \beta) = 0$$

ಅಥವಾ

$$x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta = 0 \qquad \text{... (4)}$$

ಎಂದು ಬರೆಯಬಹುದು. ಈಗ, (3)ಮತ್ತು (4)ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಹೋಲಿಸಿ ಅನುರೂಪ ಸಹಾಂಕಗಳನ್ನು ಸಮಾನಗೊಳಿಸಿದರೆ

$$\alpha + \beta = -\frac{b}{a}, \alpha\beta = \frac{c}{a} \qquad \text{...(5)}$$

ಎಂದಾಗುತ್ತದೆ.

4.1.4. ದತ್ತ ಮೂಲಗಳಿರುವ ಸಮೀಕರಣದ ರಚನೆ

α ಎಂಬುದು $f(x) = 0$ ಎಂಬ ಸಮೀಕರಣದ ಮೂಲವಾಗಿದ್ದರೆ, ಶೇಷ ಪ್ರಮೇಯದ ಪ್ರಕಾರ $(x- a)$ ಎಂಬುದು $f(x)$ನ ಅಪವರ್ತನವಾಗಿರುತ್ತದೆ. ಅಂತೆಯೇ, β ಎಂಬುದೂ ಒಂದು ಮೂಲವಾಗಿದ್ದರೆ, $(x - \beta)$ ಎಂಬುದೂ $f(x)$ ನ ಅಪವರ್ತನವಾಗಿರುತ್ತದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ, $f(x)$ ಎಂಬುದು ಒಂದು ವರ್ಗ ಉತ್ಪನ್ನವಾಗಿದ್ದರೆ, $f(x)$ ಎಂಬುದು $(x-\alpha)(x-\beta)$ ಗೆ ಅಥವಾ ಅದರ ಒಂದು ಸ್ಥಿರ ಅಪವರ್ತ್ಯಕ್ಕೆ ಸಮನಾಗಿರುತ್ತದೆ. ಇದರಿಂದಾಗಿ, α ಮತ್ತು β ಎಂಬ ಎರಡು ಮೂಲಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿರುವ ಸಮೀಕರಣವು

$$a(x - \alpha)(x - \beta) = 0$$

ಅಥವಾ $x^2 - (\alpha+ \beta)x + \alpha \beta = 0$ .. (6)

ಎಂದಾಗುತ್ತದೆ.

ಈ ಫಲಿತಾಂಶವನ್ನು ಸರ್ವತ್ರೀಕರಿಸಿದರೆ

$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, ..., \alpha_n$ ಎಂಬ ಮೂಲಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿರುವ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು

$$(x - \alpha_1)(x - \alpha_2)......(x - \alpha_n) = 0$$

ಎಂದು ಬರೆಯಬಹುದು.

ಉದಾಹರಣೆಗಳು

1. $(-2+3\sqrt{5})$ ಮತ್ತು $(-2-3\sqrt{5})$ ಮೂಲಗಳಾಗಿರುವಂತೆ ಒಂದು ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ರಚಿಸಿ.

ಇಲ್ಲಿ, $\alpha = -2+3\sqrt{5}$ ಮತ್ತು $\beta = (-2-3\sqrt{5})$ ಆಗಿರಲಿ. ಆಗ,

$$\alpha + \beta = (-2+3\sqrt{5}) + (-2-3\sqrt{5}) = -4$$

ಮತ್ತು $\alpha\beta = (-2+3\sqrt{5})(-2-3\sqrt{5})$

$$= (-2)^2 - (3\sqrt{5})^2$$

$$= 4 - 45 = -41$$

ಎಂದಾಗುತ್ತದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ α ಮತ್ತು β ಗಳನ್ನು ಮೂಲಗಳಾಗಿ ಹೊಂದಿರುವ ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣವು

$$x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta = 0$$

ಎಂದಾಗಿರುತ್ತದೆ. ಅಂದರೆ

$$x^2 - (-4)x + (-41) = 0$$

ಅಥವಾ $x^2 + 4x + 41 = 0$ ಎಂದಾಗುತ್ತದೆ.

2. $x^2 - px + q = 0$ ಎಂಬ ಸಮೀಕರಣದ ಮೂಲಗಳು α ಮತ್ತು β ಗಳಾಗಿದ್ದರೆ, ಈ ಕೆಳಕಂಡ ಸಮಾಂಗ ಉತ್ಪನ್ನಗಳ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ :

(i) $\alpha^2 + \beta^2$

(ii) $\alpha^3 + \beta^3$

(iii) $\dfrac{\alpha^3}{\beta} + \dfrac{\beta^3}{\alpha}$ ಮತ್ತು

(iv) $\dfrac{1}{\alpha+2\beta} + \dfrac{1}{\beta+2\alpha}$

ಮೂಲಗಳಾದ α ಮತ್ತು β ಗಳ ಮೊತ್ತ ಮತ್ತು ಗುಣಲಬ್ಧಗಳು

$$\alpha + \beta = p \text{ ಮತ್ತು } \alpha\beta = q$$

ಆಗಿವೆ. ಆದ್ದರಿಂದ

(i) $\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha+\beta)^2 - 2\alpha\beta = p^2 - 2q$

(ii) $\alpha^3 + \beta^3 = (\alpha+\beta)^3 - 3\alpha\beta(\alpha+\beta) = p^3 - 3pq$

(iii) $\dfrac{\alpha^3}{\beta} + \dfrac{\beta^3}{\alpha} = \dfrac{\alpha^4+\beta^4}{\alpha\beta}$

$$= \frac{(\alpha^2+\beta^2)^2 - 2(\alpha\beta)^2}{\alpha\beta}$$

$$= \frac{(p^2-2q)^2 - 2(q^2)}{q}$$

$$= \frac{p^4 - 4p^2q + 2q^2}{q}$$

(ಫಲಿತಾಂಶ (i) ನ್ನು ಬಳಸಿಕೊಳ್ಳಲಾಗಿದೆ.)

(iv) $\frac{1}{\alpha+2\beta} + \frac{1}{\beta+2\alpha} = \frac{3(\alpha+\beta)}{(\alpha+2\beta)(\beta+2\alpha)}$

ಇಲ್ಲಿ, ಅಂಶವು $3(\alpha+\beta) = 3p$

ಮತ್ತು ಛೇದವು $(\alpha+2\beta)(\beta+2\alpha) = 5\alpha\beta + 2(\alpha^2+\beta^2)$

$$= 5q + 2(p^2 - 2q) = 2p^2 + q$$

(ಇಲ್ಲಿ ಫಲಿತಾಂಶ (i) ನ್ನು ಬಳಸಲಾಗಿದೆ).

$$\therefore \frac{1}{\alpha+2\beta} + \frac{1}{\beta+2\alpha} = \frac{3p}{2p^2+q}$$

4.1.5. ಎರಡು ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣಗಳಿಗೆ ಸಾಮಾನ್ಯ ಮೂಲಗಳು

$ax^2 + bx + c = 0$ ... (1)

ಮತ್ತು $a_1x^2 + b_1x + c_1 = 0$ ... (2)

ಎಂಬ ಎರಡು ವರ್ಗಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಪರಿಗಣಿಸಿ.

(i) ಎರಡು ಮೂಲಗಳೂ ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿರಲು ನಿರ್ಬಂಧ :

ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣ (1) ಮತ್ತು (2)ರ ಸಾಮಾನ್ಯ ಮೂಲಗಳು α ಮತ್ತು β ಆಗಿರಲಿ. ಆಗ

$$\alpha+\beta = -\frac{b}{a} = \frac{-b_1}{a_1} \quad \therefore \frac{a}{a_1} = \frac{b}{b_1} ;$$

ಮತ್ತು $\alpha\beta = \frac{c}{a} = \frac{c_1}{a_1} \quad \therefore \frac{a}{a_1} = \frac{c}{c_1}$

ಅಂದರೆ, $\frac{a}{b_1} = \frac{b}{b_1} = \frac{c}{c_1}$

ಎಂಬುದು ಎರಡು ಮೂಲಗಳೂ ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿರಲು ನಿರ್ಬಂಧ.

(ii) **ಒಂದು ಮೂಲವು ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿರಲು ನಿರ್ಬಂಧ :**

ವರ್ಗಸಮೀಕರಣವು (1) ಮತ್ತು (2)ಕ್ಕೆ α ಎಂಬುದು ಸಾಮಾನ್ಯ ಮೂಲವಾಗಿರಲಿ. ಆದ್ದರಿಂದ

$$a\alpha^2 + b\alpha + c = 0$$

$$a_1\alpha^2 + b_1\alpha + c_1 = 0$$

ಎಂದಾಗುತ್ತದೆ. ಈ ಮೇಲಿನ ಸಮೀಕರಣಗಳಿಂದ α^2 ಮತ್ತು α ಗಳನ್ನು ಬಿಡಿಸಿದರೆ

$$\alpha^2 = \frac{bc_1 - b_1c}{ab_1 - a_1b} \quad \text{ಮತ್ತು} \quad \alpha = \frac{ca_1 - c_1a}{ab_1 - a_1b}$$

ಎಂದು ದೊರೆಯುತ್ತದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ, ಈ ಮೇಲಿನ ಫಲಿತಾಂಶಗಳಿಂದಾಗಿ

$$\frac{bc_1 - b_1c}{ab_1 - a_1b} = \left(\frac{ca_1 - c_1a}{ab_1 - a_1b}\right)^2$$

ಅಥವಾ

$$(ab_1 - a_1b)(bc_1 - b_1c) = (ca_1 - a_1c)^2$$

ಎಂಬ ನಿರ್ಬಂಧವು ಉಂಟಾಗುತ್ತದೆ.

ಉದಾಹರಣೆಗಳು

1. $x^2 - \lambda x - 3 = 0$ ಮತ್ತು $x^2 + \lambda x - 15 = 0$ ಎಂಬ ಎರಡು ಸಮೀಕರಣಗಳು ಒಂದು ಸಾಮಾನ್ಯ ಮೂಲವನ್ನು ಹೊಂದಿದ್ದರೆ λದ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. ಸಾಮಾನ್ಯ ಮೂಲವನ್ನೂ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ದತ್ತ ಸಮೀಕರಣಗಳ ಸಾಮಾನ್ಯ ಮೂಲವು α ಆಗಿರಲಿ. ಆದ್ದರಿಂದ

$$\alpha^2 - \lambda\alpha - 3 = 0 \quad \ldots (1)$$

$$\alpha^2 + \lambda\alpha - 15 = 0 \quad \ldots (2)$$

ಎಂದು ದೊರೆಯುತ್ತದೆ. ಸಮೀಕರಣ (1) ಮತ್ತು (2) ರಿಂದ

$$\frac{\alpha^2}{15\lambda + 3\lambda} = \frac{\alpha}{-3 + 15} = \frac{1}{\lambda + \lambda}$$

ಅಥವಾ $\frac{\alpha^2}{18\lambda} = \frac{\alpha}{12} = \frac{1}{2\lambda}$

ಎಂದಾಗುತ್ತದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ

$$\alpha^2 = 9 \text{ ಮತ್ತು } \alpha = \frac{6}{\lambda} \text{ ಅಥವಾ } \lambda = \frac{6}{\alpha}$$

ಎಂದು ದೊರೆಯುತ್ತದೆ. ಇದರಿಂದಾಗಿ

$$\alpha = \pm 3 \text{ ಮತ್ತು } \lambda = \frac{6}{\pm 3} = \pm 2$$

ಎಂದು ಲಭಿಸುತ್ತದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ

ಈಗ (i) $\lambda = 2$ ಆದರೆ, ಸಾಮಾನ್ಯ ಮೂಲ $\alpha = 3$ ಮತ್ತು

(ii) $\lambda = -2$ ಆದರೆ, ಸಾಮಾನ್ಯ ಮೂಲ $\alpha = -3$ ಎಂದಾಗುತ್ತದೆ.

2. $x^2 + mx + 10 = 0$ ಮತ್ತು $x^2 + nx - 10 = 0$ ಎಂಬ ಸಮೀಕರಣಗಳು ಒಂದು ಸಾಮಾನ್ಯ ಮೂಲವನ್ನು ಹೊಂದಿದ್ದರೆ, $m^2 - n^2 = 40$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

ದತ್ತ ಸಮೀಕರಣಗಳ ಸಾಮಾನ್ಯ ಮೂಲವು α ಆಗಿರಲಿ. ಆಗ

$$\alpha^2 + m\alpha + 10 = 0 \quad \text{... (1)}$$

ಮತ್ತು $$\alpha^2 + n\alpha - 10 = 0 \quad \text{... (2)}$$

ಎಂದಾಗುತ್ತದೆ. ಸಮೀಕರಣ (1) ಮತ್ತು (2) ರಿಂದ α^2 ಮತ್ತು α ಗಳನ್ನು ಬಿಡಿಸಿದರೆ

$$\frac{\alpha^2}{-10m - 10n} = \frac{\alpha}{10 - (-10)} = \frac{1}{n - m}$$

ಎಂದು ದೊರೆಯುತ್ತದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ

$$\alpha^2 = \frac{-10(m+n)}{n-m} \quad \text{... (3)}$$

ಮತ್ತು $$\alpha = \frac{20}{n-m} \quad \text{... (4)}$$

(4)ರ ವರ್ಗವನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡು (3) ರೊಂದಿಗೆ ಸಮೀಕರಿಸಿದಾಗ

$$\frac{400}{(n-m)^2} = -\frac{10(m+n)}{(n-m)}$$

ಅಥವಾ $m^2 - n^2 = 40$ ಎಂದು ದೊರಕುತ್ತದೆ.

ಅಭ್ಯಾಸ - 4.1

1. "ಎಲೈ ಕಾಂತೆ, ದುಂಬಿಗಳ ಒಂದು ಸಮೂಹದಲ್ಲಿ ಅರ್ಧ ಭಾಗದ ವರ್ಗಮೂಲದಷ್ಟು ಮತ್ತು 8/9 ಭಾಗದಷ್ಟು ದುಂಬಿಗಳು ಮಾಲತೀ ಪುಷ್ಪಗಳತ್ತ ತೆರಳಿದವು. ಒಂದು ಗಂಡು ದುಂಬಿಯು ಕಮಲದ ಮಧ್ಯದಲ್ಲಿ ಅದರ ಪರಿಮಳಕ್ಕೆ ಸೋತು ಸಿಕ್ಕಿಹಾಕಿಕೊಂಡಿತು. ಈ ದುಂಬಿಯ ಝೇಂಕಾರದ ಧ್ವನಿಗೆ ಹೊರಗಡೆ ಇದ್ದ ಅದರ ಜೊತೆಯ (ಹೆಣ್ಣು) ದುಂಬಿಯು ಪ್ರತಿಧ್ವನಿಸುತ್ತಿತ್ತು. ಎಲೈ ಬಾಲೆ, ದುಂಬಿಗಳ ಒಟ್ಟು ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಹೇಳು."

   ಅಲಿಕುಲ ದಲ ಮೂಲಂ ಮಾಲತೀಂ ಯಾತಮಷ್ಟಾ
   ನಿಖಿಲ ನವಮಭಾಗಾಶ್ಚಾಲಿನೀ ಭೃಂಗಮೇಕಂ।
   ನಿಶಿ ಪರಿಮಲಲುಬ್ಧಂ ಪದ್ಮಮಧ್ಯೇ ನಿರುದ್ಧಂ
   ಪ್ರತಿರಣತಿ ರಣಂತಂ ಬ್ರೂಹಿ ಕಾಂತೇಽಲಿ ಸಂಖ್ಯಾಂ॥

   - *ಲೀಲಾವತೀ*, ಶ್ಲೋಕ 72]

2. "ವರ್ಷ ಋತುವಿನಲ್ಲಿ ಮೋಡಗಳ ಸಮೂಹದಿಂದ ಉಂಟಾದ ಸ್ಪಷ್ಟ ಧ್ವನಿಯನ್ನು ಕೇಳಿ, ನವಿಲುಗಳ ಒಂದು ಸಮೂಹದ ಹದಿನಾರನೇ ಒಂದು ಭಾಗ ಮತ್ತು ಎಂಟನೇ ಒಂದು ಭಾಗಗಳಷ್ಟು ಮತ್ತು ಉಳಿದುದರ ಮೂರನೇ ಒಂದು ಭಾಗ ಹಾಗೂ ಅನಂತರ ಉಳಿದುದರ ಆರನೇ ಒಂದು ಭಾಗಗಳಷ್ಟು ನವಿಲುಗಳು ಆನಂದಾತಿರೇಕದಿಂದ ಪರ್ವತದ ಶಿಖರವೆಂಬ ವಿಶಾಲವಾದ ನಾಟ್ಯ ಶಾಲೆಯಲ್ಲಿ ಕುಣಿಯಲಾರಂಭಿಸಿದವು. ಸಮೂಹದ ವರ್ಗಮೂಲದ ಐದರಷ್ಟು ನವಿಲುಗಳು ಬಕುಲವೃಕ್ಷಗಳ ಉತ್ಕೃಷ್ಟವಾದ ಕಾಡಿನಲ್ಲಿ ವಿಹರಿಸುತ್ತಿದ್ದವು. ಇನ್ನು ಉಳಿದ 5 ನವಿಲುಗಳು ಪುನ್ನಾಗವೃಕ್ಷದ ಮೇಲೆ ಕಾಣಲ್ಪಟ್ಟವು. ಎಲೈ ಗಣಿತಜ್ಞನೇ, ಲೆಕ್ಕ ಮಾಡಿ ಆ ಸಮೂಹದಲ್ಲಿ ಒಟ್ಟು ಎಷ್ಟು ನವಿಲುಗಳು ಇದ್ದವು ಎಂಬುದನ್ನು ಹೇಳು."

   - ಮಹಾವೀರಾಚಾರ್ಯರ ***ಗಣಿತ ಸಾರ ಸಂಗ್ರಹ.***

3. $2x^2-7x-4=0$ ಮತ್ತು $4x^2-13x+a=0$ ಎಂಬ ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣಗಳು ಒಂದು ಸಾಮಾನ್ಯ ಮೂಲವನ್ನು ಹೊಂದಿದ್ದರೆ aಯ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

4. $x^2+ax+bc=0$ ಮತ್ತು $x^2+bx+ca=0$ ಎಂಬ ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣಗಳು ಒಂದು ಸಾಮಾನ್ಯ ಮೂಲವನ್ನು ಹೊಂದಿದ್ದರೆ, ಆಗ $a=b$ ಅಥವಾ $a+b+c=0$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ. ಅಷ್ಟೇ ಅಲ್ಲದೆ, ಆ ಸಮೀಕರಣಗಳ ಮೂಲಗಳು $x^2+cx+ab=0$ ಎಂಬ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಸರಿಹೊಂದುತ್ತವೆ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

(ii) ಎರಡು ಮಿಶ್ರ ಊಹ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮೊತ್ತದ ಸಹವರ್ತಿಯು ಆ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಸಹವರ್ತಿಗಳ ಮೊತ್ತವಾಗಿರುತ್ತದೆ. ಅಂದರೆ

$$\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$$

(iii) (a) ಎರಡು ಮಿಶ್ರ ಊಹ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧದ ಸಹವರ್ತಿಯು ಆ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಸಹವರ್ತಿಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧವಾಗಿರುತ್ತದೆ. ಅಂದರೆ

$$\overline{z_1 . z_2} = \overline{z_1} . \overline{z_2}$$

(b) ಎರಡು ಮಿಶ್ರ ಊಹ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಭಾಗಲಬ್ಧದ ಸಹವರ್ತಿಯು ಆ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಸಹವರ್ತಿಗಳ ಭಾಗಲಬ್ಧವಾಗಿರುತ್ತದೆ.

$$\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$$

(iv) ಎರಡು ಪರಸ್ಪರ ಸಹವರ್ತಿ ಮಿಶ್ರ ಊಹ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮೊತ್ತವು ನೈಜಸಂಖ್ಯೆ ಆಗಿರುತ್ತದೆ. ಅಂದರೆ

$z = a + ib$ ಮತ್ತು $\overline{z} = a - ib$

ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೆ, ಆಗ

$$z + \overline{z} = (a + ib) + (a - ib) = 2a$$

ಎಂಬ ನೈಜ ಸಂಖ್ಯೆಯಾಗುತ್ತದೆ.

(v) ಎರಡು ಪರಸ್ಪರ ಸಹವರ್ತಿ ಮಿಶ್ರ ಊಹ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧವು ನೈಜ ಸಂಖ್ಯೆ ಆಗಿರುತ್ತದೆ. ಅಂದರೆ

$z = a + ib$ ಮತ್ತು $\overline{z} = a - ib$

ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೆ

$$z.\overline{z} = (a + ib)(a - ib) = a^2 + b^2$$

ಎಂಬ ನೈಜ ಸಂಖ್ಯೆ ಆಗುತ್ತದೆ.

ಸೂಚನೆ :

(1) $z = (a + ib)$ ಎಂಬ ಮಿಶ್ರ ಊಹ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆಗೆ $\sqrt{a^2 + b^2}$ ಎಂಬ ನೈಜ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಅದರ ಪರಿಮಾಣ (ಮಾಡ್ಯುಲಸ್) ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ, ಹಾಗೂ $|z|$ ಎಂದು ಸೂಚಿಸುತ್ತೇವೆ.

ಅಂದರೆ, $z = (a + ib)$ ಆಗಿದ್ದರೆ, $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ ಆಗಿರುತ್ತದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ

$$z.\overline{z} = (a + ib)(a - ib) = a^2 + b^2 = |z|^2$$

ಎಂದಾಗುತ್ತದೆ.

(2) $(a+ib)$ ಎಂಬ ಮಿಶ್ರ ಊಹ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆಯ **ಗುಣನಾತ್ಮಕ ವಿಲೋಮ** ಅಂದರೆ $(a+ib)^{-1}$:

$$(a+ib)^{-1} = \frac{1}{a+ib} = \frac{a-ib}{(a+ib)(a-ib)} = \frac{a-ib}{a^2+b^2}$$

ಅಥವಾ $(a+ib)^{-1} = \dfrac{a}{a^2+b^2} - i\dfrac{b}{a^2+b^2}$ ಎಂದಾಗುತ್ತದೆ.

ಉದಾಹರಣೆಗೆ, $(2+3i)$ ಎಂಬುದರ ವಿಲೋಮವು

$$\frac{1}{2+3i} = \frac{2}{13} - \frac{3}{13}i$$

ಎಂದಾಗುತ್ತದೆ. ಅವುಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧವು 1 ಆಗಿರುತ್ತದೆ.

4.2.3. ಐಕ್ಯಧಾತುವಿನ ವರ್ಗಮೂಲ, ಘನಮೂಲ ಮತ್ತು ಚತುರ್ಮೂಲ

(i) ಐಕ್ಯಧಾತುವಾಗಿರುವ 1ರ ವರ್ಗಮೂಲವು x ಆಗಿರಲಿ. ಆಗ

$x = 1^{1/2}$; ವರ್ಗೀಕರಿಸುವುದರಿಂದ

$$x^2 = 1 \text{ ಅಥವಾ } x^2 - 1 = 0$$

ಎಂದಾಗುತ್ತದೆ. ಅಂದರೆ, $(x+1)(x-1) = 0$ ಅಥವಾ $x = -1$, $x = 1$

ಎಂದಾಗುತ್ತದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ಐಕ್ಯಧಾತುವಿನ 1ರ ವರ್ಗಮೂಲಗಳು 1 ಮತ್ತು -1 ಆಗಿರುತ್ತವೆ.

(ii) ಐಕ್ಯಧಾತುವಿನ ಘನಮೂಲ x ಆಗಿರಲಿ. ಆಗ

$$x = 1^{1/3} \text{ ಅಥವಾ } x^3 = 1 \text{ ಅಥವಾ } x^3 - 1 = 0$$

$$\text{ಅಥವಾ } (x-1)\ (x^2+x+1) = 0$$

ಎಂದಾಗುತ್ತದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ,

$$x - 1 = 0 \text{ ಮತ್ತು } x^2 + x + 1 = 0$$

ಅಥವಾ $x = 1$ ಮತ್ತು $x = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$

ಎಂಬ ಘನಮೂಲಗಳು ದೊರೆಯುತ್ತವೆ. ಇವುಗಳಲ್ಲಿ 1 ನೈಜವಾದ ಘನಮೂಲವೂ ಹಾಗೂ

$(-1 + i\sqrt{3})/2$ ಮತ್ತು $(-1 - i\sqrt{3})/2$

ಎಂಬುವು ಮಿಶ್ರ ಊಹ್ಯ ಸಂಖ್ಯಾತ್ಮಕ ಘನಮೂಲಗಳು ಆಗಿವೆ.

ಈಗ $\omega = (-1 + i\sqrt{3})/2$ ಎಂದು ಸೂಚಿಸಿದರೆ, ಆಗ ಐಕ್ಯಧಾತುವಾದ 1ರ ಘನಮೂಲಗಳು $1, \omega, \omega^2$ ಆಗಿರುತ್ತವೆ. ಘನಮೂಲವಾದ ω ಎಂಬುದು $x^2 + x + 1 = 0$ ಎಂಬ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಸರಿಹೊಂದುವುದರಿಂದ

$\omega_1 + \omega + 1 = 0$ ಮತ್ತು $\omega . \omega^2 = \omega^3 = 1$

ಎಂಬುದಾಗಿಯೂ 1ರ ಘನಮೂಲಗಳ ಮುಖ್ಯವಾದ ಗುಣಗಳು ದೊರೆಯುತ್ತವೆ.

(iii) ಐಕ್ಯಧಾತುವಾಗಿರುವ 1ರ ಚತುರ್ಮೂಲವು x ಆಗಿರಲಿ. ಆಗ

$x = 1^{1/4}$ ಅಥವಾ $x^4 = 1$ ಅಥವಾ $x^4 - 1 = 0$

ಅಥವಾ $(x^2 - 1)(x^2 + 1) = 0$ ಅಂದರೆ, $x^2 - 1 = 0$, $x^2 + 1 = 0$

ಎಂದು ಲಭಿಸುತ್ತದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ, $x^2 = 1$, $x^2 = -1$ ಎಂಬುದಾಗಿಯೂ, ವರ್ಗಮೂಲಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳುವುದರಿಂದ

$x = \pm 1$ ಮತ್ತು $x = \pm i$

ಎಂಬ ನಾಲ್ಕು ಚತುರ್ಮೂಲಗಳು ದೊರೆಯುತ್ತವೆ. ಆದ್ದರಿಂದ, ಐಕ್ಯಧಾತುವಿನ ಚತುರ್ಮೂಲಗಳು $-1, 1, i$ ಮತ್ತು $-i$ ಆಗಿವೆ.

ಉದಾಹರಣೆ : ω ಎಂಬುದು ಐಕ್ಯಧಾತುವಿನ ಒಂದು ಘನಮೂಲವಾಗಿದ್ದರೆ

$$(1 + \omega - \omega^2)^3 - (1 - \omega + \omega^2)^3 = 0$$

ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

ಈ ಮೇಲೆ ತೋರಿಸಿರುವಂತೆ

$$1 + \omega + \omega^2 = 0$$

ಆಗಿರುತ್ತದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ,

$$1 + \omega - \omega^2 = -\omega^2 - \omega^2 = -2\omega^2$$

ಮತ್ತು $1 - \omega + \omega^2 = -\omega - \omega = -2\omega^2$

ಆದ್ದರಿಂದ, $(1+\omega-\omega^2)^3-(1-\omega+\omega^2)^3$

$=(-2\omega^2)^3-(-2\omega)^3$

$=-8\omega^6-(-8\omega^3) = -8+8 = 0$ (ಕಾರಣ, $\omega^6=\omega^3=1$).

ಅಭ್ಯಾಸ - 4.2

1. ಇವುಗಳನ್ನು ಸುಲಭ ರೂಪಕ್ಕೆ ತನ್ನಿ :
   (a) $(2+3i)-(4-5i)+(1+6i)$
   (b) $(\sqrt{5}i+2)-(3\sqrt{5}i-2)$
   (c) $(2i+3)(\sqrt{2}i-1)$
   (d) $(i+3)/2i$
   (e) $\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^2$

2. $a+ib$ ರೂಪದಲ್ಲಿ ನಿರೂಪಿಸಿ:
   (a) $\frac{3+5i}{2-3i}$
   (b) $\frac{1+i}{1-i}$
   (c) $\frac{(1+i)^2}{3-i}$
   (d) $\frac{(2+3i)^2}{2-3i}-\frac{(2-3i)^2}{2+3i}$
   (e) $\frac{\sqrt{3}-i\sqrt{2}}{2\sqrt{3}-i\sqrt{2}}$

(3) $1, \omega, \omega^2$ ಎಂಬುವು ಐಕ್ಯಧಾತುವಿನ ಮೂರು ಘನಮೂಲಗಳಾಗಿದ್ದರೆ, ಈ ಕೆಳಕಂಡ ಫಲಿತಾಂಶಗಳನ್ನು ಸಾಧಿಸಿ :
   (a) $(1-\omega+\omega^2)(1+\omega-\omega^2) = 4$
   (b) $(1+\omega^2)^4 = \omega$
   (c) $(1-\omega)(1-\omega^2)(1-\omega^4)(1-\omega^5) = 9$.

4.3 ಸಮೀಕರಣಗಳ ಸಹಾಂಕಗಳ ಮತ್ತು ಮೂಲಗಳ ಸಂಬಂಧಗಳು

(a) ಈ ಹಿಂದೆಯೇ (4.1.3) ಚರ್ಚಿಸಿದಂತೆ,

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad \text{.... (1)}$$

ಎಂಬ ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣದ ಮೂಲಗಳು α ಮತ್ತು β ಆಗಿದ್ದರೆ, ಆಗ ಮೂಲಗಳಾದ α,β ಹಾಗೂ ಸಹಾಂಕಗಳಾದ a,b,cಗಳ ನಡುವಣ ಸಂಬಂಧಗಳು ಈ ಕೆಳಕಂಡಂತಿವೆ:

$$\alpha + \beta = \frac{-b}{a}, \qquad \alpha\beta = \frac{c}{a} \quad \text{... (2)}$$

(b) ಹಾಗೆಯೇ, ಒಂದು ಘನ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಪರಿಗಣಿಸಿ :

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0 \quad \text{... (3)}$$

ಇಲ್ಲಿ $a \neq 0$. ಸಮೀಕರಣ (3) ಮೂಲಗಳು α, β, γ ಆಗಿರಲಿ.

ಆಗ, $(x-\alpha)$, $(x-\beta)$, $(x-\gamma)$ ಎಂಬುವು (3)ರ ಎಡಭಾಗದ ಅಪವರ್ತನಗಳಾಗಿರುತ್ತವೆ. ಆದ್ದರಿಂದ

$$a(x-\alpha)\,(x-\beta)\,(x-\gamma) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

ಎಂದು ಬರೆಯಬಹುದು. ಎರಡು ಕಡೆಗಳಲ್ಲೂ $a(\neq 0)$ಇಂದ ಭಾಗಿಸಿದಾಗ ಹಾಗೂ ಎಡಭಾಗವನ್ನು ಬಿಡಿಸಿದಾಗ

$$x^3 - (\alpha+\beta+\gamma)x^2 + (\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)x - \alpha\beta\gamma$$

$$= x^3 + \frac{b}{a}x^2 + \frac{c}{a}x + \frac{d}{a}$$

ಎಂದು ದೊರೆಯುತ್ತದೆ. ಸಮಘಾತಗಳ ಸಹಾಂಕಗಳನ್ನು ಸಮೀಕರಿಸುವುದರಿಂದ

(i) $\alpha+\beta+\gamma = \frac{-b}{a}$ ಅಥವಾ $\sum\alpha = \frac{-b}{a}$;

(ii) $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha = \frac{c}{a}$ ಅಥವಾ $\sum\alpha\beta = \frac{c}{a}$; ಮತ್ತು

(iii) $\alpha\beta\gamma = \frac{d}{a}$

ಎಂಬ ಸಂಬಂಧಗಳು ದೊರೆಯುತ್ತವೆ.

(c) ಈಗ ಒಂದು ದ್ವಿವರ್ಗ (ಅಥವಾ ಚತುಷ್ಪ್ರಮಾಣದ) ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಪರಿಗಣಿಸಿ:

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0 \quad \text{... (4)}$$

ಇಲ್ಲಿ $a \neq 0$. ಸಮೀಕರಣ (4) ರ ಮೂಲಗಳು $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ ಆಗಿರಲಿ. ಆಗ

$(x-\alpha)$, $(x-\beta)$, $(x-\gamma)$, $(x-\delta)$ ಎಂಬುವು (4)ರ ಎಡಭಾಗದ ಅಪವರ್ತನಗಳಾಗಿರುತ್ತವೆ. ಆದ್ದರಿಂದ

$$a(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)(x-\delta) = a\left[x^4+\frac{b}{a}x^3+\frac{c}{a}x^2+\frac{d}{a}x+\frac{e}{a}\right]$$

ಎಂದು ಬರೆಯಬಹುದು. ಎರಡು ಭಾಗಗಳನ್ನೂ $a(\neq 0)$ಇಂದ ಭಾಗಿಸಿ ಮತ್ತು ಎಡಭಾಗವನ್ನು ಬಹುಘಾತಪದಿಯಂತೆ ಬಿಡಿಸಿದಾಗ,

$$x^4 - (\alpha+\beta+\gamma+\delta)x^3 + (\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\delta+\delta\alpha+\alpha\gamma+\beta\delta)x^2$$
$$-(\alpha\beta\gamma+\beta\gamma\delta+\gamma\delta\alpha+\delta\alpha\beta)x+\alpha\beta\gamma\delta$$
$$= x^4+\frac{b}{a}x^3+\frac{c}{a}x^2+\frac{d}{a}x+\frac{e}{a}$$

ಎಂಬುದಾಗಿ ದೊರೆಯುತ್ತದೆ. ಸಮಘಾತಗಳ ಸಮಾಂಕಗಳನ್ನು ಸಮೀಕರಿಸುವುದರಿಂದ

(i) $\Sigma\alpha = \alpha+\beta+\gamma+\delta = \frac{-b}{a}$

(ii) $\Sigma\alpha\beta = \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\delta+\delta\alpha+\alpha\gamma+\beta\delta = \frac{c}{a}$

(iii) $\Sigma\alpha\beta\gamma = \alpha\beta\gamma+\beta\gamma\delta+\gamma\delta\alpha+\delta\alpha\beta = \frac{-d}{a}$

(iv) $\alpha\beta\gamma\delta = \frac{e}{a}$

ಎಂಬುದಾಗಿ ಮೂಲಗಳ ಮತ್ತು ಸಹಾಂಕಗಳ ನಡುವಣ ಸಂಬಂಧಗಳು ದೊರಕುತ್ತವೆ. ಮೇಲಿನ ಈ ಸಂಬಂಧಗಳನ್ನು ಬಳಸಿಕೊಂಡು ಮತ್ತು ಇತರ ಕೊಡಲ್ಪಟ್ಟ ವಿಶೇಷ ಅಂಶಗಳ ಸಹಾಯದಿಂದ ವರ್ಗ, ಘನ ಮತ್ತು ದ್ವಿವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಬಿಡಿಸಬಹುದು.

ಉದಾಹರಣೆಗಳು

1. $4x^3-24x^2+23x+18 = 0$ ಎಂಬ ಸಮೀಕರಣದ ಮೂಲಗಳು A.P,ಯಲ್ಲಿದ್ದರೆ, ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಬಿಡಿಸಿ.

ಸಮೀಕರಣದ ಮೂಲಗಳು $(\alpha-\delta)$, α ಮತ್ತು $(\alpha+\delta)$ ಎಂದಿರಲಿ.

ಆದ್ದರಿಂದ, ಅವುಗಳ ಮೊತ್ತ

$$(\alpha-\delta)+\alpha+(\alpha+\delta) = \frac{-(-24)}{4} = 6$$

ಅಂದರೆ, $3\alpha = 6$ ಅಥವಾ $\alpha = 2$.

ಹಾಗೆಯೇ, ಮೂಲಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧ

$$(\alpha-\delta)\alpha(\alpha+\delta) = \alpha(\alpha^2-\delta^2) = \frac{-(18)}{4} = -\frac{9}{2}$$

ಅಂದರೆ, $\alpha(\alpha^2-\delta^2) = -\frac{9}{2}$

ಈಗ, $\alpha = 2$ ಆಗಿರುವುದರಿಂದ

$$2(2^2-\delta^2) = -\frac{9}{2}$$

ಅಥವಾ $2(4-\delta^2) = -\frac{9}{2}$

ಅಥವಾ $16-4\delta^2 = -9$

ಆದ್ದರಿಂದ, $\delta^2 = \frac{16+9}{4} = \frac{25}{4}$

ಅಥವಾ $\delta = \pm\frac{5}{2}$ ಎಂದಾಗುತ್ತದೆ.

ಇಲ್ಲಿ, $\delta = \frac{5}{2}$ ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೆ, ಮೂಲಗಳು

$\alpha-\delta = 2-\frac{5}{2}$, $\alpha = 2$ ಮತ್ತು $\alpha+\delta = 2+\frac{5}{2}$

ಅಂದರೆ, $-1/2$, 2 ಮತ್ತು $9/2$ ಎಂದು ದೊರೆಯುತ್ತವೆ.

2. $x^3+x^2-17x+15=0$ ಎಂಬ ಸಮೀಕರಣದಲ್ಲಿ ಎರಡು ಮೂಲಗಳ ಅಂತರ 2 ಆಗಿದ್ದರೆ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಬಿಡಿಸಿ.

ಸಮೀಕರಣದ ಮೂಲಗಳು

$$\alpha, \alpha+2, \gamma$$

ಆಗಿರಲಿ. ಆಗ, ಅವುಗಳ ಮೊತ್ತ :

$$\alpha+(\alpha+2)+\gamma = -1$$

ಅಥವಾ $2\alpha+\gamma = -3$

ಅಥವಾ $\gamma = -(2\alpha+3)$ ... (1)

ಎಂದಾಗುತ್ತದೆ. ಅಂತೆಯೇ ಎರಡೆರಡು ಮೂಲಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧಗಳ ಮೊತ್ತ :

$$\alpha(\alpha+2)+(\alpha+2)\gamma+\gamma\alpha = -17$$

ಅಥವಾ $\alpha(\alpha+2)+\gamma(2\alpha+2) = -17$ ... (2)

ಫಲಿತಾಂಶ (2)ರಲ್ಲಿ (1)ನ್ನು ಬಳಸಿದರೆ

$$\alpha(\alpha+2)-(2\alpha+3)(2\alpha+2) = -17$$

ಅಂದರೆ, $-3\alpha^2-8\alpha-6 = -17$

ಅಥವಾ $3\alpha^2+8\alpha-11 = 0$ ಎಂದು ದೊರೆಯುತ್ತದೆ.

ಇದನ್ನು ಅಪವರ್ತಿಸಿದಾಗ

$$3\alpha^2+11\alpha-3\alpha-11 = 0$$

ಅಥವಾ $\alpha(3\alpha + 11) - 1(3\alpha + 11) = 0$

ಅಂದರೆ, $(3\alpha + 11)(\alpha - 1) = 0$ ಎಂದಾಗುತ್ತದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ $\alpha = 1$, $\alpha = -11/3$ ಎಂಬ ಎರಡು ಬೆಲೆಗಳು ದೊರೆಯುತ್ತವೆ. ಇವುಗಳ ಪೈಕಿ, $\alpha = 1$ ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೆ, ಫಲಿತಾಂಶ (1) ರಿಂದ $\gamma = -5$ ಎಂದು ದೊರೆಯುತ್ತದೆ.

ಈಗ, ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಸಮೀಕರಣದ ಮೂಲಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧ

$$\alpha(\alpha + 2)\gamma = -15 \quad \ldots (3)$$

ಈ ಮೇಲಿನ ಬೆಲೆಗಳಾದ $\alpha = 1$, $\gamma = -5$ ಎಂಬುವು (3)ನ್ನು ಸರಿಹೊಂದುತ್ತವೆ. ಆದ್ದರಿಂದ, ನಮಗೆ ಬೇಕಾಗಿರುವ ಮೂಲಗಳು $\alpha, \alpha + 2, \gamma$ ಅಂದರೆ, $1, 3, -5$ ಆಗಿರುತ್ತವೆ.

ಇನ್ನೊಂದು ಬೆಲೆಯಾದ $\alpha = -11/3$ ಎಂಬುದನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೆ $\gamma = -[2.(-11/3) + 3] = 13/3$. ಆದರೆ, ಈ ಬೆಲೆಗಳು (3)ನ್ನು ಸರಿಹೊಂದುವುದಿಲ್ಲ.

3. $27x^3 - 21x^2 - 7x + 1 = 0$ ಸಮೀಕರಣದ ಮೂಲಗಳು ಗುಣೋತ್ತರ ಶ್ರೇಢಿ (*G.P*) ಯಲ್ಲಿದ್ದರೆ, ಅದರ ಮೂಲಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಸಮೀಕರಣದ ಮೂಲಗಳು $\frac{\alpha}{r}, \alpha, \alpha r$ ಎಂದಿರಲಿ (ಇವುಗಳು *G.P.* ಯಲ್ಲಿದ್ದು ಅದರ ಸಾಮಾನ್ಯ ಪ್ರಮಾಣ r ಆಗಿದೆ) ಆಗ, ಮೂಲಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧ:

$\frac{\alpha}{r}.\ \alpha.\ \alpha r = -1/27$ ಅಥವಾ $\alpha^3 = -1/27$ ಅಥವಾ $\alpha = -1/3$ ಎಂದು ದೊರೆಯುತ್ತದೆ. ಮೂಲಗಳ ಮೊತ್ತ :

$$\frac{\alpha}{r} + \alpha + \alpha r = \frac{21}{27} = \frac{7}{9}$$

ಅಥವಾ $\alpha[1 + r + r^2] = \frac{7r}{9}$ ಎಂದಾಗುತ್ತದೆ.

ಇದರಲ್ಲಿ, $\alpha = -\frac{1}{3}$ ಎಂಬ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಬಳಸಿಕೊಂಡಾಗ

$$-\frac{9}{3}[1 + r + r^2] = 7r$$

ಅಥವಾ $3r^2 + 10r + 3 = 0$

ಅಥವಾ $(3r + 1)(r + 3) = 0$

ಅಥವಾ $r = -3, r = -1/3$

ಎಂಬ ಬೆಲೆಗಳು ಸಿಗುತ್ತವೆ. ಈಗ, $\alpha = 1/3$ ಮತ್ತು $r=-3$ ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೆ, ನಮಗೆ ಬೇಕಾಗಿರುವ ಮೂಲಗಳು $\frac{\alpha}{r}, \alpha, \alpha r$ ಅಂದರೆ, $1/9, -1/3$ ಮತ್ತು 1 ಎಂದು ದೊರೆಯುತ್ತವೆ.

ಸೂಚನೆ : ಈ ಮೇಲಿನ ಉದಾಹರಣೆಯಲ್ಲಿ, $\alpha = -1/3$ ಆಗಿದ್ದು, $r = -1/3$ ಎಂಬ ಬೆಲೆಯನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೆ, ಆಗ ಮೂಲಗಳು $\frac{\alpha}{r}, \alpha, \alpha r$ ಅಂದರೆ,

$\frac{(-1/3)}{(-1/3)}, \frac{-1}{3}, (\frac{-1}{3}) \times (\frac{-1}{3})$

ಅಥವಾ 1, $-1/3$, $1/9$ ಎಂದು ಹಿಂದಿನ ಮೂಲಗಳೇ ದೊರೆಯುತ್ತವೆ.

4. $6x^3 - 11x^2 - 3x + 2 = 0$ ಸಮೀಕರಣದ ಮೂಲಗಳು ಸಂಗತ ಶ್ರೇಢಿ(*H.P.*) ಯಲ್ಲಿದ್ದರೆ ಅವುಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಸಮೀಕರಣದ ಮೂಲಗಳು α, β, γ ಆಗಿರಲಿ. ಈ ಮೂಲಗಳು *H.P.* ಯಲ್ಲಿರುವುದರಿಂದ

$\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta}, \frac{1}{\gamma}$ ಎಂಬ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು *A.P.* ಯಲ್ಲಿರುತ್ತವೆ. ಆದ್ದರಿಂದ

$$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\gamma} = \frac{2}{\beta}$$

ಅಥವಾ $2\alpha\gamma = \alpha\beta + \beta\gamma$ ಎಂದು ದೊರೆಯುತ್ತದೆ. ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಸಮೀಕರಣದ ಮೂಲಗಳ ಹಾಗೂ ಸಹಾಂಕಗಳ ಗುಣವಾಗಿ

$\sum\alpha\beta = (\alpha\beta + \beta\gamma) + \gamma\alpha = \frac{(-3)}{6} = -\frac{1}{2}$

ಅಥವಾ $(2\alpha\gamma) + \gamma\alpha = -\frac{1}{2}$

ಅಂದರೆ, $3\alpha\gamma = -\frac{1}{2}$ ಅಥವಾ $\alpha\gamma = -\frac{1}{6}$ ಎಂದು ದೊರೆಯುತ್ತದೆ.

ಈಗ, ಮೂಲಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧ

$$\alpha\beta\gamma = -\frac{2}{6} = -\frac{1}{3}$$

ಎಂದಾಗುತ್ತದೆ. ಇದರಲ್ಲಿ $\alpha\gamma = -\frac{1}{6}$ ಎಂಬುದನ್ನು ಬಳಸಿದಾಗ

$\beta(-\frac{1}{6}) = -\frac{1}{3}$ ಅಥವಾ $\beta = 2$ ಎಂದು ದೊರೆಯುತ್ತದೆ.

ಮೂಲಗಳ ಮೊತ್ತ $\alpha + \beta + \gamma = \frac{11}{6}$

ಅಥವಾ $\alpha + \gamma = \frac{11}{6} - 2 = -\frac{1}{6}$ ಎಂದಾಗುತ್ತದೆ.

ಈ ಹಿಂದೆಯೇ, $\alpha\gamma = -\frac{1}{6}$ ಎಂದು ತಿಳಿದಿದೆ.

ಮೇಲಿನ ಈ ಎರಡು ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಬಿಡಿಸಿದಾಗ $\alpha = -\frac{1}{2}$ ಮತ್ತು $\gamma = \frac{1}{3}$ ಎಂದು ದೊರೆಯುತ್ತದೆ.

ಆದ್ದರಿಂದ, ಬೇಕಾಗಿರುವ ಮೂಲಗಳಾದ α, β, γ ಎಂಬುವುದರ ಬೆಲೆಗಳು $-1/2$, 2, $1/3$ ಆಗಿರುತ್ತವೆ.

5. $x^4 + 2x^3 - 21x^2 - 22x + 40 = 0$ ಸಮೀಕರಣದ ಮೂಲಗಳು *A.P.* ಯಲ್ಲಿದ್ದರೆ ಅವುಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಸಮೀಕರಣದ ಮೂಲಗಳು

$$a - 3d,\ a - d,\ a + d,\ a + 3d$$

ಆಗಿರಲಿ. (ಇಲ್ಲಿ ಸಾಮಾನ್ಯ ವ್ಯತ್ಯಾಸ $2d$) ಆಗ ಮೂಲಗಳ ಮೊತ್ತ

$$(a - 3d) + (a - d) + (a + d) + (a + 3d) = -2$$

ಅಥವಾ $4a = -2$ ಎಂದಾಗುತ್ತದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ $a = -1/2$ ಎಂಬ ಬೆಲೆಯು ದೊರೆಯುತ್ತದೆ. ಮೂಲಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧ

$$(a - 3d)(a - d)(a + d)(a + 3d) = 40$$

ಅಥವಾ $(a^2 - 9d^2)(a^2 - d^2) = 40$

ಎಂದಾಗುತ್ತದೆ. ಇದರಲ್ಲಿ $a = -1/2$ ಎಂದು ಬಳಸಿದರೆ

$$\left(\frac{1}{4} - 9d^2\right)\left(\frac{1}{4} - d^2\right) = 40$$

ಅಥವಾ $(1 - 36d^2)(1 - 4d^2) = 640$

ಅಥವಾ $144d^4 - 40d^2 + 1 = 640$

ಅಥವಾ $144d^4 - 40d^2 - 639 = 0$.

ಈ ಸಮೀಕರಣದ ಮೂಲಗಳು $d^2 = \frac{9}{4}$ ಅಥವಾ $d = \pm\frac{3}{2}$ ಎಂದು ದೊರೆಯುತ್ತವೆ. ಈಗಾಗಲೇ $a = -1/2$ ಎಂಬುದು ತಿಳಿದಿರುವುದರಿಂದ ಮತ್ತು $d = 3/2$ ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳುವುದರಿಂದ ನಮಗೆ ಬೇಕಾಗಿರುವ ಮೂಲಗಳು

$$a - 3d,\ a - d,\ a + d,\ a + 3d$$

ಅಂದರೆ, $-5, -2, 1$ ಮತ್ತು 4 ಎಂದು ದೊರೆಯುತ್ತವೆ.

ಅಭ್ಯಾಸ - 4.3

1. ಈ ಕೆಳಕಂಡ ಸಮೀಕರಣಗಳ ಮೂಲಗಳು *A.P.* ಯಲ್ಲಿವೆ. ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಬಿಡಿಸಿ :
   (a) $32x^3 - 48x^2 + 22x - 3 = 0$
   (b) $4x^3 - 24x^2 + 23x + 18 = 0$
   (c) $x^3 - 9x^2 + 23x - 15 = 0$
   (d) $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$
   (e) $x^4 - 2x^3 - 21x^2 + 22x + 40 = 0$
2. ಈ ಕೆಳಕಂಡ ಸಮೀಕರಣಗಳ ಮೂಲಗಳು *G.P.* ಯಲ್ಲಿವೆ. ಅವುಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ :
   (a) $3x^3 - 26x^2 + 52x - 24 = 0$
   (b) $54x^3 - 39x^2 - 26x + 16 = 0$
   (c) $27x^3 + 42x^2 - 28x - 8 = 0$
   (d) $8x^3 - 14x^2 + 7x - 1 = 0$
   (e) $27x^4 - 195x^3 + 494x^2 - 520x + 192 = 0$

(ಸೂಚನೆ : ಮೂಲಗಳನ್ನು $\frac{a}{r^3}, \frac{a}{r}, ar, ar^3$ ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿ)

3. ಈ ಕೆಳಕಂಡ ಸಮೀಕರಣಗಳು ಸಂಗತ ಶ್ರೇಢಿ (*H.P.*)ಯಲ್ಲಿರುವ ಮೂಲಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿವೆ. ಅವುಗಳನ್ನು ಬಿಡಿಸಿ.
   (a) $6x^3 - 11x^2 + 6x - 1 = 0$
   (b) $10x^3 + 3x^2 - 6x + 1 = 0$
   (c) $45x^3 - 59x^2 + 15x - 1 = 0$
   (d) $105x^3 - 142x^2 + 60x - 8 = 0$
4. $x^3 - 5x^2 - 16x + 80 = 0$ ಸಮೀಕರಣದ ಮೂಲಗಳ ಪೈಕಿ ಎರಡು ಮೂಲಗಳ ಮೊತ್ತವು 0 ಆಗಿದ್ದರೆ, ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಬಿಡಿಸಿ.

4.4 ಮೂಲಗಳ ಸಮಾಂಗ ಉತ್ಪನ್ನಗಳು

ಈ ಹಿಂದೆ (4.1.3), ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣದ ಮೂಲಗಳು α, β ಗಳಾಗಿದ್ದರೆ, ಅವುಗಳ ಸಮಾಂಗ ಉತ್ಪನ್ನಗಳ ಬಗ್ಗೆ (ಉದಾ: $\alpha+\beta$, $\alpha\beta$, $\alpha^2+\beta^2$ ಇತ್ಯಾದಿ) ಚರ್ಚಿಸಿದೆವು.

ಈಗ, ಘನ ಸಮೀಕರಣ ಹಾಗೂ ದ್ವಿವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣಗಳ ಮೂಲಗಳ ಸಮಾಂಗ ಉತ್ಪನ್ನಗಳ ಬಗ್ಗೆ ಚರ್ಚಿಸೋಣ.

ಒಂದು ಘನ ಸಮೀಕರಣದ ಸಂದರ್ಭದಲ್ಲಿ, α, β, γ ಎಂಬುವು ಅದರ ಮೂಲಗಳಾಗಿದ್ದರೆ, $f(\alpha, \beta, \gamma)$ ಎಂಬ ಉತ್ಪನ್ನದ ಬೆಲೆಯು, α, β, γ ಎಂಬುವನ್ನು ಚಕ್ರೀಯವಾಗಿ (ಅಂದರೆ, $\alpha \to \beta, \beta \to \gamma, \gamma \to \alpha$ ಆಗಿ) ಬದಲಾಯಿಸಿದಾಗ, ವ್ಯತ್ಯಾಸವಾಗದಿದ್ದರೆ, ಆಗ $f(\alpha, \beta, \gamma)$ ಉತ್ಪನ್ನವನ್ನು ಮೂಲಗಳ ಒಂದು ***ಸಮಾಂಗ ಉತ್ಪನ್ನ*** ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ. **ಉದಾಹರಣೆ:** $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2$, $\alpha\beta\gamma$.

ಅಂತೆಯೇ, ಒಂದು ದ್ವಿವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣದ ಸಂದರ್ಭದಲ್ಲಿ $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ ಎಂಬುವು ಮೂಲಗಳಾಗಿದ್ದರೆ, $f(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ ಎಂಬ ಉತ್ಪನ್ನವು ಒಂದು ಸಮಾಂಗ ಉತ್ಪನ್ನವಾಗಿರಬೇಕಾದರೆ, $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ ಗಳನ್ನು ಅದರಲ್ಲಿ ಚಕ್ರೀಯವಾಗಿ ಬದಲಾಯಿಸಿದಾಗ ಉತ್ಪನ್ನದ ಬೆಲೆಯು ಸ್ಥಿರವಾಗಿರಬೇಕು.

ಉದಾಹರಣೆಗಳು

1. $x^3 + px^2 + qx + r = 0$

ಎಂಬ ಸಮೀಕರಣದ ಮೂಲಗಳು α, β, γ ಆಗಿದ್ದರೆ

(i) $\Sigma\alpha^2$

(ii) $\Sigma\alpha^2\beta^2$

(iii) $\Sigma(1/\alpha)$

ಇವುಗಳ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಸಮೀಕರಣದ ಮೂಲಗಳ ಮತ್ತು ಸಹಾಂಕಗಳ ನಡುವಣ ಸಂಬಂಧಗಳಿಂದಾಗಿ

$\Sigma\alpha = -p$, $\Sigma\alpha\beta = q$ ಮತ್ತು $\alpha\beta\gamma = -r$ ಎಂದಾಗುತ್ತದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ

(i) $\Sigma\alpha^2 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = (\alpha + \beta + \gamma)^2 - 2\Sigma\alpha\beta$

$= (-p)^2 - 2(q) = p^2 - 2q$

(ii) $\Sigma\alpha^2\beta^2 = (\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha)^2 - 2(\alpha\beta\gamma)(\alpha + \beta + \gamma)$

$= (q)^2 - 2(-r)(-p)$

$= q^2 - 2pr$

(iii) $\Sigma\frac{1}{\alpha} = \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} = \frac{\beta\gamma + \gamma\alpha + \alpha\beta}{\alpha\beta\gamma}$

$= -\frac{q}{r}$

2. $x^3 + px^2 + qx + r = 0$ ಸಮೀಕರಣದ ಮೂಲಗಳು α, β, γ ಗಳಾಗಿದ್ದರೆ,

(i) $(\alpha+\beta)(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha)$

(ii) $\sum \frac{\beta^2+\gamma^2}{\beta\gamma}$

(iii) $\sum (\beta+\gamma-\alpha)^3$

ಇವುಗಳ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಮೇಲಿನ ಉದಾಹರಣೆಯಂತೆಯೇ, ಇಲ್ಲಿಯೂ

$\sum\alpha = -p, \sum\alpha\beta = q, \alpha\beta\gamma = -r$ ಆಗಿರುತ್ತದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ

(i) $(\alpha+\beta)(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha)$

$$= [(\Sigma\alpha)-\gamma][(\Sigma\alpha)-\alpha][(\Sigma\alpha)-\beta]$$

$$= (-p-\gamma)(-p-\alpha)(-p-\beta)$$

$$= -[p^3+p^2(\alpha+\beta+\gamma)+p(\Sigma\alpha\beta)+\alpha\beta\gamma]$$

$$= -[p^3+p^2(-p)+p(q)+(-r)]$$

$$= r - pq$$

(ii) $$\sum \frac{\beta^2+\gamma^2}{\beta\gamma} = \frac{\beta^2+\gamma^2}{\beta\gamma} + \frac{\gamma^2+\alpha^2}{\gamma\alpha} + \frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha\beta}$$

$$= \frac{\alpha(\beta^2+\gamma^2) + \beta(\gamma^2+\alpha^2) + \gamma(\alpha^2+\beta^2)}{\alpha\beta\gamma}$$

$$= \frac{\Sigma\alpha^2\beta}{\alpha\beta\gamma} = \frac{(\Sigma\alpha)(\Sigma\alpha\beta)-3\alpha\beta\gamma}{-r}$$

$$= \frac{(-p)(q)-3(-r)}{-r}$$

$$= \frac{pq-3r}{r}$$

(iii) $\Sigma(\beta+\gamma-\alpha)^3 = \Sigma(\alpha+\beta+\gamma-2\alpha)^3$

$$= \Sigma(-p-2\alpha)^3$$

$$= -\Sigma[p^3+6p^2\alpha+12p\alpha^2+8\alpha^3]$$

$$= -3p^3 - 6p^2(\Sigma\alpha) - 12p(\Sigma\alpha^2) - 8\Sigma\alpha^3$$

$$= -3p^3 - 6p^2(-p) - 12p(p^2 - 2q) - 8(3pq - p^3 - 3r)$$

$$= 24r - p^3$$

ಅಭ್ಯಾಸ - 4.4

1. $x^3 + 3x^2 - 5x + 7 = 0$ ಸಮೀಕರಣದ ಮೂಲಗಳು α, β, γ ಗಳಾಗಿದ್ದರೆ, $\alpha^2, \beta^2, \gamma^2$ ಎಂಬುವು ಮೂಲಗಳಾಗಿರುವಂತೆ ಒಂದು ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ರಚಿಸಿ.
2. $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ ಎಂಬುವು $x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 4x + 5 = 0$ ಎಂಬ ಸಮೀಕರಣದ ಮೂಲಗಳಾಗಿದ್ದರೆ,

   (i) $\Sigma\alpha^2$ (ii) $\Sigma\alpha^2\beta\gamma$ (iii) $\Sigma\alpha^2\beta$

   ಇವುಗಳ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
3. $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ ಎಂಬುವು $x^4 - x^2 + 1 = 0$ ಸಮೀಕರಣದ ಮೂಲಗಳಾಗಿದ್ದರೆ, $\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta}, \frac{1}{\gamma}, \frac{1}{\delta}$ ಎಂಬ ಮೂಲಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿರುವ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ರಚಿಸಿ.

4.5 ಅಭಾಗಲಬ್ಧ ಮತ್ತು ಮಿಶ್ರ ಊಹ್ಯ ಸಂಖ್ಯಾ ಮೂಲಗಳ ಸಹವರ್ತಿತ್ವ

ಒಂದು ಬಹುಘಾತಪದಿ ಸಮೀಕರಣದ ಸಹಾಂಕಗಳು ನೈಜವಾಗಿದ್ದರೆ, ಅದಕ್ಕೆ ಇರಬಹುದಾದ ಊಹ್ಯ ಮಿಶ್ರಸಂಖ್ಯಾ ಮೂಲಗಳು ಪರಸ್ಪರ ಸಹವರ್ತಿಗಳಾಗಿರುತ್ತವೆ. ಅಂತೆಯೇ, ಅಭಾಗಲಬ್ಧ ಮೂಲಗಳೂ ಸಹವರ್ತಿಗಳಾಗಿತ್ತವೆ. ಈ ಎರಡು ಫಲಿತಾಂಶಗಳನ್ನು ಪ್ರಮೇಯಗಳಾಗಿ ಸಾಧಿಸಬಹುದು.

ಪ್ರಮೇಯ (1) : $f(x) \equiv a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n = 0$

ಎಂಬ ಬಹುಘಾತಪದಿ ಸಮೀಕರಣದಲ್ಲಿ, ಸಹಾಂಕಗಳಾದ $a_0, a_1, \ldots, a_n$ ಎಲ್ಲವೂ ನೈಜ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾಗಿದ್ದು $(\alpha + i\beta)$ ಎಂಬ ಮಿಶ್ರ ಊಹ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆಯು ಒಂದು ಮೂಲವಾಗಿದ್ದರೆ, ಆಗ ಅದರ ಸಹವರ್ತಿಯಾದ $(\alpha - i\beta)$ ಎಂಬುದೂ ಒಂದು ಮೂಲವಾಗಿರುತ್ತದೆ.

ಸಾಧನೆ : $(\alpha + i\beta)$ ಎಂಬುದು ಸಮೀಕರಣದ ಒಂದು ಮೂಲವಾಗಿರುವುದರಿಂದ $[x - (\alpha + i\beta)]$ ಎಂಬುದು $f(x)$ ಗೆ ಅಪವರ್ತನವಾಗಿರುತ್ತದೆ. ಈಗ $(\alpha - i\beta)$ ಮೂಲವಾಗಿರಬೇಕಾಗಿದ್ದರೆ $[x - (\alpha - i\beta)]$ ಎಂಬುದು $f(x)$ನ ಅಪವರ್ತನವಾಗಿ ಇರಬೇಕಾಗುತ್ತದೆ.

ಆದ್ದರಿಂದ, ಈ ಎರಡು ಅಪವರ್ತನಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧವಾದ

$$[x-(\alpha+i\beta)][x-(\alpha-i\beta)]$$

$$= [(x-\alpha)-i\beta][(x-\alpha)+i\beta] = (x-\alpha)^2+\beta^2$$

ಎಂಬುದು $f(x)$ ನ್ನು ನಿಶ್ಶೇಷವಾಗಿ ಭಾಗಿಸಬೇಕು.

ಈಗ, $f(x)$ ನ್ನು $[(x-\alpha)^2+\beta^2]$ನಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದಾಗ ಬರುವ ಭಾಗಲಬ್ಧವನ್ನು $Q(x)$ ಎಂದು ಮತ್ತು ಶೇಷವನ್ನು $R(x)$ ಎಂದೂ ಕರೆಯೋಣ.

ಭಾಜಕವಾದ $[(x-\alpha)^2+\beta^2]$ ಎಂಬುದು ಎರಡನೇ ಪ್ರಮಾಣದ (ವರ್ಗ) ಬಹುಘಾತಪದಿಯಾಗಿರುವುದರಿಂದ ಶೇಷವಾದ $R(x)$ ಒಂದನೇ ಪ್ರಮಾಣವನ್ನು ಮೀರುವುದಿಲ್ಲ. ಆದ್ದರಿಂದ

$R(x) = Ax + B$ (ಇಲ್ಲಿ A, B ನೈಜಸಂಖ್ಯೆಗಳು)

ಮಾದರಿಯಲ್ಲಿರುತ್ತದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ

$$f(x) = [(x-\alpha)^2+\beta^2]Q(x) + (Ax+B) \quad \dots (1)$$

ಎಂದಾಗುತ್ತದೆ. ಈಗ

$(\alpha+i\beta)$ ಎಂಬುದು $f(x)$ನ ಮೂಲವಾದ್ದರಿಂದ $f(\alpha+i\beta) = 0$

ಆದ್ದರಿಂದ, (1) ರಲ್ಲಿ $x = \alpha+i\beta$ ಎಂದು ಹಾಕುವುದರಿಂದ

$0 = \left[\{(\alpha+i\beta)-\alpha\}^2+\beta^2\right]Q(\alpha+i\beta)+[A(\alpha+i\beta+B]$ ಎಂದಾಗುತ್ತದೆ. ಅಂದರೆ

$$0 = 0.Q(\alpha+i\beta)+(A\alpha+B)+iA\beta$$

ಅಥವಾ $(A\alpha+B)+iA\beta = 0$

ಎಂದು ದೊರೆಯುತ್ತದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ

$A\alpha+B = 0$ ಮತ್ತು $A\beta = 0$.

ಆದರೆ, $(\alpha+i\beta)$ ಮಿಶ್ರ ಊಹ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಿರುವುದರಿಂದ $\beta \neq 0$ ಆದ್ದರಿಂದ, $A\beta = 0$ ಎಂಬುದರಿಂದ $A = 0$ ಎಂದು ದೊರೆಯುತ್ತದೆ. ಇದನ್ನು $A\alpha+B = 0$ ಎಂಬುದರಲ್ಲಿ ಬಳಸುವುದರಿಂದ $B = 0$ ಎಂದಾಗುತ್ತದೆ. ಅಂದರೆ ಶೇಷ $R(x) = Ax + B = 0$ ಎಂದಾಗುತ್ತದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ, $[x-(\alpha-i\beta)]$ ಎಂಬುದು $f(x)$ನ ಅಪವರ್ತನ ಅಥವಾ $(\alpha-i\beta)$ ಎಂಬುದು $f(x)=0$ ಸಮೀಕರಣದ ಮೂಲ ಆಗಿರುತ್ತದೆ.

ಪ್ರಮೇಯ 2 : $f(x) \equiv a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n = 0$

ಎಂಬ ಬಹುಘಾತಪದಿ ಸಮೀಕರಣದ ಸಹಾಂಕಗಳು ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾಗಿದ್ದು, $(\alpha+\sqrt{\beta})$ – ಇಲ್ಲಿ α, β ಗಳು ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಮತ್ತು $\sqrt{\beta}$ ಅಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆ – ಒಂದು ಮೂಲವಾಗಿದ್ದರೆ, ಆಗ $(\alpha-\sqrt{\beta})$ ಕೂಡ ಮೂಲವಾಗಿರುತ್ತದೆ.

ಸಾಧನೆ : $(\alpha+\sqrt{\beta})$ ಒಂದು ಮೂಲವಾಗಿರುವುದರಿಂದ

$[x-(\alpha+\sqrt{\beta})]$ ಎಂಬುದು $f(x)$ನ ಅಪವರ್ತನವಾಗಿರುತ್ತದೆ. ಈಗ, $(\alpha-\sqrt{\beta})$ ಒಂದು ಮೂಲವಾಗಿರಬೇಕಾಗಿದ್ದರೆ $[x-(\alpha-\sqrt{\beta})]$ ಎಂಬುದೂ $f(x)$ನ ಅಪವರ್ತನವಾಗಿ ಇರಬೇಕಾಗುತ್ತದೆ.

ಆದ್ದರಿಂದ, ಈ ಎರಡು ಅಪವರ್ತನಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧವಾದ

$$[x-(\alpha+\sqrt{\beta})]\ [x-(\alpha-\sqrt{\beta})]$$

$$=[(x-\alpha)-\sqrt{\beta}]\ [(x-\alpha)+\sqrt{\beta}]$$

$$=[(x-\alpha)^2-\beta]$$

ಎಂಬುದು $f(x)$ನ್ನು ನಿಶ್ಶೇಷವಾಗಿ ಭಾಗಿಸಬೇಕಾಗುವುದು.

ಈಗ, $f(x)$ನ್ನು $[(x-\alpha)^2-\beta]$ನಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದಾಗ ಬರುವ ಭಾಗಲಬ್ಧವನ್ನು $Q(x)$ಎಂದೂ, ಶೇಷವನ್ನು $R(x)$ ಎಂದೂ ಕರೆಯೋಣ.

ಭಾಜಕವಾದ $[(x-\alpha)^2-\beta]$ ಎಂಬುದು ಎರಡನೇ ಪ್ರಮಾಣದ (ವರ್ಗ) ಬಹುಘಾತಪದಿಯಾಗಿರುವುದರಿಂದ ಶೇಷವಾದ $R(x)$ ಒಂದನೇ ಪ್ರಮಾಣವನ್ನು ಮೀರುವುದಿಲ್ಲ, ಆದ್ದರಿಂದ

$R(x)=Ax+B$ (ಇಲ್ಲಿ, A, B ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು)

ಮಾದರಿಯಲ್ಲಿರುತ್ತದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ

$$f(x)=[(x-\alpha)^2-\beta]\ Q(x)+(Ax+B) \qquad ...(1)$$

ಎಂದಾಗುತ್ತದೆ. ಈಗ $(\alpha+\sqrt{\beta})$ ಎಂಬುದು $f(x)$ನ ಮೂಲವಾದ್ದರಿಂದ $f(\alpha+\sqrt{\beta})=0$.

ಆದ್ದರಿಂದ, (1)ರಲ್ಲಿ $x=\alpha+\sqrt{\beta}$ ಎಂದು ಹಾಕುವುದರಿಂದ

$$0=0.Q(\alpha+\sqrt{\beta})+(A\alpha+B)+A\sqrt{\beta}$$

ಎಂದಾಗುತ್ತದೆ. ಅಂದರೆ

$$A\alpha+B=0,\ A\sqrt{\beta}=0.$$

ಈಗ, $(\alpha+\sqrt{\beta})$ ಎಂಬುದು ಅಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಿರುವುದರಿಂದ $\beta\neq 0$. ಆದ್ದರಿಂದ, $A=0$; ಮತ್ತು $A\alpha+B=0$ ಎಂಬ ಫಲಿತಾಂಶದಲ್ಲಿ $A=0$ ಬಳಸುವುದರಿಂದ, $B=0$ ಎಂದಾಗುತ್ತದೆ.

ಆದ್ದರಿಂದ, $[x-(\alpha-\sqrt{\beta})]$ ಎಂಬುದು $f(x)$ ನ ಅಪವರ್ತನ ಅಥವಾ $(\alpha-\sqrt{\beta})$ ಎಂಬುದು $f(x)=0$ ಸಮೀಕರಣದ ಮೂಲವಾಗಿರುತ್ತದೆ.

ಗಮನಿಸಿ : (i) ಪ್ರಮೇಯ (2)ರ ಪರಿಣಾಮವಾಗಿ $f(x) = 0$ ಸಮೀಕರಣದಲ್ಲಿ $f(x)$ ನ ಸಹಾಂಕಗಳೆಲ್ಲಾ ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾಗಿದ್ದು, $(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta})$ – ಇಲ್ಲಿ α, β ಗಳು ಭಾಗಲಬ್ಧ ಹಾಗೂ $\sqrt{\alpha}, \sqrt{\beta}$ಗಳು ಅಭಾಗಲಬ್ಧ – ಒಂದು ಮೂಲವಾಗಿದ್ದರೆ, ಆಗ $\sqrt{\alpha}-\sqrt{\beta}$, $-\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}$ ಮತ್ತು $-\sqrt{\alpha}-\sqrt{\beta}$ ಇವುಗಳೂ ಮೂಲವಾಗಿರುತ್ತವೆ.

(ii) ಪ್ರಮೇಯ (1)ರ ಪರಿಣಾಮವಾಗಿ, ಬೆಸ ಪರಿಮಾಣದ ಬಹುಘಾತಪದಿ ಸಮೀಕರಣವು ಕನಿಷ್ಠ ಪಕ್ಷ ಒಂದಾದರೂ ನೈಜ ಮೂಲವನ್ನು ಹೊಂದಿರುತ್ತದೆ.

ಉದಾಹರಣೆಗಳು

1. $2x^3 - 3x^2 - 18x + 5 = 0$ ಸಮೀಕರಣದ ಒಂದು ಮೂಲ $2+\sqrt{3}$ ಆಗಿದ್ದರೆ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಬಿಡಿಸಿ.

ಸಮೀಕರಣದ ಒಂದು ಮೂಲವು $(2+\sqrt{3})$ ಆಗಿರುವುದರಿಂದ $(2-\sqrt{3})$ ಕೂಡ ಒಂದು ಮೂಲವಾಗಿರುತ್ತದೆ. ಉಳಿದ ಇನ್ನೊಂದು ಮೂಲವು γ ಆಗಿರಲಿ.

ಈಗ, ಮೂಲಗಳ ಮೊತ್ತ

$$(2+\sqrt{3})+(2-\sqrt{3})+\gamma = -\frac{(-3)}{2} = \frac{3}{2}$$

ಆಗಿರುತ್ತದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ

$$4+\gamma = \frac{3}{2} \text{ ಅಥವಾ } \gamma = \frac{3}{2}-4 = \frac{-5}{2}$$

ಆದ್ದರಿಂದ ಸಮೀಕರಣದ ಮೂಲಗಳು:

$$2+\sqrt{3},\ 2-\sqrt{3},\ \frac{-5}{2}$$

2. $(2+3i)$ ಎಂಬುದು $x^3 - 3x^2 + 9x + 13 = 0$ ಸಮೀಕರಣದ ಒಂದು ಮೂಲ. ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಬಿಡಿಸಿ.

$(2+3i)$ ಎಂಬ ಮಿಶ್ರ ಊಹ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆಯು ಒಂದು ಮೂಲವಾಗಿರುವುದರಿಂದ ಅದರ ಸಹವರ್ತಿ ಮಿಶ್ರಸಂಖ್ಯೆ $(2-3i)$ ಎಂಬುದೂ ಒಂದು ಮೂಲ. ಇನ್ನೊಂದು ಉಳಿದಿರುವ ಮೂಲವು γ ಆಗಿರಲಿ. ಆಗ, ಮೂಲಗಳ ಮೊತ್ತ

$$(2+3i)+(2-3i)+\gamma = -\frac{(-3)}{1} = 3$$

ಅಂದರೆ, $4+\gamma = 3$ ಅಥವಾ $\gamma = -1$ ಆಗಿರುತ್ತದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ, ಸಮೀಕರಣದ ಮೂಲಗಳು:

$2+3i$, $2-3i$ ಮತ್ತು -1.

3. $3x^5+2x^4-30x^3-20x^2+3x+2=0$ ಸಮೀಕರಣದ ಒಂದು ಮೂಲವು $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ ಆಗಿದೆ. ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಬಿಡಿಸಿ.

ಈಗ, $(\sqrt{2}+\sqrt{3})$ ಒಂದು ಮೂಲವಾಗಿರುವುದರಿಂದ, ಅದರ ಸಹವರ್ತಿಗಳಾದ $(\sqrt{2}-\sqrt{3})$, $(-\sqrt{2}+\sqrt{3})$ ಮತ್ತು $(-\sqrt{2}-\sqrt{3})$ಗಳೂ ಮೂಲಗಳಾಗಿರುತ್ತವೆ. ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಸಮೀಕರಣವು ಐದನೇ ಪ್ರಮಾಣದ್ದಾಗಿರುವುದರಿಂದ ಒಟ್ಟು 5 ಮೂಲಗಳಿರುತ್ತವೆ. ಇನ್ನೂ ಉಳಿದ ಒಂದು ಮೂಲವು γ ಆಗಿರಲಿ. ಈಗ, ಮೂಲಗಳ ಮೊತ್ತ

$$(\sqrt{2}+\sqrt{3})+(\sqrt{2}-\sqrt{3})+(-\sqrt{2}+\sqrt{3})+(-\sqrt{2}-\sqrt{3})+\gamma=\frac{-2}{3}$$

ಆದ್ದರಿಂದ, $\gamma=\frac{-2}{3}$ ಆಗಿರುತ್ತದೆ. ಅಂದರೆ, ಸಮೀಕರಣದ 5 ಮೂಲಗಳು: $(\sqrt{2}+\sqrt{3})$, $(\sqrt{2}-\sqrt{3})$, $(-\sqrt{2}+\sqrt{3})$, $(-\sqrt{2}-\sqrt{3})$ ಮತ್ತು $\frac{-2}{3}$.

4. $x^4+5x^3+13x^2+16x+10=0$ ಸಮೀಕರಣದ ಒಂದು ಮೂಲವು $(-1-i)$. ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಬಿಡಿಸಿ.

ಈಗ, $(1-i)$ಎಂಬ ಮಿಶ್ರ ಊಹ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆಯು ಒಂದು ಮೂಲವಾಗಿರುವುದರಿಂದ, $(-1+i)$ ಎಂಬ ಸಹವರ್ತಿಯೂ ಒಂದು ಮೂಲವಾಗಿದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ

$$[x-(-1-i)]\ [x-(-1+i)] = [(x+1)+i)]\ [(x+1)-i)]$$

$$=[(x+1)^2+1)]$$

ಎಂಬುದು ಸಮೀಕರಣದ ಎಡಭಾಗದ ಬಹುಘಾತಪದಿಯ ಅಪವರ್ತನವಾಗಿರುತ್ತದೆ. ಈ ಬಹುಘಾತಪದಿಯಾದ $(x^4+5x^3+13x^2+16x+10)$ನ್ನು $[(x+1)^2+1]$ ಭಾಗಿಸಿದಾಗ ಗುಣಲಬ್ಧವಾಗಿ (x^2+3x+5) ಎಂಬ ಇನ್ನೊಂದು ಅಪವರ್ತನವು ದೊರೆಯುತ್ತದೆ.

ಈಗ, $x^2+3x+5=0$ ಎಂಬ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಬಿಡಿಸಿದಾಗ

$$x=\frac{-3\pm\sqrt{9-20}}{2}=\frac{-3\pm i\sqrt{11}}{2}$$

ಎಂಬ ಮೂಲಗಳು ದೊರಕುತ್ತವೆ. ಆದ್ದರಿಂದ, ಸಮೀಕರಣದ 4 ಮೂಲಗಳು:

$$(-1-i),\ (-1+i),\ \frac{-3+i\sqrt{11}}{2},\ \frac{-3-i\sqrt{11}}{2}$$

ಅಭ್ಯಾಸ - 4.5

1. $(5-\sqrt{2})$ ಎಂಬುದು $x^4-6x^3-16x^2+82x+23=0$ ಸಮೀಕರಣದ ಒಂದು ಮೂಲ. ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಬಿಡಿಸಿ.

2. $x^6+3x^5-x^4+6x^3-x^2+3x+1=0$ ಸಮೀಕರಣದ ಎರಡು ಮೂಲಗಳು $\sqrt{3}-2$ ಮತ್ತು i. ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಬಿಡಿಸಿ.

3. $x^3-5x^2+9x-5=0$ ಸಮೀಕರಣದ ಒಂದು ಮೂಲವು $2+i$. ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಬಿಡಿಸಿ.

4. $x^3-9x^2+25x-21=0$ ಸಮೀಕರಣದ ಒಂದು ಮೂಲವು $3+\sqrt{2}$ ಆಗಿದ್ದರೆ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಬಿಡಿಸಿ.

5. $(2-3i)$ ಎಂಬುದು $x^4-2x^3+2x^2+38x-39=0$ ಸಮೀಕರಣದ ಒಂದು ಮೂಲ. ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಬಿಡಿಸಿ.

4.6 $ax^3+3Hx+G=0$ ಮಾದರಿಯ ಘನ ಸಮೀಕರಣಗಳು

ಈಗ $ax^3+3Hx+G=0$ .... (1)

ಮಾದರಿಯ ಒಂದು ಘನ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಪರಿಗಣಿಸಿ. ಇಲ್ಲಿ, a, H ಮತ್ತು G ಎಂಬುವು ಸ್ಥಿರಾಂಕಗಳು. ಈ ವಿಶೇಷವಾದ ಮಾದರಿಯ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಬಿಡಿಸಲು ಕಾರ್ಡ್‌ನ್-ವಿಧಾನವನ್ನು ಬಳಸುತ್ತೇವೆ. ಈ ವಿಶೇಷವಾದ ವಿಧಾನವನ್ನು ಕೊಟ್ಟಾತ ಹೈರೋನಿಮೊ ಕಾರ್ಡನೊ (1501 - 76) ಎಂಬ ಇಟಲಿ ದೇಶದ ಗಣಿತಜ್ಞ.

ಸಮೀಕರಣ (1) ರಲ್ಲಿ, $x=u+v$ ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೆ

$$x^3=u^3+v^3+3uv(u+v)$$

ಅಥವಾ $x^3=u^3+v^3+3uvx$

ಅಥವಾ $x^3-3uvx-(u^2+v^3)=0$ .... (2)

ಸಮೀಕರಣಗಳಾದ (1) ಮತ್ತು (2)ನ್ನು ಹೋಲಿಸಿದಾಗ

$uv=-H$ ಮತ್ತು $u^3+v^3=-G$

ಅಥವಾ $u^3v^3=-H^3$ ಮತ್ತು $u^3+v^3=-G$ .... (3)

ಎಂದು ದೊರೆಯುತ್ತದೆ.

ಈಗ, $u^3=\alpha$ ಮತ್ತು $v^3=\beta$ ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೆ

$\alpha+\beta=-G$ ಮತ್ತು $\alpha\beta=-H^3$ .... (4)

ಎಂದಾಗುತ್ತದೆ. ನಿತ್ಯಸಮೀಕರಣವಾದ

$$(\alpha-\beta)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta$$

ಎಂಬುದರಲ್ಲಿ (4)ನ್ನು ಬಳಸುವುದರಿಂದ

$$(\alpha-\beta)^2=(-G)^2-4(-H)^3$$

ಅಥವಾ $\alpha - \beta = \sqrt{G^2 + 4H^3}$

ಎಂಬುದಾಗಿ ದೊರೆಯುತ್ತದೆ. ಈಗ

$$\alpha - \beta = \sqrt{G^2 + 4H^3}$$

ಮತ್ತು $\alpha + \beta = -G$

ಇವುಗಳನ್ನು ಕ್ರಮವಾಗಿ ಕೂಡುವುದರಿಂದ ಮತ್ತು ಒಂದರಲ್ಲಿ ಇನ್ನೊಂದನ್ನು ಕಳೆಯುವುದರಿಂದ

$$2\alpha = -G + \sqrt{G^2 + 4H^3}$$

ಮತ್ತು $2\beta = -G - \sqrt{G^2 + 4H^3}$

ಅಥವಾ $\alpha = \frac{1}{2}\left[-G + \sqrt{G^2 + 4H^3}\right]$

ಮತ್ತು $\beta = \frac{1}{2}\left[-G - \sqrt{G^2 + 4H^3}\right]$

ಎಂಬುದಾಗಿ ದೊರೆಯುತ್ತದೆ.

ಈಗ, u^3 ಮತ್ತು v^3 ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಘನಮೂಲಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿದರೆ u ಮತ್ತು v ಒಂದೊಂದಕ್ಕೂ ಮೂರು ಮೂರು ಬೆಲೆಗಳು ದೊರೆಯುತ್ತದೆ. ಅವುಗಳೆಂದರೆ,

$u, u\omega, u\omega^2$ ಮತ್ತು $v, v\omega, v\omega^2$. ಇಲ್ಲಿ $\omega = (-1 + i\sqrt{3})/2$ ಆದ್ದರಿಂದ, x ಗೆ ಮೂರು ಬೆಲೆಗಳಿದ್ದು, ಅವುಗಳೆಂದರೆ

$$x = u + v,\ u\omega + v\omega^2 \text{ ಮತ್ತು } u\omega^2 + v\omega$$

ಇವುಗಳೇ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಘನ ಸಮೀಕರಣದ ಮೂಲಗಳು.

ಉದಾಹರಣೆಗಳು

1. $x^3 - 18x - 35 = 0$ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಬಿಡಿಸಿ.

ಈ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು $x^3 + 3Hx + G = 0$ ಎಂಬುದರ ಜೊತೆಗೆ ಹೋಲಿಸಿದಾಗ $H = -6, G = -35$ ಎಂದು ದೊರೆಯುತ್ತದೆ. ಈಗ

$x = u + v$ ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೆ

$u^3 + v^3 = -G = 35,\ uv = -H = 6$ ಎಂದಾಗುತ್ತದೆ.

$\alpha = u^3$ ಮತ್ತು $\beta = v^3$ ಎಂದು ಸೂಚಿಸಿದರೆ

$$\alpha + \beta = 35 \text{ ಮತ್ತು } \alpha\beta = u^3v^3 = 216$$

ಎಂದು ದೊರೆಯುತ್ತದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ

$$(\alpha-\beta)^2 = (\alpha+\beta)^2 - 4\alpha\beta = (35)^2 - 4(216)$$

$$= 361$$

$$\therefore\ \alpha - \beta = 19$$

ಮತ್ತು $\alpha+\beta = 35$

ಇವೆರಡನ್ನು ಕ್ರಮವಾಗಿ ಕೂಡುವುದರಿಂದ ಮತ್ತು ಕಳೆಯುವುದರಿಂದ

$\alpha = u^3 = 27$ ಮತ್ತು $\beta = v^3 = 8$

ಅಥವಾ $\alpha = 3, 3\omega, 3\omega^2$, ಮತ್ತು $\beta = 2, 2\omega, 2\omega^2$

ಎಂದು ದೊರೆಯುತ್ತದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ಸಮೀಕರಣದ ಮೂಲಗಳು :

$$x = u + v = 3 + 2 = 5$$

$$x = u\omega + v\omega^2 = 3\left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right) + 2\left(\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{-5+i\sqrt{3}}{2}$$

ಮತ್ತು

$$x = u\omega^2 + v\omega = 3\left(\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\right) + 2\left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{-5-i\sqrt{3}}{2}$$

ಅಂದರೆ, ಮೂಲಗಳು 5, $\frac{-5+i\sqrt{3}}{2}$ ಮತ್ತು $\frac{-5-i\sqrt{3}}{2}$ ಆಗಿರುತ್ತವೆ.

ಗಮನಿಸಿ : ಘನ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಕಾರ್ಡನ್ ವಿಧಾನದಿಂದ ಬಿಡಿಸುವ ಸಂದರ್ಭದಲ್ಲಿ, u ಮತ್ತು v ಇವುಗಳಲ್ಲಿ ಒಂದೊಂದೂ ಮೂರು ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿರುವುದರಿಂದ ಸಮೀಕರಣದ ಮೂಲ, $x = u + v$ ಗೆ ಒಟ್ಟು 9 ಬೆಲೆಗಳು ಇರುವಂತೆ ತೋರುತ್ತದೆ. ಆದರೆ, $uv = -H$ ಎಂಬ ನಿಯಮವನ್ನು ಸರಿಹೊಂದಬೇಕಾಗಿರುವುದರಿಂದ, ಅಂದರೆ x ನ 9 ಬೆಲೆಗಳಲ್ಲಿ ಗುಣಲಬ್ಧ uv ಒಂದು ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಿರಬೇಕಾದ್ದರಿಂದ, ಕೇವಲ ಮೂರು ಬೆಲೆಗಳು ಅಂದರೆ, $u+v$, $u\omega+v\omega^2$ ಮತ್ತು $u\omega^2+v\omega$ ಸರಿಯಾದ ಮೂಲಗಳಾಗಿರುತ್ತವೆ. ಫಲಿತಾಂಶ (3)ನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸಿದಾಗ, u^3 ಮತ್ತು v^3 ಎಂಬುವು $t^2 + Gt - H^3 = 0$ ಎಂಬುದರ ಮೂಲಗಳೆಂದು ಕಂಡುಬರುತ್ತವೆ.

2. ಕಾರ್ಡನ್ ವಿಧಾನದಿಂದ $x^3 - 6x - 9 = 0$ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಬಿಡಿಸಿ.

ಇಲ್ಲಿ, $H = -2$ ಮತ್ತು $G = -9$. ನಮಗೆ ಬೇಕಾಗಿರುವ ಮೂಲಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು u^3 ಮತ್ತು v^3 ಇವುಗಳ ಬೆಲೆಗಳು ಬೇಕಾಗುತ್ತವೆ. ಈ ಮೇಲೆ ಸೂಚಿಸಿದಂತೆ u^3 ಮತ್ತು v^3 ಎಂಬುವು

$$t^2 + Gt - H^3 = 0$$

ಅಥವಾ $t^2-9t+8=0$

ಅಥವಾ $(t-1)(t-8)=0$

ಎಂಬ ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣದ ಮೂಲಗಳಾಗಿರುತ್ತವೆ. ಆದ್ದರಿಂದ $t=1$, $t=8$ ಎಂದು ದೊರೆಯುತ್ತದೆ. ಅಂದರೆ

$u^3=1$ ಮತ್ತು $v^3=8$ ಅಥವಾ $u=1$ ಮತ್ತು $v=2$ ಎಂದಾಗುತ್ತದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ

$x=u+v,\ u\omega+v\omega^2,\ u\omega^2+v\omega$

ಅಂದರೆ $x=1+2,\ \omega+2\omega^2,\ \omega^2+2\omega$

ಅಥವಾ $x=3, \dfrac{-1+i\sqrt{3}}{2}+2\left(\dfrac{-1-i\sqrt{3}}{2}\right), \quad \dfrac{-1-i\sqrt{3}}{2}+2\left(\dfrac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)$

ಅಥವಾ $x=3, \dfrac{-3-i\sqrt{3}}{2}, \quad \dfrac{-3+i\sqrt{3}}{2}$

ಎಂಬುವು ಸಮೀಕರಣದ ಮೂಲಗಳು.

ಅಭ್ಯಾಸ - 4.6

ಈ ಕೆಳಗಿನ ಘನ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಕಾರ್ಡನ್ ವಿಧಾನದಿಂದ ಬಿಡಿಸಿ :

1. $x^3-21x-344=0$
2. $x^3-30x+133=0$
3. $x^3+63x-316=0$
4. $x^3+72x-1720=0$
5. $x^3+21x+342=0$
6. $x^3-15x=126$
7. $x^3-12x-65=0$
8. $x^3+3x-14=0$
9. $x^3-3abx+(a^3+b^3)=0$

ಅಧ್ಯಾಯ - 5

ಕ್ರಮಯೋಜನೆಗಳು ಮತ್ತು ವಿಕಲ್ಪಗಳು

ವಾಣಿಜ್ಯ, ವ್ಯಾಪಾರ, ಕೈಗಾರಿಕೆಗಳಿಂದ ಕೂಡಿದ ಈ ನವೀನ ಯುಗದಲ್ಲಿ, ಅನೇಕ ಸಂದರ್ಭಗಳಲ್ಲಿ ವ್ಯಕ್ತಿಗಳನ್ನಾಗಲೀ, ವಸ್ತುಗಳನ್ನಾಗಲೀ ಆರಿಸುವ (ವಿಕಲ್ಪ) ಅಥವಾ ಜೋಡಿಸುವ (ಕ್ರಮಯೋಜನೆ) ಆವಶ್ಯಕತೆಗಳು ಕಂಡುಬರುತ್ತವೆ. ವ್ಯಾಪಾರ ವಾಣಿಜ್ಯಗಳು ಈ ರೀತಿಯ ಆಯ್ಕೆ ಅಥವಾ ಜೋಡಣೆಗಳನ್ನು ಸರಿಯಾಗಿ ಮಾಡುವುದರ ಮೇಲೆ ಅವಲಂಬನವಾಗಿರುತ್ತವೆ. ಈ ಅಧ್ಯಾಯದಲ್ಲಿ ಇಂತಹ ಸಮಸ್ಯೆಗಳನ್ನು ಚರ್ಚಿಸಿದೆ.

5.1 ರೇಖೀಯ ಕ್ರಮಯೋಜನೆ

ಕೆಲವು ವಸ್ತುಗಳನ್ನು ನಾವು ಒಂದು ಸಾಲಿನಲ್ಲಿ ಜೋಡಿಸಬೇಕಾದ ಸಂದರ್ಭದಲ್ಲಿ ಯಾವುದನ್ನು ಮೊದಲು ಇಡಬೇಕು, ಎರಡನೆಯದಾಗಿ ಯಾವುದನ್ನು ಇಡಬೇಕು, ಇತ್ಯಾದಿ ಪ್ರಶ್ನೆಗಳು ಉದ್ಭವವಾಗುತ್ತವೆ. ಎಲ್ಲಕ್ಕಿಂತ ಮುಖ್ಯ ಸಮಸ್ಯೆ ಎಂದರೆ ಎಷ್ಟು ವಿಧಗಳಲ್ಲಿ ನಮಗೆ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ವಸ್ತುಗಳನ್ನು ಜೋಡಿಸಬಹುದು ಎನ್ನುವುದು. ಇಂತಹ ಸಮಸ್ಯೆಗಳನ್ನು ಮುಂದೆ ಕೊಡಲಾಗಿದೆ.

ಉದಾಹರಣೆ 1. *ಗುಲಾಬಿ, ಡೇರೆ* ಮತ್ತು *ಸೇವಂತಿಗೆ* ಈ ಮೂರು ಹೂವುಗಳನ್ನು ಕೊಟ್ಟಾಗ ಎಷ್ಟು ವಿಧಗಳಲ್ಲಿ ಇವನ್ನು ಜೋಡಿಸಬಹುದು ಎಂದು ತಿಳಿಯೋಣ :

ಗುಲಾಬಿ, ಡೇರೆ, ಸೇವಂತಿಗೆ
ಗುಲಾಬಿ, ಸೇವಂತಿಗೆ, ಡೇರೆ
ಡೇರೆ, ಸೇವಂತಿಗೆ, ಗುಲಾಬಿ
ಡೇರೆ, ಗುಲಾಬಿ, ಸೇವಂತಿಗೆ
ಸೇವಂತಿಗೆ, ಗುಲಾಬಿ, ಡೇರೆ
ಸೇವಂತಿಗೆ, ಡೇರೆ, ಗುಲಾಬಿ

ಹೀಗೆ ಒಟ್ಟು 6 ವಿಧಗಳಲ್ಲಿ ಮೂರು ಹೂವುಗಳನ್ನು ಜೋಡಿಸಬಹುದು.

ಆದರೆ ಪದಾರ್ಥಗಳು ಹೆಚ್ಚಿಗೆ ಇದ್ದಾಗ, ಈ ರೀತಿ ಎಲ್ಲ ವಿಧಗಳನ್ನು (ಸಾಧ್ಯತೆಗಳನ್ನು) ಬರೆಯುವುದು ಸುಲಭವಲ್ಲ, ಆದ್ದರಿಂದ, ಈ ಮುಂದೆ ಹೇಳಿರುವಂತೆ ಯೋಚಿಸಬಹುದು. ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಮೂರು ಹೂವುಗಳಲ್ಲಿ ಯಾವುದಾದರೂ ಒಂದನ್ನು ಮೊದಲ ಸ್ಥಾನದಲ್ಲಿ ಇಟ್ಟರೆ ಮೂರು ವಿಧಗಳಾಗುವುದು. ಈಗ ಎರಡನೆಯ ಸ್ಥಾನದಲ್ಲಿ ಉಳಿದೆರಡು ಹೂವುಗಳಲ್ಲಿ ಯಾವುದಾದರೂ ಇಡಬಹುದು. ಅಂದರೆ, ಮೊದಲ ಸ್ಥಾನದ ಪ್ರತಿ ಹೂವಿಗೆ 2ನೇ ಹೂವು ಇಡಲು 2 ವಿಧಗಳಿವೆ. ಅಂದರೆ, ಮೊದಲೆರಡು ಹೂವು ಜೋಡಿಸಲು 3×2 ವಿಧಗಳಾದವು. ಈಗ ಮೂರನೆಯ ಸ್ಥಾನದಲ್ಲಿ ಉಳಿದ 1 ಹೂವು ಇಡಬೇಕು. ಅಂದರೆ 1 ವಿಧ ಆಯಿತು. ಆದ್ದರಿಂದ ಮೂರು ಹೂವುಗಳನ್ನು $3 \times 2 \times 1 = 6$ ವಿಧಗಳಲ್ಲಿ ಜೋಡಿಸಬಹುದು.

ಈ ಎಲ್ಲಾ ವಿಧದ ಜೋಡಣೆಗಳಿಗೆ *ರೇಖೀಯ ಕ್ರಮಯೋಜನೆಗಳು* ಎನ್ನುವರು.

5.2 ಒಂದು ಮೂಲ ಸೂತ್ರ

ಮೇಲಿನ ಉದಾಹರಣೆಯಲ್ಲಿ ಈ ಮೂಲ ಸೂತ್ರ ಅಳವಡಿಸಿದೆ :

ಒಂದು ಕ್ರಿಯೆಯನ್ನು m ವಿಧಗಳಲ್ಲಿಯೂ ಮತ್ತು ಇದನ್ನು ಮಾಡಿದ ನಂತರ, ಇದನ್ನು ಅವಲಂಬಿಸದ ಮತ್ತೊಂದು ಕ್ರಿಯೆಯನ್ನು n ವಿಧಗಳಲ್ಲಿಯೂ ನಿರ್ವಹಿಸಲು ಸಾಧ್ಯವಾದರೆ, ಒಟ್ಟಾಗಿ ಈ ಎರಡು ಕ್ರಿಯೆಗಳನ್ನು $m \times n$ ವಿಧಗಳಲ್ಲಿ ನಿರ್ವಹಿಸಬಹುದು. ಉದಾಹರಣೆಗೆ, a, b, c ಮೂರು ಅಕ್ಷರಗಳನ್ನು ಬೇರೆ ಬೇರೆ ವಿಧಗಳಲ್ಲಿ ಜೋಡಿಸಬೇಕಾಗಿದೆ. ಮೇಲೆ ವಿವರಿಸಿರುವಂತೆ ಮೊದಲನೆಯ ಸ್ಥಾನವನ್ನು 3 ವಿಧಗಳಲ್ಲಿಯೂ, ನಂತರ ಎರಡನೆಯ ಸ್ಥಾನವನ್ನು 2 ವಿಧಗಳಲ್ಲಿಯೂ, ಕೊನೆಯದಾಗಿ ಮೂರನೆಯ ಸ್ಥಾನವನ್ನು 1 ವಿಧದಲ್ಲಿಯೂ ಜೋಡಿಸಬಹುದು. ಒಟ್ಟಾಗಿ ಈ ಮೂರು ಅಕ್ಷರಗಳನ್ನೂ $3 \times 2 \times 1 = 6$ ವಿಧಗಳಲ್ಲಿ ಜೋಡಿಸಬಹುದು.

ಸೂಚನೆ : ಈ ಮೂಲ ಸೂತ್ರವನ್ನು 3 ಕ್ಕಿಂತ ಹೆಚ್ಚು ಕ್ರಿಯೆಗಳಿದ್ದರೂ ವಿಸ್ತರಿಸಬಹುದು. ಒಂದು ಕ್ರಿಯೆಯನ್ನು m ವಿಧಗಳಲ್ಲಿ, ನಂತರ ಎರಡನೆಯ ಕ್ರಿಯೆಯನ್ನು n ವಿಧಗಳಲ್ಲಿ, ಮೂರನೆಯ ಕ್ರಿಯೆಯನ್ನು p ವಿಧಗಳಲ್ಲಿ, ನಾಲ್ಕನೆಯ ಕ್ರಿಯೆಯನ್ನು q ವಿಧಗಳಲ್ಲಿ .... ಇತ್ಯಾದಿ ಮಾಡಬಹುದಾದರೆ ಒಟ್ಟಾಗಿ ಈ ಎಲ್ಲಾ ಕ್ರಿಯೆಗಳನ್ನು $m \times n \times p \times q$.... ವಿಧಗಳಲ್ಲಿ ಮಾಡಬಹುದು.

ಉದಾಹರಣೆ 2.

A, B ಎಂಬ ಎರಡು ಪಟ್ಟಣಗಳು 4 ದಾರಿಗಳಿಂದ ಬೇರ್ಪಟ್ಟಿವೆ. ಒಬ್ಬನು ಹೋಗುವುದು ಒಂದು ದಾರಿಯಲ್ಲಿ ಮತ್ತು ಹಿಂತಿರುಗಲು ಬೇರೊಂದು ದಾರಿಯಾದರೆ ಹೋಗಿ ಬರಲು ಎಷ್ಟು ವಿಧಗಳಿವೆ.

A ಯಿಂದ B ಗೆ ಇರುವ 4 ದಾರಿಗಳಲ್ಲಿ ಯಾವುದಾದರೂ ಒಂದರಲ್ಲಿ ಹೋಗಲು ನಿರ್ಧರಿಸಬಹುದು. ಹಿಂತಿರುಗಲು ಉಳಿದ 3 ದಾರಿಗಳಲ್ಲಿ ಯಾವುದಾದರೂ ಒಂದನ್ನು ಆರಿಸಬಹುದು. ಆದ್ದರಿಂದ ಹೋಗಿ ಬರಲು $4 \times 3 = 12$ ವಿಧಗಳಿವೆ.

ಉದಾಹರಣೆ 3.

ಒಂದು ರೈಲ್ವೆ ಕ್ಯಾರೇಜ್‌ನಲ್ಲಿ 6 ಸ್ಥಳಗಳಿವೆ. 6 ಜನರು ಇದರಲ್ಲಿ ಎಷ್ಟು ವಿಧಗಳಲ್ಲಿ ಕುಳಿತುಕೊಳ್ಳಬಹುದು ?

ಮೊದಲನೆಯವನಿಗೆ 6 ಸ್ಥಳಗಳಿವೆ, ಅಂದರೆ 6 ವಿಧಗಳು ಆದವು; ಎರಡನೆಯವನಿಗೆ 5 ಸ್ಥಳಗಳು, ಮೂರನೆಯವನಿಗೆ 4 ವಿಧಗಳಿವೆ ... ಇತ್ಯಾದಿ

ಒಟ್ಟು ವಿಧಗಳು $= 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 720$.

ಉದಾಹರಣೆ 4.

10 ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳಲ್ಲಿ ಬೇರೆ ಬೇರೆ ಮೌಲ್ಯದ 2 ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿವೇತನಗಳನ್ನು ಎಷ್ಟು ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಹಂಚಬಹುದು. (ಎರಡು ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿವೇತನಗಳನ್ನೂ ಒಬ್ಬನಿಗೇ ಕೊಡುವುದನ್ನು ನಿಷೇಧಿಸಿದೆ).

ಮೊದಲನೆಯ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿವೇತನವನ್ನು 10 ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳಲ್ಲಿ ಯಾರಿಗಾದರೂ ಕೊಡಬಹುದು ಅಂದರೆ, 10 ವಿಧಗಳಲ್ಲಿ ಕೊಡಬಹುದು. 2ನೆಯ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿವೇತನವನ್ನು ಕೊಡಲು ಉಳಿದ 9 ಮಂದಿಯಲ್ಲಿ ಯಾರನ್ನಾದರೂ ಆರಿಸಬಹುದು. ಅಂದರೆ, 9 ವಿಧಗಳಲ್ಲಿ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿವೇತನ ಕೊಡಬಹುದು. ಒಟ್ಟಾಗಿ ಎರಡು ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿವೇತನಗಳನ್ನು $10 \times 9 = 90$ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಕೊಡಬಹುದು.

ಉದಾಹರಣೆ 5.

1, 2, 3, 4, 5, 6 ಅಂಕಿಗಳಲ್ಲಿ ಯಾವುದಾದರೂ ಮೂರು ಅಂಕಿಗಳನ್ನು ಆರಿಸಿ ಮೂರು ಅಂಕಿಗಳುಳ್ಳ ಎಷ್ಟು ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಮಾಡಬಹುದು?

ಏಕಸ್ಥಾನದಲ್ಲಿ, ಕೊಟ್ಟಿರುವ 6 ಅಂಕಿಗಳಲ್ಲಿ ಯಾವುದಾದರೂ ಅಂಕಿಯನ್ನು ಹಾಕಬಹುದು. ಅಂದರೆ 6 ವಿಧಗಳಿವೆ. ನಂತರ ದಶಕಸ್ಥಾನದಲ್ಲಿ ಉಳಿದ 5 ಅಂಕಿಗಳಲ್ಲಿ ಯಾವುದಾದರೂ ಒಂದನ್ನು ಹಾಕಬಹುದು. ಅಂದರೆ 5 ವಿಧಗಳಿವೆ. ಇದೇ ರೀತಿ ಶತಕಸ್ಥಾನಕ್ಕೆ 4 ವಿಧಗಳಿವೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ಮೂಲ ತತ್ವದಂತೆ $6 \times 5 \times 4 = 120$ ವಿಧಗಳಲ್ಲಿ ಮೂರು ಅಂಕಿಯುಳ್ಳ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಮಾಡಬಹುದು.

5.3.1 ಕ್ರಮಯೋಜನೆಗಳು

ಕೊಟ್ಟಿರುವ ವಸ್ತುಗಳನ್ನು ಅಥವಾ ವಸ್ತುಗಳ ಗಣವನ್ನು ಬೇರೆ ಬೇರೆ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಎಷ್ಟು ವಿಧಗಳಲ್ಲಿ ಜೋಡಿಸಲು ಸಾಧ್ಯವೋ ಹಾಗೆ ಜೋಡಿಸಿದಲ್ಲಿ ಬರುವ ಜೋಡಣೆಗಳ ಗುಂಪಿಗೆ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಎಲ್ಲಾ ವಸ್ತುಗಳ ಕ್ರಮಯೋಜನೆ ಎನ್ನುವರು.

ಉದಾ.(1): a, b ಎರಡು ವಸ್ತುಗಳನ್ನು ಒಟ್ಟಾಗಿ ಜೋಡಿಸಿದರೆ ಬರುವ ಕ್ರಮಯೋಜನೆಗಳು ab, ba.

ಉದಾ.(2) : a, b, c ಮೂರು ವಸ್ತುಗಳನ್ನು ಒಟ್ಟಾಗಿ ಜೋಡಿಸಿದಾಗ ಬರುವ ಕ್ರಮಯೋಜನೆಗಳು $abc, acb, bca, bac, cab, cba$.

ಕೊಟ್ಟಿರುವ ವಸ್ತುಗಳೆಲ್ಲವನ್ನೂ ಒಳಗೊಂಡಿರದ ಕ್ರಮಯೋಜನೆಗಳು

ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಎಲ್ಲಾ ವಸ್ತುಗಳನ್ನೂ ಬೇರೆ ಬೇರೆ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಜೋಡಿಸದೆ, ಅವುಗಳಲ್ಲಿ ಕೆಲವನ್ನು ಮಾತ್ರ ಬೇರೆ ಬೇರೆ ಸಾಧ್ಯವಿದ್ದಷ್ಟು ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಜೋಡಿಸಿದರೆ ಬರುವ ಕ್ರಮಯೋಜನೆಗಳು ಕೊಟ್ಟಿರುವ ವಸ್ತುಗಳಲ್ಲಿ ಭಾಗಶಃ ವಸ್ತುಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿರುತ್ತವೆ. ಉದಾಹರಣೆಗೆ, a, b, c ಮೂರು ವಸ್ತುಗಳಲ್ಲಿ ಎರಡನ್ನು ಮಾತ್ರ ತೆಗೆದುಕೊಂಡು ಜೋಡಿಸಿದರೆ ಬರುವ ಕ್ರಮಯೋಜನೆಗಳು ab, bc, ac, ba, cb, ca.

ಕ್ರಮಯೋಜನೆಗಳನ್ನು ಬರೆಯುವ ಕ್ರಮ

n ವಿವಿಧ ವಸ್ತುಗಳಿಂದ r ವಸ್ತುಗಳನ್ನು ಆರಿಸಿ ಜೋಡಿಸಿದಾಗ ಬರುವ ಕ್ರಮಯೋಜನೆಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು $^{n}P_{r}$ ಅಥವಾ nP_{r} ಎಂದು ಬರೆಯುತ್ತೇವೆ.

5.3.2 n ವಿವಿಧ ವಸ್ತುಗಳಲ್ಲಿ r ವಸ್ತುಗಳನ್ನು ಮಾತ್ರ ಜೋಡಿಸಿದಾಗ ಬರುವ ಕ್ರಮಯೋಜನೆಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ

(ಅಂದರೆ ^nP_r ನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವ ಸೂತ್ರ)

$$^nP_r = n(n-1)(n-2) \ldots\ldots\ldots (n-r+1)$$

1	2	3		r
n	n-1	n-2		n-(r-1)

ಚಿತ್ರ 5.1

ಎಂದು ತೋರಿಸಲಾಗುವುದು.

$a_1, a_2, a_3 \ldots a_n$ ಎಂಬ n ಅಕ್ಷರಗಳಿವೆ ಮತ್ತು r ಖಾಲಿ ಸ್ಥಾನಗಳಿವೆ ಎಂದು ಭಾವಿಸೋಣ.

ಈ r ಖಾಲಿ ಸ್ಥಳಗಳನ್ನು n ವಸ್ತುಗಳಲ್ಲಿ ಒಂದೊಂದನ್ನಾಗಿ ಆರಿಸಿ ತುಂಬುತ್ತಾ ಬಂದರೆ ಎಷ್ಟು ವಿಧವಾಗಿ ಜೋಡಣೆಯನ್ನು ಮಾಡಬಹುದೋ ಅದನ್ನು ^nP_r ಎಂದುಹೇಳಬಹುದು. 1ನೇ ಖಾಲಿ ಸ್ಥಳವನ್ನು ತುಂಬಲು n ವಿಧಗಳಿವೆ. ಏಕೆಂದರೆ ಮೇಲೆ ಕೊಟ್ಟಿರುವ n ಅಕ್ಷರಗಳಲ್ಲಿ ಯಾವುದಾದರೂ ಅಕ್ಷರವನ್ನು ತುಂಬಬಹುದು. 1ನೇ ಸ್ಥಳವನ್ನು ತುಂಬಿದ ಮೇಲೆ, 2ನೇ ಸ್ಥಾನವನ್ನು $(n-1)$ ಅಕ್ಷರಗಳಲ್ಲಿ ಯಾವುದಾದರೂ ಒಂದನ್ನು ಆರಿಸಿ ತುಂಬಬಹುದು. ಅಂದರೆ ಮೂಲಸೂತ್ರದಿಂದ ಮೊದಲ ಎರಡು ಸ್ಥಳಗಳನ್ನು $n(n-1)$ ವಿಧಗಳಲ್ಲಿ ತುಂಬಬಹುದು.

ಈಗ ಮೂರನೆಯ ಸ್ಥಾನವನ್ನು ತುಂಬಲು $(n-2)$ ಅಕ್ಷರಗಳಿವೆ. ಅಂದರೆ $(n-2)$ ವಿಧಗಳಲ್ಲಿ ಈ ಸ್ಥಾನವನ್ನು ತುಂಬಬಹುದು. ಇದೇ ರೀತಿ ಮುಂದುವರೆಸುತ್ತಾ r ನೆಯ ಸ್ಥಳವನ್ನು $n-(r-1)$ ವಿಧಗಳಲ್ಲಿ ತುಂಬಬಹುದು. ಎಲ್ಲಾ r ಖಾಲಿ ಸ್ಥಳಗಳನ್ನು $n(n-1)(n-2)(n-3) \ldots (n-r+1)$ ವಿಧಗಳಲ್ಲಿ ತುಂಬಬಹುದು.

$$\therefore\ ^nP_r = n(n-1)(n-2) \ldots\ldots (n-r+1)$$

ಶ್ರೇಣಿ ಗುಣಲಬ್ಧ :

$$^nP_r = n(n-1)(n-2)(n-3) \ldots\ldots\ldots (n-r+1)$$

ಎಂಬ ಸೂತ್ರದಲ್ಲಿ $r = n$ ಹಾಕಿದಾಗ

$$^nP_n = n(n-1)(n-2) \ldots\ldots\ldots (n-n+1)$$

$$= n(n-1)(n-2) \ldots\ldots\ldots 1$$

1 ರಿಂದ n ತನಕ ಕ್ರಮವಾಗಿ ಇರುವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧ ಬರುವುದು. ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ ಇದನ್ನು $n!$ ಅಥವಾ $\angle n$ ಎಂದು ಬರೆಯುತ್ತೇವೆ. ಮತ್ತು '*n ಶ್ರೇಣಿ ಗುಣಲಬ್ಧ*' ಎಂದು ಓದುತ್ತೇವೆ.

$$\therefore \angle n = n\ (n-1)(n-2) \ldots\ldots\ldots 4.\ 3.\ 2.\ 1$$

ಉದಾ. :

$$\angle 4 = 4.3.2.1 = 24$$

$$\angle 5 = 5.4.3.2.1 = 120$$

ಸೂಚನೆ : (i) ^nP_r ನ ವಿಸ್ತರಣೆಯಲ್ಲಿ $n, (n-1), \ldots$ ಮುಂತಾದ r ಅಪವರ್ತನಗಳಿವೆ.

(ii) $^nP_n = \angle n$

ಉದಾ. :

$$^4P_4 = \angle 4 = 24$$

5.3.3 ^nP_r ಸೂತ್ರವನ್ನು ಶ್ರೇಣಿ ಗುಣಲಬ್ಧದ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಬರೆಯುವುದು

$$^nP_r = n(n-1)(n-2) \ldots\ldots\ldots (n-r+1)$$

ಸೂತ್ರದ ಬಲಭಾಗವನ್ನು $(n-r)(n-r-1) \ldots\ldots 1$ ರಿಂದ ಗುಣಿಸಿ ಭಾಗಿಸಿದರೆ ಅದರಿಂದಲೇ

$$^nP_r = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)\ldots(n-r+1)(n-r)(n-r-1)\ldots 1}{(n-r)(n-r-1)\ldots 1}$$

ಅಂಶದಲ್ಲಿ n ನಿಂದ 1ರ ತನಕ ಅಪವರ್ತನಗಳಿವೆ ಮತ್ತು ಛೇದದಲ್ಲಿ $(n-r)$ನಿಂದ 1ರ ತನಕ ಅಪವರ್ತನಗಳಿವೆ.

$$\therefore\ ^nP_r = \frac{\angle n}{\angle(n-r)}$$

ಸೊನ್ನೆಯ ಶ್ರೇಣಿ ಗುಣಲಬ್ಧ $\angle 0$ ಯ ಬೆಲೆ

ಮೇಲಿನ ಸೂತ್ರದಲ್ಲಿ $r = n$ ಹಾಕಿದಾಗ

$$^nP_n = \frac{\angle n}{\angle(n-n)} = \frac{\angle n}{\angle 0}$$

ಆದರೆ, $^nP_n = \angle n$

$$\therefore \angle 0 = \frac{\angle n}{\angle n} = 1$$

ಉದಾಹರಣೆಗಳು

1. $^7P_6$, $^7P_4$, $^5P_4$, $^{12}P_3$ ಇವುಗಳ ಬೆಲೆ ಏನು?

(i) $^7P_6 = 7(7-1)(7-2) \ldots\ldots (7-6+1)$

$= 7.\ 6.\ 5.\ 4.\ 3.\ 2$

$= 5040$

(ii) $^9P_4 = 9(9-1)(9-2) \ldots\ldots$ ಅಂತಹ ನಾಲ್ಕು ಅಪವರ್ತನಗಳು

$= 9.\ 8.\ 7.\ 6$

$= 3024$

(iii) $^5P_4 = 5.\ 4.\ 3.\ 2$

$= 120$

(iv) $^{12}P_3 = 12.\ 11.\ 10$

$= 1320$

2. $^nP_n = 720$ ಆದರೆ n ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ

$^nP_n = n!$ ಎಂಬ ಸೂತ್ರ ನಮಗೆ ತಿಳಿದಿದೆ.

ಈಗ, $720 = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 = 6!$ ಎಂದು ಬರೆಯಬಹುದು.

ಅಂದರೆ $n! = 6!$

$\therefore n = 6$

3. 1, 2, 3, 4, 5 ಅಂಕಿಗಳನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ (i) ಎಷ್ಟು ಮೂರು ಅಂಕಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಮಾಡಬಹುದು? (ಅಂಕಿಗಳನ್ನು ಪುನರಾವರ್ತಿಸಬಾರದು).

(ii) ಇವುಗಳಲ್ಲಿ ಎಷ್ಟು ಸಮ (ಸರಿ) ಸಂಖ್ಯೆಗಳು?

(iii) ಇವುಗಳಲ್ಲಿ 5 ರಿಂದ ಭಾಗವಾಗುವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳೆಷ್ಟು?

(i) 5 ಅಂಕಿಗಳನ್ನು ಕೊಟ್ಟಿದ್ದಾರೆ. ಅವುಗಳಿಂದ 3 ಅಂಕಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಮಾಡಬೇಕಾಗಿದೆ.

ಅಂದರೆ, ಏಕ, ದಶಕ, ಶತಕಸ್ಥಾನಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿರುವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಮಾಡಬೇಕು.

ಏಕಸ್ಥಾನದಲ್ಲಿ 5 ಅಂಕಿಗಳಲ್ಲಿ ಯಾವುದಾದರೂ ಒಂದನ್ನು 5 ವಿಧಗಳಲ್ಲಿ ಭರ್ತಿ ಮಾಡಬಹುದು. ದಶಕಸ್ಥಾನದಲ್ಲಿ ಉಳಿದ 4 ಅಂಕಿಗಳಲ್ಲಿ ಯಾವುದನ್ನಾದರೂ ಭರ್ತಿ ಮಾಡಲು 4 ವಿಧಗಳಿವೆ.

ಶತಕಸ್ಥಾನದಲ್ಲಿ ಉಳಿದ 3 ಅಂಕಿಗಳಲ್ಲಿ ಯಾವುದಾದನ್ನಾದರೂ 3 ವಿಧಗಳಲ್ಲಿ ಭರ್ತಿ ಮಾಡಬಹುದು.

ಮೂಲಸೂತ್ರದಿಂದ ಒಟ್ಟು ಮೂರು ಸ್ಥಾನಗಳನ್ನು $5 \times 4 \times 3 = 60$ ವಿಧಗಳಲ್ಲಿ ಭರ್ತಿ ಮಾಡಬಹುದು.

2ನೆಯ ವಿಧಾನ : 5 ಅಂಕಿಗಳಲ್ಲಿ 3 ಅಂಕಿಗಳನ್ನು $^5P_3$ ವಿಧಗಳಲ್ಲಿ ಆರಿಸಬಹುದು. ಅಂದರೆ

$$^5P_3 = 5.4.3 = 60$$

ವಿಧಗಳಲ್ಲಿ ಆರಿಸಬಹುದು.

(ii) ಸಮ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾಗಬೇಕಾದರೆ ಏಕ ಸ್ಥಾನದಲ್ಲಿ 2 ಅಥವಾ 4ನ್ನು ಹಾಕಬೇಕು. ಅಂದರೆ, 2 ವಿಧಗಳಿವೆ. ದಶಕ ಸ್ಥಾನಕ್ಕೆ ಮತ್ತು ಶತಕ ಸ್ಥಾನಕ್ಕೆ ಉಳಿದ 4 ಅಂಕಿಗಳಲ್ಲಿ 2 ನ್ನು ಹಾಕಬೇಕಾಗಿದೆ. ಈಗ, ಇದರಲ್ಲಿ $^4P_2 = 4.3 = 12$ ವಿಧಗಳಿವೆ.

ಆದ್ದರಿಂದ, ಮೂಲನಿಯಮದಂತೆ ಒಟ್ಟು $2 \times 12 = 24$ ವಿಧಗಳಾದವು. ಅಂದರೆ, 24 ಸಮ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಇರುತ್ತವೆ.

(iii) 5ರಿಂದ ಭಾಗವಾಗಬೇಕಾದರೆ ಏಕಸ್ಥಾನದಲ್ಲಿ 5 ಇರಬೇಕು. ಆದ್ದರಿಂದ 1 ವಿಧದಲ್ಲಿ ಏಕಸ್ಥಾನ ತುಂಬಬಹುದು. ಉಳಿದ 4 ರಲ್ಲಿ ಎರಡು ಅಂಕಿಗಳನ್ನು ಆರಿಸಿ, $^4P_2$ ವಿಧಗಳಲ್ಲಿ ಉಳಿದೆರಡು ಸ್ಥಾನಗಳನ್ನು ತುಂಬಬಹುದು. ಅಂದರೆ, $^4P_2 = 4.3 = 12$ ವಿಧಗಳಲ್ಲಿ ತುಂಬಿಸಬಹುದು. ಮೂಲನಿಯಮದಂತೆ, ಒಟ್ಟು $1 \times 12 = 12$ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು 5 ರಿಂದ ಭಾಗವಾಗವಂತಹವು ಇವೆ.

4. 'FAIR' ಪದದಲ್ಲಿನ ಎಲ್ಲಾ ಅಕ್ಷರಗಳನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಎಷ್ಟು ಪದಗಳನ್ನು ಮಾಡಬಹುದು?

4 ಅಕ್ಷರಗಳನ್ನು $^4P_4 = 4!$ ವಿಧಗಳಲ್ಲಿ ಜೋಡಿಸಬಹುದು. ಅಂದರೆ, 24 ಪದಗಳನ್ನು ಮಾಡಬಹುದು.

5. 7, 8, 3, 4, 5 ಅಂಕಿಗಳನ್ನು ಪುನರಾವೃತ್ತಿಗೊಳಿಸದೆ ಉಪಯೋಗಿಸಿ

(i) ಎಲ್ಲಾ ಅಂಕಿಗಳನ್ನು ಬಳಸಿ ಎಷ್ಟು ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಮಾಡಬಹುದು?

(ii) ಮೂರು ಅಂಕಿಗಳನ್ನು ಬಳಸಿ ಎಷ್ಟು ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಮಾಡಬಹುದು?

(iii) ಮೇಲಿನ ಎರಡು ಸಂದರ್ಭಗಳಲ್ಲಿ ಬರುವ ಎಲ್ಲಾ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮೊತ್ತ ಎಷ್ಟು?

(i) ಒಟ್ಟು 5 ಅಂಕಿಗಳು ಇರುವುದರಿಂದ $\angle 5 = 120$ ಐದು ಅಂಕಿಗಳುಳ್ಳ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಮಾಡಬಹುದು.

(ii) 3 ಅಂಕಿಗಳುಳ್ಳ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ${}^5P_3 = 60$ ವಿಧಗಳಲ್ಲಿ ಮಾಡಬಹುದು.

(iii) (a) ಮೂರು ಅಂಕಿಗಳುಳ್ಳ ಸಂದರ್ಭದಲ್ಲಿ ಮೊತ್ತವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವುದು: ಪ್ರತಿ ಅಂಕಿಯೂ ಏಕಸ್ಥಾನ, ದಶಕ ಮತ್ತು ಶತಕ ಸ್ಥಾನಗಳಲ್ಲಿ ಎಷ್ಟು ಸಲ ಬರುತ್ತದೆ ಎಂದು ಕಂಡುಹಿಡಿಯೋಣ.

1 ಎಂಬ ಅಂಕಿ ಏಕಸ್ಥಾನದಲ್ಲಿರಲಿ. ಆಗ, ಮೂರು ಅಂಕಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ ಮಾಡಲು ಉಳಿದ 4 ಅಂಕಿಗಳಲ್ಲಿ ಎರಡನ್ನು ಜೋಡಿಸಬೇಕು. ${}^4P_2$ ವಿಧಗಳಲ್ಲಿ, ಅಂದರೆ 12 ವಿಧಗಳಲ್ಲಿ, ದಶಕ ಮತ್ತು ಶತಕ ಸ್ಥಾನಗಳನ್ನು ತುಂಬಬಹುದು. 1 ಎಂಬ ಅಂಕಿ ಏಕಸ್ಥಾನದಲ್ಲಿ 12 ಸಲ ಬರುತ್ತದೆ ಎಂದು ಆಯಿತು. ಇದೇ ರೀತಿ 2, 3, 4, 5 ಅಂಕಿಗಳಲ್ಲಿ ಏಕಸ್ಥಾನದಲ್ಲಿ ಒಂದೊಂದೂ 12 ಸಲ ಬರುತ್ತದೆ.

ಆದ್ದರಿಂದ, ಏಕಸ್ಥಾನದಲ್ಲಿ ಬರುವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮೊತ್ತ:

$12 \times 1 + 12 \times 2 + 12 \times 3 + 12 \times 4 + 12 \times 5$

$= 12 (1 + 2 + 3 + 4 + 5) = 12 \times 15 = 180.$

ಪ್ರತಿ ಅಂಕಿಯೂ ಉಳಿದ ಒಂದೊಂದು ಸ್ಥಾನದಲ್ಲಿ 12 ಸಲ ಬರುವುದರಿಂದಲ್ಲೂ ಉಳಿದ ಎರಡು ಸ್ಥಾನಗಳಲ್ಲಿ ಒಂದೊಂದರಲ್ಲೂ ಬರುವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮೊತ್ತ 180

ಆದ್ದರಿಂದ, ಎಲ್ಲಾ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮೊತ್ತ :

$180 + (180 \times 10) + (180 \times 100)$

$= 180 (1 + 10 + 100)$

$= 180 \times 111$

$= 19{,}980$

ಅಂದರೆ, ಮೂರು ಅಂಕಿಗಳುಳ್ಳ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮೊತ್ತ 19,980.

ಇದೇ ರೀತಿ ಮುಂದುವರಿಸಿದರೆ 5 ಅಂಕಿಗಳುಳ್ಳ ಎಲ್ಲಾ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮೊತ್ತ

$180 + (180 \times 10) + (180 \times 100) + (180 \times 1000) + (180 \times 10000)$

$= 180 (1 + 10 + 100 + 1000 + 10000)$

$= 180 \times 11111$

$= 19,99,980.$

6. ಪಾಶ, ಅಂಕುಶ, ಅಹಿ (ಸರ್ಪ), ಡಮರುಗ, ಕಪಾಲ (ರುಂಡ) ಶೂಲ, ಖಟ್ವಾಂಗ (ತುದಿಯಲ್ಲಿ ರುಂಡವನ್ನುಳ್ಳ ಶಿವನ ಒಂದು ದಂಡ), ಶಕ್ತಿ, ಶರ (ಬಾಣ), ಚಾಪ (ಬಿಲ್ಲು) ಇವುಗಳಲ್ಲಿ ಒಂದೊಂದನ್ನು ಒಂದೊಂದು ಕೈಯಲ್ಲಿ ಇಟ್ಟುಕೊಂಡಿರುವ ಹತ್ತು ಕೈಗಳುಳ್ಳ ಶಂಭುವಿನ (ಬೇರೆ ಬೇರೆ) ಎಷ್ಟು ವಿಗ್ರಹಗಳನ್ನು ತಯಾರಿಸಬಹುದು?

   ಇಲ್ಲಿ, ಶಿವನ ಆಯುಧಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ = ಕೈಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ = 10

   ಆದ್ದರಿಂದ, ಬೇರೆ ಬೇರೆ ವಿಧಗಳ ವಿಗ್ರಹಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ $= {}^{10}P_{10} = 10!$

   $= 36,28,800.$

7. ವಿಷ್ಣುವಿನ (ಹರಿಯ) ವಿಗ್ರಹಗಳನ್ನು ತಯಾರು ಮಾಡಬೇಕಾಗಿದೆ. ಈ ವಿಗ್ರಹಗಳಲ್ಲಿ ಒಂದೊಂದರ ನಾಲ್ಕು ಕೈಗಳಲ್ಲಿ ಶಂಖ, ಚಕ್ರ, ಗದಾ, ಪದ್ಮ - ಈ ನಾಲ್ಕು ಆಯುಧಗಳಲ್ಲಿ ಒಂದೊಂದನ್ನು ಒಂದೊಂದು ಕೈಯಲ್ಲಿ ಹಿಡಿದರೆ, ವಿಷ್ಣುವಿನ ವಿಗ್ರಹಗಳನ್ನು ಎಷ್ಟು ಬಗೆಯಲ್ಲಿ ಮಾಡಬಹುದು?

   ಈ ಸಮಸ್ಯೆಯೂ ಮೇಲಿನ ಸಮಸ್ಯೆಯಂತೆಯೇ. ಇಲ್ಲಿ, ಹರಿಯ ಆಯುಧಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ = ಕೈಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ = 4. ಆದ್ದರಿಂದ, ವಿಗ್ರಹಗಳ ವಿಧಗಳು = ${}^{4}P_{4} = 4! = 24.$

   ಸೂಚನೆ : (i) ಈ ಮೇಲಿನ ಎರಡು ಲೆಕ್ಕಗಳು ನಮ್ಮ ಪ್ರಾಚೀನ ಭಾರತೀಯ ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರಜ್ಞರಾದ (ಎರಡನೇ) **ಭಾಸ್ಕರಾಚಾರ್ಯರ** (ಜನ್ಮ : ಕ್ರಿ.ಶ. 1114) ಜನಪ್ರಿಯವಾದ ***ಲೀಲಾವತೀ*** ಎಂಬ ಗ್ರಂಥದಲ್ಲಿ ಕೊಡಲಾಗಿದೆ. ಈ ಲೆಕ್ಕಗಳನ್ನುಳ್ಳ ಶ್ಲೋಕವು ಹೀಗಿದೆ :

   ಪಾಶಾಂಕುಶಾಹಿ ಡಮರೂಕ ಕಪಾಲಶೂಲೈಃ
   ಖಟ್ವಾಂಗ ಶಕ್ತಿ ಶರ ಚಾಪಯುತೈರ್ಭವಂತಿ।
   ಅನ್ಯೋನ್ಯ ಹಸ್ತಕಲಿತೈಃ ಕತಿ ಮೂರ್ತಿಭೇದಾಃ
   ಶಂಭೋರ್ಹರೇರಿವ ಗದಾರಿಸರೋಜಶಂಖೈಃ॥

   ಲೀಲಾವತೀ, ಶ್ಲೋಕ 269.

   (ii) ಬೇಲೂರಿನ ಚನ್ನಕೇಶವ ದೇವಾಲಯದ ಹೊರಗಿನ ನೈಋತ್ಯದ ಮೂಲೆಯಲ್ಲಿ ಹತ್ತು ಕೈಗಳನ್ನುಳ್ಳ ಚಿಕ್ಕದೊಂದು ಶಂಭುವಿಗ್ರಹವಿದೆ. ಶಂಭುವಿನ ಅಂತಹ ಒಂದು ವಿಗ್ರಹವು ಬೇರೆ ಎಲ್ಲೂ ಇದ್ದ ಹಾಗಿಲ್ಲ, ಆ ದೇವಾಲಯವು ಕ್ರಿ.ಶ. 1117ರಲ್ಲಿ ಕಟ್ಟಲಾಯಿತೆಂದು ಅಲ್ಲಿರುವ ಒಂದು ಶಾಸನದಿಂದ ತಿಳಿದು ಬರುತ್ತದೆ. ಭಾಸ್ಕರಾಚಾರ್ಯರು ಅದಕ್ಕಿಂತ 3 ವರ್ಷಗಳ ಹಿಂದೆಯೇ

ಜನಿಸಿದ್ದರಿಂದ, ಬೇಲೂರಿನ ಈ ಶಂಭು ವಿಗ್ರಹವನ್ನು ನೋಡಿಯೇ ಈ ಲೆಕ್ಕವನ್ನು ತಮ್ಮ ಲೀಲಾವತೀ ಗ್ರಂಥದಲ್ಲಿ ಸೇರಿಸಿರಬೇಕು.

8. 5 ಬಾಲಕರು ಮತ್ತು 3 ಬಾಲಕಿಯರನ್ನು ಸಾಲಾಗಿ ನಿಲ್ಲಿಸಬೇಕಾಗಿದೆ. ಇಬ್ಬರು ಬಾಲಕಿಯರು ಪಕ್ಕ ಪಕ್ಕದಲ್ಲಿ ನಿಲ್ಲಿಸುವುದನ್ನು ನಿಷೇಧಿಸಿದೆ. ಎಷ್ಟು ಕ್ರಮ ಯೋಜನೆಗಳಾಗುವುವು?

$$1\,B\;2\,B\;3\,B\;4\,B\;5\,B\;6$$

5 ಬಾಲಕರನ್ನು (B) ಮೊದಲು ಸಾಲಾಗಿ ನಿಲ್ಲಿಸಿದರೆ ಅಂತಹ ಜೋಡಣೆಯನ್ನು ${}^5P_5 = 5! = 120$ ವಿಧಗಳಲ್ಲಿ ಮಾಡಬಹುದು. ಈಗ ಬಾಲಕಿಯರನ್ನು ಮೇಲೆ ತೋರಿಸುವ 6 ಜಾಗಗಳಲ್ಲಿ ನಿಲ್ಲಿಸಿದರೆ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ನಿಯಮ ಪಾಲನೆ ಆಗುವುದು. ಇದನ್ನು ${}^6P_3 = 6.5.4 = 120$ ವಿಧಗಳಲ್ಲಿ ಮಾಡಬಹುದು.

ಆದ್ದರಿಂದ, ಒಟ್ಟು ಕ್ರಮ ಯೋಜನೆಗಳು

$$120 \times 120 = 14{,}400.$$

9. 100 ಮತ್ತು 1000ದ ಮಧ್ಯ ಇರುವ ಎಷ್ಟು ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು 2, 3, 4, 0, 8, 9 ಗಳನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಮಾಡಬಹುದು?

ನಮಗೆ ಬೇಕಾದ ಎಲ್ಲಾ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಲ್ಲಿಯೂ 3 ಅಂಕಿಗಳು ಮಾತ್ರ ಇವೆ

100	10	1
5	5	4

ಚಿತ್ರ 5.2

100ರ ಸ್ಥಾನವನ್ನು 5 ವಿಧಗಳಲ್ಲಿ ತುಂಬಬಹುದು; ಏಕೆಂದರೆ 0 ಯನ್ನು ಇಲ್ಲಿ ಹಾಕಲಾಗುವುದಿಲ್ಲ, ಹತ್ತರ ಸ್ಥಾನವನ್ನು ಉಳಿದ 5 ಅಂಕಿಗಳಲ್ಲಿ ಒಂದನ್ನು ಆರಿಸಿ, ಅಂದರೆ , 5 ವಿಧಗಳಲ್ಲಿ ತುಂಬಬಹುದು. ಏಕ ಸ್ಥಾನವನ್ನು 4 ವಿಧಗಳಲ್ಲಿ ತುಂಬಬಹುದು. ಆದ್ದರಿಂದ ಕ್ರಮಯೋಜನೆಗಳು

$$5 \times 5 \times 4$$

$$= 100.$$

5.3.4 ಜೋಡಣೆಯಲ್ಲಿ ಕೆಲವು ವಸ್ತುಗಳು ಪುನಾರಾವರ್ತಿಸುವಾಗ ಕ್ರಮ ಯೋಜನೆಗಳು

ಕೊಟ್ಟಿರುವ n ವಸ್ತುಗಳಲ್ಲಿ p ವಸ್ತುಗಳು ಒಂದು ವಿಧವಾಗಿಯೂ, q ವಸ್ತುಗಳು ಇನ್ನೊಂದು ವಿಧವಾಗಿಯೂ, r ವಸ್ತುಗಳು ಮತ್ತೊಂದು ವಿಧವಾಗಿಯೂ, ಉಳಿದವು ಬೇರೆ ಬೇರೆಯಾಗಿವೆ ಎಂದು ಭಾವಿಸೋಣ. ಉದಾಹರಣೆಗೆ, n ಅಕ್ಷರಗಳಲ್ಲಿ p ಅಕ್ಷರಗಳು 'a', q ಅಕ್ಷರಗಳು 'b', r ಅಕ್ಷರಗಳು 'c' ಮತ್ತು ಉಳಿದವು ಬೇರೆ ಬೇರೆ ಅಕ್ಷರಗಳು ಆಗಿರಲಿ. ಈ ಎಲ್ಲಾ ಅಕ್ಷರಗಳನ್ನು ಜೋಡಿಸಿದಾಗ ಬರುವ ಕ್ರಮಯೋಜನೆಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ x ಎಂದು ಇರಲಿ. ಈ ರೀತಿಯ ಒಂದು ಕ್ರಮಯೋಜನೆಯಲ್ಲಿರುವ p ಅಕ್ಷರಗಳನ್ನು (a ಗಳನ್ನು) ಬೇರೆ ಬೇರೆ ಅಕ್ಷರಗಳಿಗೆ ಬದಲಾಯಿಸಿ ಉಳಿದ ಯಾವ ಅಕ್ಷರಗಳನ್ನೂ ಬದಲಾಯಿಸಿದೆ ಇದ್ದಾಗ, $\angle p$ ಹೊಸ ಕ್ರಮಯೋಜನೆಗಳು ಬರುತ್ತವೆ. ಈ ರೀತಿಯ ಬದಲಾವಣೆಯನ್ನು x ಕ್ರಮಯೋಜನೆಗಳಲ್ಲಿ ಮಾಡಿದರೆ $x \times \angle p$ ಕ್ರಮಯೋಜನೆಗಳು ಬರುತ್ತವೆ.

ಇದೇ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ, q ಅಕ್ಷರಗಳು (b ಗಳನ್ನು) ಬೇರೆ ಬೇರೆ ಅಕ್ಷರಗಳಿಂದ ಬದಲಾಯಿಸಿದರೆ ನಮಗೆ $\angle q$ ಕ್ರಮಯೋಜನೆಗಳು ಬರುತ್ತವೆ. ಹೀಗೆಯೇ ಮುಂದುವರಿಸುತ್ತಾ ಹೋದರೆ ಮೂಲಸೂತ್ರದಿಂದ ಒಟ್ಟು ಕ್ರಮಯೋಜನೆಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ $x \times \angle p \times \angle q \times \angle r$ ಆಗುವುದು.

ಈಗ, ಎಲ್ಲಾ n ಅಕ್ಷರಗಳು ಬೇರೆ ಬೇರೆಯಾಗಿವೆ. ಆದ್ದರಿಂದ, ಕ್ರಮಯೋಜನೆಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ $\angle n$ ಆಗಿದೆ. ಅಂದರೆ

$$\angle n = x \times \angle p \times \angle q \times \angle r$$

ಅಥವಾ $$x = \frac{\angle n}{\angle p \times \angle q \times \angle r}$$

ಈ ಸೂತ್ರವು ಬೇಕಾದ ಕ್ರಮಯೋಜನೆಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ತಿಳಿಸುತ್ತವೆ.

ಉದಾಹರಣೆಗಳು

1. COMMITTEE ಎಂಬ ಪದದಲ್ಲಿನ ಅಕ್ಷರಗಳ ಕ್ರಮ ಯೋಜನೆಗಳೆಷ್ಟು?

ಕ್ರಮ ಯೋಜನೆಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ $= \frac{\angle 9}{\angle 2 \ \angle 2 \ \angle 2} = 45{,}360$

ಏಕೆಂದರೆ ಪದದಲ್ಲಿನ ಒಟ್ಟು ಅಕ್ಷರಗಳು 9. ಇವುಗಳಲ್ಲಿ 'M' ಎರಡು ಸಲ, 'T' ಎರಡು ಸಲ, ಮತ್ತು 'E' ಎರಡು ಸಲ ಪುನರಾವರ್ತಿತವಾಗಿದೆ.

2. '12323121' ಈ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಅಂಕಿಗಳ ಕ್ರಮಯೋಜನೆ ಎಷ್ಟು?

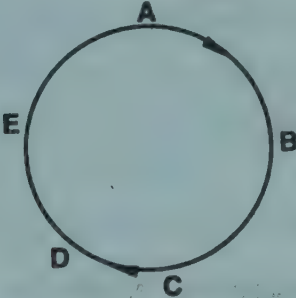
ಒಟ್ಟು ಅಂಕಿಗಳು 8. '1' ಅಂಕಿಯು 3 ಸಲ, '2' ಅಂಕಿಯು 3 ಸಲ ಮತ್ತು '3' ಅಂಕಿಯು 2 ಸಲ ಪುನರಾವರ್ತಿತವಾಗಿವೆ. ಆದ್ದರಿಂದ

ಬೇಕಾದ ಕ್ರಮಯೋಜನೆಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ $= \frac{\angle 8}{\angle 3 \ \angle 3 \ \angle 2}$

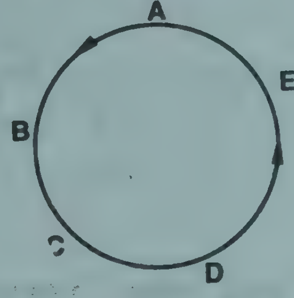
$= 560.$

5.3.5 ವರ್ತುಳೀಯ ಕ್ರಮಯೋಜನೆಗಳು

n ವಸ್ತುಗಳನ್ನು ಒಂದೇ ಸಾಲಿನಲ್ಲಿ ಜೋಡಿಸಿದಾಗ ಬರುವ ಕ್ರಮಯೋಜನೆಗಳ ಬಗ್ಗೆ ಚರ್ಚಿಸಿದೆವು. ಈಗ n ವಸ್ತುಗಳನ್ನು ವೃತ್ತಾಕಾರದಲ್ಲಿ ಜೋಡಿಸಿದರೆ ಬರುವ ಕ್ರಮಯೋಜನೆಗಳನ್ನು ಗಮನಿಸೋಣ. ಈ ವರ್ತುಳೀಯ ಕ್ರಮಯೋಜನೆಗಳು, ವಸ್ತುಗಳನ್ನು ಗಡಿಯಾರದ ಮುಳ್ಳು ಚಲಿಸುವ ದಿಕ್ಕಿನಲ್ಲಿ (ಪ್ರದಕ್ಷಿಣೆ) ಜೋಡಣೆಯಾಗಿರುವುದನ್ನೂ (ಚಿತ್ರ 5.3) ಮತ್ತು ಇದಕ್ಕೆ ವಿರುದ್ಧ ದಿಕ್ಕಿನಲ್ಲಿ (ಅಪ್ರದಕ್ಷಿಣೆ) ಜೋಡಣೆಯಾಗಿರುವುದನ್ನೂ ಬೇರೆ ಬೇರೆ ಜೋಡಣೆಗಳು ಎಂದು ಭಾವಿಸಿದಾಗ ಅವುಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ $\angle(n-1)$ ಆಗುವುದು. ಈ ಎರಡು ದಿಕ್ಕಿನ ಜೋಡಣೆಗಳೂ ಒಂದೇ ಎಂದು ಭಾವಿಸಿದಾಗ ಕ್ರಮಯೋಜನೆಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ $\frac{1}{2}\angle(n-1)$ ಆಗುವುದು.



ಚಿತ್ರ 5.3



ಚಿತ್ರ 5.4

ಉದಾಹರಣೆ 1. ಒಂದು ದುಂಡು ಮೇಜಿನ ಸುತ್ತಲೂ 7 ಜನರನ್ನು ಎಷ್ಟು ವಿಧದಲ್ಲಿ ಕೂಡಿಸಬಹುದು?

ಮೇಲಿನ ಸೂತ್ರದಂತೆ $\angle(7-1) = \angle 6 = 720$ ವಿಧಗಳಲ್ಲಿ ಕೂಡಿಸಬಹುದು.

ಇಲ್ಲಿ ಪ್ರದಕ್ಷಿಣೆಯ ಮತ್ತು ಅಪ್ರದಕ್ಷಿಣೆಯ ಜೋಡಣೆಗಳನ್ನು ಬೇರೆ ಬೇರೆ ಎಂದು ಪರಿಗಣಿಸಬೇಕು.

ಉದಾಹರಣೆ 2. 7 ಮಣಿಗಳನ್ನು ಎಷ್ಟು ವಿಧಗಳಲ್ಲಿ ಪೋಣಿಸಿ ಒಂದು ಸರವನ್ನು ಮಾಡಬಹುದು?

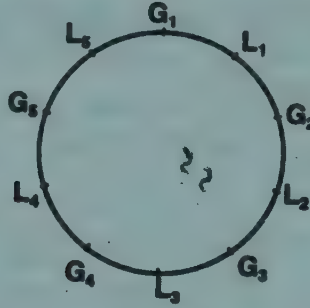
ಗಡಿಯಾರದ ಮುಳ್ಳು ಚಲಿಸುವ ದಿಕ್ಕಿನಲ್ಲಿ ಪೋಣಿಸಿದಾಗ $\angle(7-1)$ ಕ್ರಮ ಯೋಜನೆಗಳು ಉಂಟಾಗುವುವು. ಈ ಸರವನ್ನು ಎಡ, ಬಲಗಳು ಅದಲು ಬದಲಾಗುವಂತೆ ಮತ್ತೊಂದು ಪಕ್ಕದಲ್ಲಿ ತಿರುಗಿಸಿದಾಗ ಮಣಿಗಳು ಗಡಿಯಾರದ ಮುಳ್ಳಿನ ಚಲನೆಯ ವಿರುದ್ಧ ದಿಕ್ಕಿನಲ್ಲಿ ಪೋಣಿಸಿದಂತೆ ಭಾಸವಾಗುವುವು. ಆದ್ದರಿಂದ ಈ ಎರಡು ದಿಕ್ಕಿನ ಜೋಡಣೆಗಳು ಒಂದೇ ಎಂದು ಭಾವಿಸಬೇಕು.

ಆದ್ದರಿಂದ, $\frac{1}{2}\angle(7-1) = \frac{1}{2}\angle 6 = \frac{720}{2} = 360$

ವಿಧದಲ್ಲಿ 7 ಮಣಿಗಳಿಂದ ಸರವನ್ನು ಮಾಡಬಹುದು.

ಉದಾಹರಣೆ 3. 5 ಪುರುಷರು ಮತ್ತು 5 ಮಹಿಳೆಯರು ಒಂದು ದುಂಡು ಮೇಜಿನ ಸುತ್ತಲೂ ಕೂಡಬೇಕಾದ ಸಂದರ್ಭದಲ್ಲಿ ಇಬ್ಬರು ಮಹಿಳೆಯರು ಒಟ್ಟಾಗಿ ಕೂಡಬಾರದು ಎಂಬ ನಿಯಮವಿದ್ದಲ್ಲಿ ಎಷ್ಟು ಕ್ರಮಯೋಜನೆಗಳುಂಟಾಗುತ್ತವೆ?
ಗಡಿಯಾರದ ಮುಳ್ಳು ಚಲಿಸುವ ದಿಕ್ಕಿನಲ್ಲಿ ಮತ್ತು ಅದರ ವಿರುದ್ಧ ದಿಕ್ಕಿನಲ್ಲಿ ಕೂರುವುದನ್ನು ಬೇರೆ ಬೇರೆ ಎಂದು ಭಾವಿಸಬಹುದು.

5ಪುರುಷರನ್ನು ಮೇಜಿನ ಸುತ್ತಲೂ $\angle(5-1)$ ಅಂದರೆ $\angle 4$ ವಿಧಗಳಲ್ಲಿ ಕೂಡಿಸಬಹುದು (ಚಿತ್ರ 5.5ರಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿರುವುದು 1 ವಿಧ).



ಚಿತ್ರ 5.5

ಪುರುಷರ ಮಧ್ಯ ಇರುವ 5 ಜಾಗಗಳಲ್ಲಿ 5 ಮಹಿಳೆಯರನ್ನು ಕೂಡಿಸಿದಾಗ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ನಿಯಮವನ್ನು ಅನುಸರಿಸಿದಂತಾಗುತ್ತದೆ. ಅಂದರೆ 5 ಮಹಿಳೆಯರನ್ನು $\angle 5$ ವಿಧಗಳಲ್ಲಿ ಕೂಡಿಸಬಹುದು.

ಒಟ್ಟು ವಿಧಗಳು $\angle 4 \times \angle 5 = 2880$.

5.3.6 ನಿರ್ಬಂಧಿತ ಕ್ರಮಯೋಜನೆಗಳು

(ಕೊಟ್ಟಿರುವ ವಸ್ತುಗಳಲ್ಲಿ ಕೆಲವು ವಸ್ತುಗಳಿಗೆ ನಿಗದಿತ ಸ್ಥಳದಲ್ಲಿಯೇ ಇಟ್ಟು ಜೋಡಿಸುವಂತಹ ಸಂದರ್ಭದಲ್ಲಿ ಕ್ರಮಯೋಜನೆಗಳು)

n ವಸ್ತುಗಳಲ್ಲಿ ಒಂದು ವಸ್ತುವು ನಿಗದಿತ ಸ್ಥಳವನ್ನು ಆಕ್ರಮಿಸಿದಾಗ ಉಳಿದ $(n-1)$ ವಸ್ತುಗಳಲ್ಲಿ $(r-1)$ ವಸ್ತುಗಳನ್ನು ಜೋಡಿಸಿದರೆ ಆಗ $^{n-1}P_{r-1}$ ಕ್ರಮಯೋಜನೆಗಳು ಉಂಟಾಗುವುವು.

ಉದಾಹರಣೆ 1. a, b, c, d, e ಇವುಗಳ ಕ್ರಮ ಯೋಜನೆಗಳಲ್ಲಿ a ಯಿಂದ ಪ್ರಾರಂಭವಾಗುವವು ಎಷ್ಟು?

ಒಟ್ಟು 5 ಅಕ್ಷರಗಳು ಇವೆ. ಅದರಲ್ಲಿ 'a' ಗೆ ಯಾವಾಗಲೂ ಮೊದಲನೆಯ ಸ್ಥಾನ ನಿಗದಿತವಾಗಿದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ಉಳಿದ 4 ಅಕ್ಷರಗಳ ಕ್ರಮಯೋಜನೆಗಳು

$$^{5-1}P_{5-1} = {}^{4}P_{4} = 24.$$

ಉದಾಹರಣೆ 2. TABLE ಪದದ (a) ಕ್ರಮಯೋಜನೆಗಳೆಷ್ಟು? (b) Tಯಿಂದ ಪ್ರಾರಂಭವಾಗದ ಕ್ರಮಯೋಜನೆಗಳೆಷ್ಟು? (c) LEಯಿಂದ ಅಂತ್ಯವಾಗುವ ಕ್ರಮಯೋಜನೆಗಳೆಷ್ಟು?

(a) ಒಟ್ಟು 5 ಅಕ್ಷರಗಳಿವೆ. ಆದ್ದರಿಂದ $^5P_5 = \angle 5 = 120$ ಕ್ರಮಯೋಜನೆಗಳಿವೆ.

(b) Tಯಿಂದ ಪ್ರಾರಂಭವಾಗುವ ಕ್ರಮಯೋಜನೆಗಳು $^{n-1}P_{r-1} = {}^4P_4 = 24$

$\therefore T$ ಯಿಂದ ಪ್ರಾರಂಭವಾಗದ ಕ್ರಮಯೋಜನೆಗಳು

$120 - 24 = 96$

(c) LEಯಿಂದ ಅಂತ್ಯವಾಗುವ ಕ್ರಮಯೋಜನೆಗಳು $^{5-2}P_{5-2} = {}^3P_3 = 6.$

ಉದಾಹರಣೆ 3. MEANS ಎಂಬ ಪದದಲ್ಲಿ ಸ್ವರಗಳ ಸ್ಥಾನಗಳನ್ನು ಬದಲಾವಣೆ ಮಾಡದಿದ್ದಾಗ ಎಷ್ಟು ಕ್ರಮಯೋಜನೆಗಳು ಬರುತ್ತವೆ?

ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಪದದಲ್ಲಿ ಒಟ್ಟು 5 ಅಕ್ಷರಗಳಿವೆ. ಅವುಗಳ ಪೈಕಿ 2 ಸ್ವರಗಳಿವೆ (E,A). ಈಗ, MNS ಇವುಗಳ ಕ್ರಮಯೋಜನೆಗಳು $\angle 3 = 6$. ಇ ಮತ್ತು A ಗಳು ತಮ್ಮ ತಮ್ಮಲ್ಲೇ ಬದಲಾವಣೆ ಆದಾಗ $\angle 2$ ಜೋಡಣೆಗಳು ಆಗುತ್ತವೆ. ಆದ್ದರಿಂದ
ಒಟ್ಟು ಕ್ರಮಯೋಜನೆಗಳು $\angle 2 \times 6 = 12$.

ಅಭ್ಯಾಸ - 5.1

1. ನಾಲ್ಕು ಸೈನಿಕರನ್ನು ಸಾಲಾಗಿ ಎಷ್ಟು ವಿಧಗಳಲ್ಲಿ ನಿಲ್ಲಿಸಬಹುದು?
2. a, b, c, d, e, f ಗಳನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ (i) ಮೂರು ಅಕ್ಷರದ ಪದಗಳನ್ನು (ii) ನಾಲ್ಕು ಅಕ್ಷರದ ಪದಗಳನ್ನು ಎಷ್ಟು ಮಾಡಬಹುದು?
3. $^{11}P_r = 990$ A{ãpõ r ನ ಬೆಲೆ ಎಷ್ಟು?
4. n ವಸ್ತುಗಳ ಕ್ರಮಯೋಜನೆಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ 5040 ಆದರೆ n ಎಷ್ಟು?
5. 6 ವಸ್ತುಗಳಲ್ಲಿ r ನ್ನು ಮಾತ್ರ ಜೋಡಿಸಿದರೆ ಬರುವ ಕ್ರಮಯೋಜನೆಗಳು 360 ಆದರೆ r ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
6. 6789 ಸಂಖ್ಯೆಯಲ್ಲಿನ ಎಲ್ಲಾ ಅಂಕಿಗಳನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಎಷ್ಟು ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಮಾಡಬಹುದು?
7. ಏಳು ಬಣ್ಣದ ಪೆನ್ಸಿಲ್‌ಗಳನ್ನು ಎಷ್ಟು ವಿಧದಲ್ಲಿ ಜೋಡಿಸಬಹುದು?
8. 1,2,3,4,5,6 ಅಂಕಿಗಳನ್ನೆಲ್ಲಾ ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಎಷ್ಟು ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಮಾಡಬಹುದು?
   (i) ಇವುಗಳಲ್ಲಿ 5 ರಿಂದ ಭಾಗ ಆಗುವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಎಷ್ಟು?
   (ii) 25 ರಿಂದ ಭಾಗ ಆಗುವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಎಷ್ಟು?

9. ಈ ಕೆಳಗಿನ ಪದದಲ್ಲಿ ಬರುವ ಅಕ್ಷರಗಳನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ
   (i) ಎಷ್ಟು ಕ್ರಮಯೋಜನೆಗಳು ಆಗುವುವು?
   (ii) ಸ್ವರಗಳನ್ನು ಇದ್ದಲ್ಲಿಯೇ ಇಟ್ಟರೆ ಎಷ್ಟು ಪದಗಳನ್ನು ಮಾಡಬಹುದು?
   (iii) ವ್ಯಂಜನಗಳ ಸ್ಥಾನ ಬದಲಾವಣೆ ಮಾಡದೆ ಎಷ್ಟು ಪದಗಳನ್ನು ಮಾಡಬಹುದು?

   (a) MONEY (b) DEMOCRAT

10. p, q, r, s, t, u ಎಲ್ಲ ಅಕ್ಷರಗಳನ್ನೂ ಸೇರಿಸಿ ಮಾಡುವ ಕ್ರಮಯೋಜನೆಗಳಲ್ಲಿ
   (i) p ಯಿಂದ ಪ್ರಾರಂಭವಾಗುವ ಪದಗಳೆಷ್ಟು?
   (ii) p ಯಿಂದ ಪ್ರಾರಂಭವಾಗಿ t ಯಿಂದ ಕೊನೆ ಆಗುವ ಪದಗಳು ಎಷ್ಟು?
   (iii) rs ಗಳು ಯಾವಾಗಲೂ ಇದೇ ಕ್ರಮದಲ್ಲಿ ಜೊತೆಯಾಗಿರಬೇಕಾದರೆ ಬರುವ ಪದಗಳೆಷ್ಟು?

11. 8 ಆಟಗಾರರನ್ನು ವೃತ್ತಾಕಾರದಲ್ಲಿ ಎಷ್ಟು ವಿಧದಲ್ಲಿ ಕೂಡಿಸಬಹುದು?

12. 6 ವಿವಿಧ ಬಣ್ಣದ ಮಣಿಗಳನ್ನು ಒಂದು ಸರದಲ್ಲಿ ಎಷ್ಟು ವಿಧದಲ್ಲಿ ಪೋಣಿಸಬಹುದು?

13. 10 ವಿವಿಧ ಬಗೆಯ ಪುಷ್ಪಗಳಿಂದ ಹಾರ ತಯಾರಿಸಿದಾಗ 4ಪುಷ್ಪಗಳು ಯಾವಾಗಲೂ ಒಟ್ಟಿಗೇ ಇರಬೇಕಾದರೆ ಎಷ್ಟು ಬಗೆಯ ಹಾರಗಳನ್ನು ತಯಾರಿಸಬಹುದು?

14. 2566 ಸಂಖ್ಯೆಯಲ್ಲಿ ಬರುವ ಎಲ್ಲಾ ಅಂಕಿಗಳನ್ನೂ ಉಪಯೋಗಿಸಿ 5000 ಕ್ಕಿಂತ ಹೆಚ್ಚಿನ ಎಷ್ಟು ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಮಾಡಬಹುದು?

15. ಕೆಳಗೆ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಪದಗಳಲ್ಲಿರುವ ಎಲ್ಲಾ ಅಕ್ಷರಗಳನ್ನೂ ಎಷ್ಟು ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಜೋಡಿಸಿ ಪದಗಳನ್ನಾಗಿ ಮಾಡಬಹುದು?
   (i) MATHEMATICIAN
   (ii) CONFERENCE
   (iii) ASSASSINATION
   (iv) MISSISSIPPI

5.4 ವಿಕಲ್ಪಗಳು

ಕ್ರಮಯೋಜನೆಗಳಲ್ಲಿ ನಾವು ಕೆಲವು ವಸ್ತುಗಳ ಗಣವನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸುವುದರ ಜೊತೆಗೆ ಆ ವಸ್ತುಗಳ ಸ್ಥಾನ ವ್ಯವಸ್ಥೆಯನ್ನೂ ಗಮನಿಸುತ್ತೇವೆ. ಸ್ಥಾನಗಳ ವ್ಯವಸ್ಥೆಗೆ ಗಮನವೀಯದೆ ಕೇವಲ ವಸ್ತುಗಳ ಆಯ್ಕೆಗೆ ವಿಕಲ್ಪ ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ.

ಉದಾ : ಒಂದು ಅಲಮಾರಿನಲ್ಲಿರುವ 12 ವಿವಿಧ ಪುಸ್ತಕಗಳಲ್ಲಿ 5 ಪುಸ್ತಕಗಳನ್ನು ಆರಿಸಿದಲ್ಲಿ ಅದು ವಿಕಲ್ಪಕ್ಕೆ ಉದಾಹರಣೆಯೂ ಮತ್ತು ಈ ಪುಸ್ತಕಗಳನ್ನು ವಿವಿಧ ಕ್ರಮದಲ್ಲಿ ಜೋಡಿಸಿದರೆ ಅದು ಕ್ರಮಯೋಜನೆಗೆ ಉದಾಹರಣೆಯೂ ಆಗುವುದು.

12 ಪುಸ್ತಕಗಳಲ್ಲಿ 5 ಪುಸ್ತಕಗಳನ್ನು ಎಷ್ಟು ವಿಧದಲ್ಲಿ ಆರಿಸಬಹುದು ಎನ್ನುವುದನ್ನು $^{12}C_5$ ಅಥವಾ $_{12}C_5$ ಎಂದು ಬರೆಯುತ್ತೇವೆ.

n ಬೇರೆ ಬೇರೆ ವಸ್ತುಗಳಲ್ಲಿ r ವಸ್ತುಗಳನ್ನು ಆರಿಸಿದರೆ ಬರುವ ವಿಕಲ್ಪಗಳ ಈ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ^nC_r ಅಥವಾ $_nC_r$ ಎಂದು ಬರೆಯುತ್ತೇವೆ.

5.4.1 ^nC_r ನ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು ಸೂತ್ರ

n ವಸ್ತುಗಳಲ್ಲಿ r ವಸ್ತುಗಳನ್ನು ಆರಿಸಿದಾಗ ಬರುವ ವಿಕಲ್ಪಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ ಮೇಲೆ ಹೇಳಿದಂತೆ ^nC_r ಇರಲಿ. ಈ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ವಿಕಲ್ಪದಲ್ಲಿಯೂ ಬೇರೆ ಬೇರೆ ವಿಧದ r ವಸ್ತುಗಳಿವೆ ಮತ್ತು ಅವುಗಳನ್ನು $\angle r$ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಜೋಡಿಸಬಹುದು. ಅಂದರೆ, ಈ ಎಲ್ಲಾ ವಿಕಲ್ಪಗಳು $^nC_r \times \angle r$ ಕ್ರಮಯೋಜನೆಗಳಾಗುತ್ತವೆ. ಆದ್ದರಿಂದ

$$^nC_r \times \angle r = {}^nP_r$$

$$\therefore \quad ^nC_r = \frac{^nP_r}{\angle r}$$

$$= \frac{n(n-1)(n-2)...(n-r+1)}{\angle r}$$

$$\therefore \ ^nC_r = \frac{n(n-1)(n-2).....(n-r+1)}{1.2.3..........r} \qquad ...(1)$$

ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ ಸೂತ್ರದ ಈ ರೂಪವು (1) ಲೆಕ್ಕಗಳನ್ನು ಮಾಡುವಾಗ ಸುಲಭ ಎಂದು ತೋರುವುದು.

ಅಂಶ ಮತ್ತು ಛೇದಗಳೆರಡರಲ್ಲಿಯೂ r ಅಪವರ್ತನಗಳು ಇವೆ ಎಂಬುದನ್ನು ಗಮನಿಸಿ.

(1)ನೆಯ ಸೂತ್ರವನ್ನು ಕ್ರಮಗುಣಲಬ್ಧದ ರೂಪದಲ್ಲಿಯೂ ಬರೆಯಬಹುದು. ಸೂತ್ರದ ಅಂಶ ಮತ್ತು ಛೇದಗಳೆರಡನ್ನೂ $\angle(n-r)$ ನಿಂದ ಗುಣಿಸಿದಾಗ

$$^nC_r = \frac{n(n-1)(n-2)....(n-r+1)\angle n-r}{1.2.3....r\angle(n-r)}$$

ಅಥವಾ $^nC_r = \dfrac{\angle n}{\angle r \; \angle (n-r)}$ ... (2)

ಎಂದಾಗುತ್ತದೆ. ಈ ಸೂತ್ರದಲ್ಲಿ r ನ ಸ್ಥಾನದಲ್ಲಿ $n-r$ ಹಾಕಿದರೆ

$$^nC_{n-r} = \frac{\angle n}{\angle (n-r) \angle [n-(n-r)]}$$

$$= \frac{\angle n}{\angle (n-r) \angle r}$$

$$= {}^nC_r$$

ಅಂದರೆ, $^nC_{n-r} = {}^nC_r$ ... (3)

ಆದ್ದರಿಂದ, n ವಸ್ತುಗಳಲ್ಲಿ r ವಸ್ತುಗಳನ್ನು ಆರಿಸಿದಾಗ ಬರುವ ವಿಕಲ್ಪಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯು, $n-r$ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಆರಿಸಿದಾಗ ಬರುವ ವಿಕಲ್ಪಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಗೆ ಸಮವಾಗಿರುತ್ತದೆ.

ಸೂಚನೆ : ಇದರಿಂದ ^nC_r ಯಾವಾಗಲೂ ದತ್ತ n ವಸ್ತುಗಳನ್ನು r ವಸ್ತುಗಳುಳ್ಳ ಒಂದು ಗುಂಪಾಗಿಯೂ ಮತ್ತು $n-r$ ವಸ್ತುಗಳುಳ್ಳ ಒಂದು ಗುಂಪಾಗಿಯೂ ವಿಭಜಿಸುತ್ತದೆ. ಈ ಎರಡು ಗುಂಪುಗಳನ್ನು ***ಪೂರಕ ಗುಂಪುಗಳು*** ಎನ್ನಬಹುದು.

5.4.2 ^nC_n ಮತ್ತು $^nC_0$ ಬೆಲೆಗಳು

ಸೂತ್ರ (3) ಅಂದರೆ

$$^nC_{n-r} = {}^nC_r$$

ಎಂಬುದರಿಂದ ^nC_n ಮತ್ತು $^nC_0$ ಗಳ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದು.

ಈ ಸೂತ್ರದಲ್ಲಿ $r=0$ ಹಾಕಿದಾಗ

$$^nC_n = {}^nC_0$$

ಎಂದಾಗುತ್ತದೆ. ಈಗ n ವಸ್ತುಗಳಲ್ಲಿ n ವಸ್ತುಗಳನ್ನೂ (ಎಲ್ಲವನ್ನೂ) ಕೇವಲ 1 ವಿಧದಲ್ಲಿ ಆರಿಸಬಹುದು.

$$\therefore {}^nC_n = 1 = {}^nC_0$$

ಕೆಳಗಿನ ಸೂತ್ರಗಳನ್ನು ನೆನಪಿನಲ್ಲಿಡಿ :

(i) $^{n}P_{r} = n(n-1)\ (n-2)....(n-r+1) = \frac{\angle n}{\angle (n-r)}$

(ii) $^{n}C_{r} = \frac{n\,(n-1)\ (n-2)...(n-r+1)}{1.\,2.\,3.\,\ldots\,r}$

(iii) $^{n}C_{r} = \frac{\angle n}{\angle r\,\angle (n-r)}$

(iv) $^{n}C_{n-r} = {}^{n}C_{r}$

5.4.3 ಪ್ರಮೇಯ :

$$^{n}C_{r} + {}^{n}C_{r-1} = {}^{n+1}C_{r}$$

ಸಾಧನೆ : ಫಲಿತಾಂಶದ ಎಡಭಾಗವನ್ನು ಪರಿಗಣಿಸಿದಾಗ

$$^{n}C_{r} + {}^{n}C_{r-1}$$

$$= \frac{n\,(n-1)\,(n-2)\,...(n-r+1)}{1.\,2.\,3.\,..r} + \frac{n\,(n-1)\,(n-2)\,...(n-r+2)}{1.\,2.\,3\,...(r-1)}$$

$$= \frac{n\,(n-1)\,...(n-r+2)}{1.\,2.\,3.\,..(r-1)}\left[\frac{n-r+1}{r} + 1\right]$$

$$= \frac{n\,(n-1)\,...(n-r+2)}{1.\,2.\,3.\,...(r-1)} \times \left[\frac{n+1}{r}\right]$$

$$= \frac{(n+1)\,n\,(n-1)\,....(n-r+2)}{1.\,2.\,3.\,(r-1)\,(r)}$$

$= {}^{n+1}C_{r}$, ಫಲಿತಾಂಶದ ಬಲಭಾಗ.

5.4.4 ${}^nC_r$ ಮತ್ತು ${}^nC_{r-1}$ ಗಳಿಗೆ ಇರುವ ಸಂಬಂಧ

$${}^nC_{r-1} = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-r+2)}{1.2.3.\ldots..(r-1)}$$

$${}^nC_r = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-r+2)(n-r+1)}{1.2.3.\ldots\ldots(r-1)r}$$

$$= {}^nC_{r-1}\,\frac{n-r+1}{r}$$

$$\therefore\ {}^nC_r = \frac{n-r+1}{r} \times {}^nC_{r-1}$$

ಉದಾಹರಣೆಗಳು

1. 14 ಆಟಗಾರರಲ್ಲಿ 11 ಆಟಗಾರರನ್ನು ಮಾತ್ರ ಆರಿಸಬೇಕಾಗಿದೆ. ಎಷ್ಟು ವಿಧಗಳಲ್ಲಿ ಆರಿಸಬಹುದು?

   ಬೇಕಾದ ಸಂಖ್ಯೆ $= {}^{14}C_{11} \quad = {}^{14}C_{14-11}$

   $= {}^{14}C_3 \quad = \frac{14.13.12}{1.2.3} \quad = 364.$

2. 7 ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿನಿಯರು ಮತ್ತು 5 ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳಲ್ಲಿ 4ಮಂದಿಯ ಒಂದು ಸಮಿತಿಯನ್ನು ರಚಿಸಬೇಕಾಗಿದೆ. ಇಂತಹ ಎಷ್ಟು ಸಮಿತಿಗಳನ್ನು ಕೆಳಗಿನ ಸಂದರ್ಭಗಳಲ್ಲಿ ರಚಿಸಬಹುದು?

   (i) ಸಮಿತಿಯಲ್ಲಿ 2 ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿನಿಯರಿರಬೇಕು;

   (ii) ಕಡೆಯ ಪಕ್ಷ 2 ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿನಿಯರಿರಬೇಕು;

   (i) ಬೇಕಾದ ಸಂಖ್ಯೆ ${}^7C_2 \times {}^5C_2 = 210.$

   (ii) ಕಡೆಯ ಪಕ್ಷ 2 ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿನಿಯರಿರಬೇಕು. ಅಂದರೆ 3 ಅಥವಾ 4 ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿನಿಯರೂ ಇರಬಹುದು. ಆದ್ದರಿಂದ, ಸಮಿತಿಯಲ್ಲಿ (a) 2 ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿನಿಯರು ಮತ್ತು 2 ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು ಅಥವಾ (b) 3 ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿನಿಯರು ಮತ್ತು 1 ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿ ಅಥವಾ (c) 4 ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿನಿಯರು ಇರಬಹುದು.

ಆದ್ದರಿಂದ ಬೇಕಾದ ಸಂಖ್ಯೆ

$$= \left({}^7C_2 \times {}^5C_2\right) + \left({}^7C_3 \times {}^5C_1\right) + \left({}^7C_4\right)$$

$= 210 + 175 + 35 = 420$ ವಿಧಗಳು.

3. ${}^nC_4 = {}^nC_5$ ಆದರೆ n ಎಷ್ಟಾಗುವುದು?

${}^nC_r = {}^nC_{n-r}$ ಎಂಬ ಸೂತ್ರದಿಂದ $r = 4,\ n - r = 5.$

$\therefore n = 4 + 5 = 9.$

4. 20 ವಸ್ತುಗಳಲ್ಲಿ 18 ನ್ನು ಆರಿಸಿದಾಗ ಎಷ್ಟು ವಿಕಲ್ಪಗಳು ಬರುತ್ತವೆ?

$${}^{20}C_{18} = {}^{20}C_2 = \frac{20.19}{1.2} = 190.$$

5. ${}^{20}C_{r+4} = {}^{20}C_{3r-4}$ ಆದರೆ r ಮತ್ತು ${}^nC_r$ಗಳ ಬೆಲೆಗಳು ಏನು?

ಈಗ ${}^nC_r = {}^nC_{n-r}$ ಸೂತ್ರದಿಂದಾಗಿ

(i) $r + 4 = 3r - 4$

ಅಥವಾ (ii) $(r + 4) + (3r - 4) = 20$

ಎಂಬ ಎರಡು ಸಾಧ್ಯತೆಗಳು ಉಂಟಾಗುತ್ತವೆ. ಆದ್ದರಿಂದ

(i) $2r = 8$ ಅಥವಾ $r = 4$

(ii) $(r + 4) + (3r - 4) = 20$

ಅಂದರೆ, $4r = 20$

$\therefore r = 5.$

6. ಒಂದು ಸಮತಲದಲ್ಲಿ n ಬಿಂದುಗಳಿವೆ. ಅವುಗಳಲ್ಲಿ p ಬಿಂದುಗಳು ಒಂದೇ ಸರಳರೇಖೆಯಲ್ಲಿವೆ. ಈ n ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಪರಸ್ಪರ ಸೇರಿಸುವುದರಿಂದ ಬರುವ (i) ಸರಳರೇಖೆಗಳನ್ನೂ (ii) ತ್ರಿಭುಜಗಳನ್ನೂ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

(i) ಒಂದು ಸರಳ ರೇಖೆಗೆ ಕನಿಷ್ಠ 2 ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸಬೇಕು.

ಆದ್ದರಿಂದ ${}^nC_2$ ರೇಖೆಗಳನ್ನು n ಬಿಂದುಗಳಿಂದ ಎಳೆಯಬಹುದು. p ಬಿಂದುಗಳು ಒಂದೇ ರೇಖೆಯ ಮೇಲೆ ಇರುವುದರಿಂದ ${}^pC_2$ ರೇಖೆಗಳನ್ನು ಲೆಕ್ಕ ಇಡುವಂತಿಲ್ಲ, ಅಂದರೆ ಒಟ್ಟು ಉಂಟಾಗುವ ಸರಳರೇಖೆಗಳು $= {}^nC_2 - {}^pC_2 + 1.$ ಇಲ್ಲಿ p ಬಿಂದುಗಳ ಸರಳರೇಖೆಯನ್ನು ಸೇರಿಸಿಕೊಂಡಿದೆ.

(ii) ಒಂದು ತ್ರಿಭುಜವು ಮೂರು ಬಿಂದುಗಳಿಂದ ಏರ್ಪಡುತ್ತದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ $^nC_3$ ತ್ರಿಭುಜಗಳು n ಬಿಂದುಗಳಿಂದ ಉಂಟಾಗಿವೆ. ಇದರಲ್ಲಿ p ಬಿಂದುಗಳು ಒಂದೇ ರೇಖೆಯಲ್ಲಿರುವುದರಿಂದ $^pC_3$ ತ್ರಿಭುಜಗಳ ಬದಲು ಒಂದೇ ರೇಖೆಯ ಬಿಂದುಗಳಾಗಿವೆ.

ಆದ್ದರಿಂದ ಒಟ್ಟು ತ್ರಿಭುಜಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ $^nC_3 - {}^pC_3$

7. 5 ಹುದ್ದೆಗಳಿಗೆ 40 ಅಭ್ಯರ್ಥಿಗಳು ಅರ್ಜಿ ಹಾಕುವರು. ಈ ಕೆಳಗಿನ ನಿಂಬಂಧನೆಗಳಂತೆ ಎಷ್ಟು ಅಭ್ಯರ್ಥಿಗಳನ್ನು ಆರಿಸಬಹುದು?

(i) ಒಬ್ಬ ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ವ್ಯಕ್ತಿಯನ್ನು ಪ್ರತಿ ಆಯ್ಕೆಯಲ್ಲಿಯೂ ಆರಿಸಬೇಕು;

(ii) ಒಬ್ಬನನ್ನು ಯಾವ ಹುದ್ದೆಗೂ ಆರಿಸಕೂಡದು;

(i) ಒಬ್ಬನನ್ನು ಪ್ರತಿಸಲವೂ ಆಯ್ಕೆ ಮಾಡಿದರೆ ಉಳಿದ 39 ಅಭ್ಯರ್ಥಿಗಳಲ್ಲಿ 4 ಹುದ್ದೆಗಳಿಗೆ ಆರಿಸಬೇಕು. ಇದನ್ನು

$^{39}C_4 = 82,251$

ವಿಧಗಳಲ್ಲಿ ಮಾಡಬಹುದು.

(ii) ಒಬ್ಬನನ್ನು ಆಯ್ಕೆ ಮಾಡಬಾರದು. ಅಂದರೆ

$^{39}C_5 = 575757$

ವಿಧಗಳಲ್ಲಿ ಆಯ್ಕೆ ಮಾಡಬಹುದು.

ಅಭ್ಯಾಸ 5.2

1. $^{20}C_r = {}^{20}C_{r-10}$ ಆದರೆ, $^rC_{12}$ ಮತ್ತು $^{18}C_r$ ಗಳ ಬೆಲೆಗಳು ಎಷ್ಟು?

2. $^{n+1}C_r = {}^nC_r + {}^nC_{r-1}$ ಎಂಬುದನ್ನು ಸೂತ್ರಗಳನ್ನು ಬಳಸದೆ ತೋರಿಸಿ.

3. 11 ಜನರ ಒಂದು ಸಮಿತಿಯನ್ನು ರಚಿಸಬೇಕಾಗಿದೆ. 4 ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿನಿಯರು, 4 ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು ಮತ್ತು 3 ಅಧ್ಯಾಪಕರು ಇರುವ ಈ ಸಮಿತಿಯನ್ನು ಪ್ರತಿ ಗುಂಪಿನಲ್ಲಿ 5 ಜನ ಇದ್ದರೆ ಎಷ್ಟು ವಿಧಗಳಲ್ಲಿ ರಚಿಸಬಹುದು?

4. 7 ಬಿಳಿಯ ಚೆಂಡು, 2 ಕರಿಯ ಚೆಂಡುಗಳನ್ನು ಒಳಗೊಂಡ 2 ಚೀಲಗಳಿಂದ 3 ಬಿಳಿಯ ಚೆಂಡುಗಳನ್ನು 1 ಕರಿಯ ಚೆಂಡನ್ನು ಎಷ್ಟು ವಿಧಗಳಲ್ಲಿ ಆರಿಸಬಹುದು?

5. ಒಂದು ತರಗತಿಯಲ್ಲಿ 17 ಮಂದಿ ಇದ್ದಾರೆ. (a) 25 ರೂ., 50 ರೂ. ಮತ್ತು 100 ರೂ. ಬೆಲೆಯ ಮೂರು ವಿಧದ ಬಹುಮಾನಗಳನ್ನು ಎಷ್ಟು ವಿಧಗಳಲ್ಲಿ ಕೊಡಬಹುದು?

(b) ಮೂರು ಬಹುಮಾನಗಳೂ 25 ರೂ.ಗಳದ್ದಾದರೆ ಎಷ್ಟು ವಿಧಗಳಲ್ಲಿ ಬಹುಮಾನಗಳನ್ನು ಕೊಡಬಹುದು?

6. $^nP_r = 720$ ಮತ್ತು $^nC_r = 120$ ಆದರೆ r ನ ಬೆಲೆ ಎಷ್ಟು?

7. $^nC_{n-4} = 15$ ಆದರೆ n ಸಂಖ್ಯೆಯ ಬೆಲೆ ಎಷ್ಟು?

8. ಅಷ್ಟಭುಜಾಕೃತಿಯಲ್ಲಿ ಎಷ್ಟು ಕರ್ಣಗಳಿವೆ?

9. ಮೂರು ಹುದ್ದೆಗಳಿಗೆ 10 ಜನ ಅಭ್ಯರ್ಥಿಗಳಿದ್ದಾರೆ. ಎಷ್ಟು ವಿಧಗಳಲ್ಲಿ ಇವರನ್ನು ಆರಿಸಬಹುದು?

10. m ಬಾಹುಗಳುಳ್ಳ ಬಹುಭುಜಾಕೃತಿಯಲ್ಲಿ $\frac{1}{2}m\ (m - 3)$ ಕರ್ಣಗಳಿವೆ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

11. 10 ಹುಡುಗರ ಗುಂಪಿನಿಂದ 4 ಹುಡುಗರನ್ನು ಆರಿಸಬೇಕಾಗಿದೆ.
    (i) ಎಷ್ಟು ವಿಧಗಳಲ್ಲಿ ಆರಿಸಬಹುದು?
    (ii) ಅತಿ ಎತ್ತರದವನನ್ನು ಪ್ರತಿ ಬಾರಿಯೂ ಆರಿಸಬೇಕಾದರೆ ಎಷ್ಟು ವಿಧಗಳಲ್ಲಿ ಆರಿಸಬಹುದು?
    (iii) ಅತಿ ಎತ್ತರದವನನ್ನು ಯಾವಾಗಲೂ ಬಿಟ್ಟು ಎಷ್ಟು ವಿಧಗಳಲ್ಲಿ ಆರಿಸಬಹುದು?

12. 4 ಸ್ವರಗಳು ಮತ್ತು 7 ವ್ಯಂಜನಗಳಿವೆ. ಇವುಗಳಿಂದ 2 ಸ್ವರಗಳು ಮತ್ತು 3 ವ್ಯಂಜನಗಳನ್ನು ಒಳಗೊಂಡ ಎಷ್ಟು ಪದಗಳನ್ನು ಮಾಡಬಹುದು?

13. 3000 ಮತ್ತು 4000 ಗಳ ಮಧ್ಯೆ ಇರುವ ಎಷ್ಟು ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು 9,3,4,6 ಇವುಗಳನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಮಾಡಬಹುದು?

14. ಒಂದು ಚೀಲದಲ್ಲಿ ಒಂದು ಪೈಸೆ, 20 ಪೈಸೆ, 5 ಪೈಸೆ, 10 ಪೈಸೆ, 25 ಪೈಸೆ, 50 ಪೈಸೆ, 1ರೂ., 2ರೂ., 5ರೂ.ಗಳ ಒಂದೊಂದು ನಾಣ್ಯಗಳಿವೆ. ಇವುಗಳಲ್ಲಿ 4 ನಾಣ್ಯಗಳನ್ನು ಎಷ್ಟು ವಿಧಗಳಲ್ಲಿ ಆರಿಸಬಹುದು?

15. 11 ಮಂದಿಯುಳ್ಳ ಒಂದು ಕ್ರಿಕೆಟ್ ತಂಡವೊಂದನ್ನು 16 ಆಟಗಾರರ ಗುಂಪಿನಿಂದ ಆರಿಸಬೇಕಾಗಿದೆ. ಇವರಲ್ಲಿ 5 ಜನರು ಬೌಲರ್‌ಗಳು ಮತ್ತು ಇಬ್ಬರು ವಿಕೆಟ್ ಕೀಪರ್‌ಗಳು. ಆಯ್ಕೆಯನ್ನು ಕೆಳಗಿನ ನಿಯಮಗಳಂತೆ ಎಷ್ಟೆಷ್ಟು ವಿಧಗಳಲ್ಲಿ ಮಾಡಬಹುದು?
    (i) 4 ಬೌಲರ್‌ಗಳು ಮತ್ತು ಒಬ್ಬ ವಿಕೆಟ್‌ಕೀಪರ್ ಉಳ್ಳ ಗುಂಪು
    (ii) ಕಡೆಯ ಪಕ್ಷ 4 ಬೌಲರ್‌ಗಳನ್ನು ಮತ್ತು ಕಡಿಮೆ ಪಕ್ಷ ಒಬ್ಬ ವಿಕೆಟ್ ಕೀಪರ್ ಉಳ್ಳ ಗುಂಪು.

16. ಒಬ್ಬನು ತನ್ನ 5 ಸ್ನೇಹಿತರಲ್ಲಿ ಒಬ್ಬನನ್ನಾಗಲೀ ಅಥವಾ ಹೆಚ್ಚು ಜನರನ್ನಾಗಲೀ ಎಷ್ಟು ವಿಧದಲ್ಲಿ ಊಟಕ್ಕೆ ತನ್ನ ಮನೆಗೆ ಕರೆಯಬಹುದು?

ಗಮನಿಸಿ: ಕ್ರಮಯೋಜನೆಗೆ ಭಾರತೀಯ ಗಣಿತ ಶಾಸ್ತ್ರದಲ್ಲಿ "ಪ್ರಸ್ತರಣ" ಎಂಬ ಶಬ್ದವನ್ನು ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ ಬಳಸಲಾಗಿದೆ. ಪ್ರಸ್ತರಣ ಮತ್ತು ವಿಕಲ್ಪಗಳ ಗಣಿತ ಶಾಖೆಗೆ ಪ್ರಾಚೀನ ಜೈನರು ಬಹಳ ಪ್ರಾಶಸ್ತ್ಯವನ್ನು ಕೊಟ್ಟಿದ್ದಾರೆ. ಈ ಮೇಲೆ ಸಾಧಿಸಲಾದ

$$^{n}C_{r} = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-r+1)}{1.2.3.\ldots.r}$$

ಎಂಬ ಸಾರ್ವತ್ರಿಕ ಸೂತ್ರವನ್ನು ಪ್ರಪಂಚದಲ್ಲೇ ಮೊಟ್ಟ ಮೊದಲಿಗೆ ಚರ್ಚಿಸಿರುವ ಕೀರ್ತಿ ನಮ್ಮ ಕರ್ನಾಟಕದವನೇ ಆದ ಖ್ಯಾತ ಜೈನ ಗಣಿತಜ್ಞ ಮಹಾವೀರಾಚಾರ್ಯನಿಗೆ (ಕ್ರಿ.ಶ. ೯ನೇ ಶತಮಾನ) ಸಲ್ಲುತ್ತದೆ. ಆತ ಗುಲ್ಬರ್ಗ ಜಿಲ್ಲೆಯ ಮಾಳಖೇಡ (ಅಥವಾ ಮಾನ್ಯಖೇಟ) ಎಂಬಲ್ಲಿ ಅಮೋಘ ವರ್ಷ ನೃಪತುಂಗನ ರಾಜಾಶ್ರಯದಲ್ಲಿದ್ದು, **ಗಣಿತಸಾರ ಸಂಗ್ರಹ** ಎಂಬ ಪ್ರಸಿದ್ಧ ಗ್ರಂಥವನ್ನು ರಚಿಸಿ ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರವನ್ನು ಬೆಳಗಿಸಿದನು.

ಅಧ್ಯಾಯ - 6

ದ್ವಿಪದ ಪ್ರಮೇಯ

ಯಾವುದೇ ಸಾಂತ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಬೀಜಾಕ್ಷರಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧದಿಂದುಂಟಾದ ಬೀಜೋಕ್ತಿಯನ್ನು 'ಪದ' ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ. ಉದಾಹರಣೆಗೆ, $x^2, 3x^3y, -6x^2yz$ ಮುಂತಾದವು. ಎರಡು ಪದಗಳನ್ನುಪಯೋಗಿಸಿ, ಸಂಕಲನ ಪರಿಕರ್ಮದಿಂದ ಉಂಟಾಗುವ ಉಕ್ತಿಯನ್ನು ದ್ವಿಪದೋಕ್ತಿ ಅಥವಾ **ದ್ವಿಪದಿಗಳು** ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ. ಎರಡು ಪದಗಳಿಗಿಂತ ಜಾಸ್ತಿ ಪದಗಳನ್ನುಪಯೋಗಿಸಿ ಸಂಕಲನ ಪರಿಕರ್ಮದಿಂದ ಹುಟ್ಟಿಕೊಳ್ಳುವ ಉಕ್ತಿಗಳು **ಬಹುಪದಿಗಳು.**

ಉದಾ: (ದ್ವಿಪದಿಗಳು) (1) $x + y$ (2) $x^2y + \frac{1}{2}y$

(3) $xy^2 - 6xy$ (4) $x + x^{-2}y$

(ಇಲ್ಲಿ ಸಂಕಲನ ಪರಿಕರ್ಮವೆಂದಾಗ ವ್ಯವಕಲನವೂ ಒಳಗೊಂಡಿರುತ್ತದೆ; ಮತ್ತು ಗುಣಾಕಾರವು ಭಾಗಕಾರವನ್ನೊಳಗೊಂಡಿರುತ್ತದೆ.)

ಉದಾ: (ಬಹುಪದಿಗಳು) (1) $x^2y - 6xy + \frac{7x^2}{y}$

(2) $x + y + 7z - 8x^2$.

x ಮತ್ತು y ಗಳು ಎರಡು ಪದಗಳಾದರೆ $x + y$ ಒಂದು ದ್ವಿಪದಿ.

ಈ ದ್ವಿಪದಿಯ ಬೇರೆ ಬೇರೆ ಘಾತಗಳನ್ನು ನಾವು ವಿಸ್ತರಿಸಿ ಬರೆಯಲು ಪ್ರಯತ್ನಿಸುತ್ತೇವೆ. ಈಗಾಗಲೇ ನಮಗೆ ತಿಳಿದಿರುವಂತೆ

(1) $x + y = (x + y)^1 = x^1 + y^1$

(2) $(x + y)^2 = (x + y)(x + y) = x(x + y) + y(x + y)$

$= x^2 + 2xy + y^2 = {}^2C_0 x^2 + {}^2C_1 xy + {}^2C_2 y^2$

(3) $(x + y)^3 = (x + y)(x + y)^2 = (x + y)(x^2 + 2xy + y^2)$

$= x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$

$= {}^3C_0 x^3 + {}^3C_1 x^2y + {}^3C_2 xy^2 + {}^3C_3 y^3$

ಮೇಲಿನ ಮೂರು ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ವ್ಯವಧಾನದಿಂದ ಪರಿಶೀಲಿಸಿ

$$(x+y)^n = {}^nC_0 x^n + {}^nC_1 x^{n-1} y + {}^nC_2 x^{n-2} y^2 + ... + {}^nC_r x^{n-r} y^r + ... + {}^nC_n y^n$$

$$= x^n + {}^nC_1 x^{n-1} y + {}^nC_2 x^{n-2} y^2 + ... + y^n \quad ... (*)$$

ಆಗಿರಬಹುದೆಂದು ಅನುಮಾನಿಸುತ್ತೇವೆ.

ಫಲಿತಾಂಶ (*) ಎಂಬುದು ದ್ವಿಪದಿ $(x+y)$ನ ಧನಪೂರ್ಣಾಂಕ ಘಾತ 'n'ಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿ ಒಂದು ಸಮಾನೋಕ್ತಿಯಾಗಿದೆ. ಈ ಸಮಾನೋಕ್ತಿಯನ್ನು $P(n)$ ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ.

ಈ ಸಮಾನೋಕ್ತಿಯು ಅನುಮಾನದಿಂದ ಬರೆದಂತಹುದು. ಅದು ಯಾವಾಗ ಸತ್ಯೋಕ್ತಿಯಾಗಿರುತ್ತದೆ ಎಂಬುದನ್ನು ತಿಳಿಯುವುದು ಮುಂದಿನ ಪ್ರಮೇಯದ ಉದ್ದೇಶ.

6.1 ದ್ವಿಪದಿಯ ಘಾತಪ್ರಮೇಯ

n ಧನಪೂರ್ಣಾಂಕವಾದಾಗಲೆಲ್ಲಾ

$(x+y)^n = x^n + {}^nC_1 x^{n-1} y + {}^nC_2 x^{n-2} y^2 + ... + {}^nC_r x^{n-r} y^r + ... + y^n$ ಆಗುತ್ತದೆ.

ಸಾಧನೆ : ಮೇಲಿನ ಸಮಾನೋಕ್ತಿಯು ಯಾವ ಧನ ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳಿಗೆ ಸತ್ಯೋಕ್ತಿಯಾಗಿರುವುದೋ ಅಂತಹ ಎಲ್ಲ ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳನ್ನು ಮಾತ್ರ ಒಳಗೊಂಡ ಸಂಖ್ಯಾಗಣವನ್ನು S ಎಂದು ಕರೆಯೋಣ. N ಎಲ್ಲ ಧನ ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳ ಗಣವಾದರೆ, ದ್ವಿಪದಿಯ ಘಾತ ಪ್ರಮೇಯವನ್ನು ಸಾಧಿಸಲು ನಾವು $S = N$ ಎಂದು ತೋರಿಸಬೇಕು. ಹಾಗೆ ಮಾಡಲು ನಾವು ಸ್ವಾಭಾವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ('ಉದ್ಗಮನ ನಿಯಮ' ಅಥವಾ) ಗಣಿತಾನುಮಾನವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸುತ್ತೇವೆ. ಅಂದರೆ

$1 \in S$ ಮತ್ತು $n \in S$ ಆದರೆ $n+1 \in S$ ಎಂದು ತೋರಿಸುತ್ತೇವೆ. ಆಗ ಅಧ್ಯಾಯ 3 ರಲ್ಲಿ ಚರ್ಚಿಸಿರುವ ಗಣಿತಾನುಮಾನದ ಪ್ರಕಾರ $S = N$ ಆಗುತ್ತದೆ.

ಅಂದರೆ $P(1)$ ಸತ್ಯೋಕ್ತಿಯಾಗಿದೆ ಎಂಬುದನ್ನು ನಾವು ಮೊದಲು ಕಂಡುಕೊಳ್ಳಬೇಕು.

ಮತ್ತು $P(n)$ ಒಂದು ಸತ್ಯೋಕ್ತಿಯಾದರೆ $P(n+1)$ ಕೂಡ ಸತ್ಯೋಕ್ತಿಯಾಗಿದೆ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಬೇಕು.

ಈಗ, $(x+y)^1 = x+y = x^1 + y^1 = {}^1C_0 x^1 + {}^1C_1 y^1$

ಆದ್ದರಿಂದ $P(1)$ ಸತ್ಯೋಕ್ತಿಯಾಗಿದೆ.

ಈ $P(n)$ ಸತ್ಯೋಕ್ತಿ ಎಂದು ಇಟ್ಟುಕೊಳ್ಳೋಣ.

ಅಂದರೆ, $(x+y)^n = x^n + {}^nC_1 x^{n-1} y + ...+ {}^nC_r x^{n-r} y^r + ... + y^n$

ಆದ್ದರಿಂದ, $(x+y)^{n+1} = (x+y)(x+y)^n$

$$= (x+y)(x^n + {}^nC_1 x^{n-1} y + {}^nC_2 x^{n-2} y^2 + ... + {}^nC_r x^{n-r} y^r + ... + y^n)$$

$$= x(x^n + {}^nC_1x^{n-1}y + {}^nC_2x^{n-2}y^2 + ... + {}^nC_rx^{n-r}y^r + ... + y^n)$$

$$+ y(x^n + {}^nC_1x^{n-1}y + {}^nC_2x^{n-2}y^2 + ... + {}^nC_rx^{n-r}y^r + ... + y^n)$$

$$= x^{n+1} + ({}^nC_1 + {}^nC_0)x^n y + ({}^nC_2 + {}^nC_1)x^{n-1}y^2 + \dots$$

$$+ ({}^nC_r + {}^nC_{r-1})x^{n+1-r}y^r + \dots + y^{n+1}$$

$$= x^{n+1} + {}^{n+1}C_1 x^n y + {}^{n+1}C_2 x^{n-1}y^2 + ... + y^{n+1}$$

$$\left(\because {}^{n+1}C_r = {}^nC_r + {}^nC_{r-1}\right)$$

ಹಾಗಾಗಿ, $P(n+1)$ ಸತ್ಯೋಕ್ತಿಯಾಗಿದೆ.

ಆದ್ದರಿಂದ, n ಧನ ಪೂರ್ಣಾಂಕವಾದಾಗಲೆಲ್ಲ $P(n)$ ಸತ್ಯೋಕ್ತಿಯಾಗಿದೆ.

6.2 ದ್ವಿಪದೀಯ ಸಹಾಂಕಗಳ ಗುಣಗಳು

ದ್ವಿಪದಿಯ ಘಾತ ಪ್ರಮೇಯದಂತೆ ಈ ಕೆಳಗಿನ ಕೆಲವು ಸಮತೆಗಳನ್ನು ನಾವು ಗಮನಿಸುತ್ತೇವೆ. ದ್ವಿಪದ ಪ್ರಮೇಯದ ಪ್ರಕಾರ

$$(1+x)^n = 1 + {}^nC_1x + {}^nC_2x^2 + ... + {}^nC_rx^r + \dots + x^n$$

$$= {}^nC_0 + {}^nC_1x + {}^nC_2x^2 + ... + {}^nC_rx^r + \dots + {}^nC_nx^n \qquad ...(1)$$

ಫಲಿತಾಂಶ (1) ರಲ್ಲಿ x ಬದಲಿಗೆ $(-x)$ ಎಂದು ಆದೇಶಿಸಿದರೆ

$$(1-x)^n = {}^nC_0 - {}^nC_1x + {}^nC_2x^2 + \dots + (-1)^r\,{}^nC_rx^r + \dots + (-1)^n.\,{}^nC_nx^n \qquad ...(2)$$

ಈಗ, (1) ಮತ್ತು (2) ರಲ್ಲಿ $x = 1$ ಎಂದು ಆದೇಶಿಸಿದಾಗ

$$2^n = {}^nC_0 + {}^nC_1 + {}^nC_2 + ... + {}^nC_r + \dots + {}^nC_n \qquad ...(3)$$

ಮತ್ತು

$$0 = {}^nC_0 - {}^nC_1 + {}^nC_2 + ... + (-1)^n.\,{}^nC_r + \dots + (-1)^n.\,{}^nC_n \qquad ...(4)$$

ಎಂಬ ಎರಡು ಮುಖ್ಯವಾದ ಫಲಿತಾಂಶಗಳು ದೊರಕುತ್ತವೆ.

$${}^nC_0,\ {}^nC_1,\ {}^nC_2,\ ....,\ {}^nC_r,\ ...,\ {}^nC_n$$

ಇವುಗಳನ್ನು ದ್ವಿಪದಿ ಘಾತದ (ಅಥವಾ ದ್ವಿಪದೀಯ) ಸಹಾಂಕಗಳು ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ.

ದ್ವಿಪದಿಯ ಘಾತ 'n' ಸಂದರ್ಭಾನುಸಾರ ತಿಳಿದಿದ್ದರೆ ಈ ಸಹಾಂಕಗಳನ್ನು

$C_0, C_1, C_2 ..... C_r ..... C_n$ ಎಂದು ಬರೆಯುವುದಿದೆ.

ಆದ್ದರಿಂದ

$$C_0 + C_1 + C_2 + ... + C_n = 2^n$$

ಮತ್ತು $C_0 - C_1 + C_2 - C_3 + C_4..... = 0$

ಅಂದರೆ, $C_0 + C_2 + C_4 + ... = C_1 + C_3 + C_5 + ... = 2^{n-1}$

ಎಂಬ ಸಹಾಂಕಗಳ ಮೊತ್ತಗಳ ಫಲಿತಾಂಶಗಳು ದೊರೆಯುತ್ತವೆ.

ಈ ಮೇಲಿನ ಸಮತೆಗಳನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಕೆಲವು ಪ್ರಶ್ನೆಗಳನ್ನು ಉತ್ತರಿಸುತ್ತೇವೆ.

1. ಈ ಕೆಳಗಿನ ಶ್ರೇಣಿಯ ಮೊತ್ತವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ :

$$a.C_0 + (a+d) C_1 + (a+2d) C_2 + ... + (a+ nd) C_n$$

ಈ ಮೊತ್ತವನ್ನು S ಎಂದು ಕರೆಯೋಣ. ಅಂದರೆ

$$S = aC_0 + (a+d)C_1 + (a+2d)C_2 + ... + (a+nd)C_n \quad ...-(1)$$

ಈ ಮೊತ್ತವನ್ನು ವಿರುದ್ಧ ಬದಿಯಿಂದ ಆರಂಭಿಸಿ ಬರೆದರೆ

$$S = [a+nd]C_n + [a+(n-1)d]\, C_{n-1} + [a+(n-2)d]C_2 + ...+ aC_0 \quad ...(2)$$

ಈಗ, $r = 0, 1, 2, 3, ...$ ಆದಾಗ, $C_r = C_{n-r}$ ಎಂಬುದನ್ನು ನಾವು ಗಮನಿಸಿ, (2)ನ್ನು ಪುನರಾವರ್ತಿಸಿ ಬರೆದರೆ

$$S = [a+nd]C_0 + [a+(n-1)d]C_1 + [a+(n-2)d]C_2 + ...+ aC_n \quad ...(3)$$

ಈಗ (1) ಮತ್ತು (3)ನ್ನು ಕೂಡಿಸಿದರೆ

$$2S = (2a+nd)\, C_0 + (2a+nd)\, C_1 + ... + (2a+nd)\, C_n$$

$$= (2a+nd)\ (C_0 + C_1 + ... + C_n) = (2a+nd)\, 2^n$$

ಎಂದಾಗುತ್ತದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ

$$S = (2a+nd)\, 2^{n-1}$$

2. $C_0 + \frac{C_1}{2} + \frac{C_2}{3} + ... + \frac{C_n}{n+1}$

ಎಂಬ ಶ್ರೇಣಿಯ ಮೊತ್ತವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

$$S = C_0 + \frac{C_1}{2} + \frac{C_2}{3} + ... + \frac{C_n}{n+1} \text{ ಆಗಿರಲಿ.}$$

$$\therefore\ (n+1)S = (n+1)\ .\,{}^nC_0 + \frac{n+1}{2}.{}^nC_1 + \frac{n+1}{3}.{}^nC_2 + ... + \frac{n+1}{n+1}.{}^nC_n$$

$$= {}^{n+1}C_1 + {}^{n+1}C_2 + {}^{n+1}C_3 + \dots + {}^{n+1}C_{n+1}$$

$$= \left[{}^{n+1}C_0 + {}^{n+1}C_1 + \dots + {}^{n+1}C_{n+1}\right] - {}^{n+1}C_0$$

$$= 2^{n+1} - 1$$

ಆದ್ದರಿಂದ, $S = \dfrac{2^{n+1} - 1}{n+1}$.

3. $C_0^2 + C_1^2 + C_2^2 + \dots + C_n^2$

ಈ ಮೊತ್ತವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

$$(1+x)^n = C_0 + C_1 x + C_2 x^2 + \dots + C_n x^n \quad \dots (1)$$

ಎಡಬದಿಯಲ್ಲಿ ಪದಗಳನ್ನು ಅದಲು ಬದಲು ಮಾಡಿದರೆ

$$(1+x)^n = (x+1)^n = C_0 x^n + C_1 x^{n-1} + C_2 x^{n-2} + \dots + C_n \quad \dots (2)$$

ಸಮೀಕರಣಗಳಾದ (1) ಮತ್ತು (2)ನ್ನು ಗುಣಿಸುವುದರಿಂದ

$$(1+x)^{2n} = (C_0 + C_1 x + C_2 x^2 + \dots + C_n x^n)$$

$$\times (C_0 x^n + C_1 x^{n-1} + \dots + C_n)$$

ಮೇಲಿನ ಸಮೀಕರಣದ ಬಲಬದಿಯ ಗುಣಲಬ್ಧದ ವಿಸ್ತಾರದಲ್ಲಿ x^n ನ ಸಹಾಂಕವು

$$C_0^2 + C_1^2 + C_2^2 + \dots + C_n^2$$

ಹಾಗೂ $(1+x)^{2n}$ ನ ವಿಸ್ತಾರದಲ್ಲಿ x^n ನ ಸಹಾಂಕವು

$${}^{2n}C_n = \frac{(2n)!}{(n!)^2}$$

ಆದ್ದರಿಂದ, $C_0^2 + C_1^2 + C_2^2 + \dots + C_n^2 = \dfrac{(2n)!}{(n!)^2}$

4. ಮೇಲಿನ $(1+x)^{2n}$ನ ವಿಸ್ತಾರದಲ್ಲಿ x^{n+1}ನ ಸಹಾಂಕವು ${}^{2n}C_{n+1}$ ಮತ್ತು ಬಲಬದಿಯ ಗುಣಲಬ್ಧದಲ್ಲಿ x^{n+1}ನ ಸಹಾಂಕವು

$$C_0C_1 + C_1C_2 + C_2C_3 + \dots + C_{n-1}C_n$$

ಆಗಿವೆ. ಆದ್ದರಿಂದ

$$C_0C_1 + C_1C_2 + C_2C_3 + \dots + C_{n-1}C_n = {}^{2n}C_{n+1}$$

$$= \frac{(2n)!}{(n+1)!(n-1)!}$$

5. $C_0^2 - C_1^2 + C_2^2 - C_3^2 + \ldots + (-1)^n C_n^2$

ಇದರ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಈಗಾಗಲೇ ತೋರಿಸಿರುವಂತೆ

$$C_0 + C_1 x + C_2 x^2 + \ldots + C_n x^n = (1+x)^n \quad \ldots (1)$$

$$C_0 x^n - C_1 x^{n-1} + C_2 x^{n-2} \ldots + (-1)^n . C_n = (x-1)^n \quad \ldots (2)$$

ಆದ್ದರಿಂದ (1) ಮತ್ತು (2) ಸಮೀಕರಣಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧ

$$(x^2-1)^n = (C_0 + C_1 x + C_2 x^2 + \ldots + C_n x^n)$$

$$\times (C_0 x^n - C_1 x^{n-1} + C_2 x^{n-2} \ldots + (-1)^n . C_n)$$

ಎರಡೂ ಬದಿಯ ವಿಸ್ತಾರದಲ್ಲಿ x^n ನ ಸಹಾಂಕಗಳನ್ನು ಸಮೀಕರಿಸಿದರೆ

$$(-1)^{n/2} . {}^nC_{n/2} = C_0^2 - C_1^2 + C_3^2 + \ldots (-1)^n . C_n^2 \quad (n \text{ ಸಮಸಂಖ್ಯೆಯಾದಾಗ})$$

n ವಿಷಮ ಪೂರ್ಣಾಂಕವಾದರೆ x^n ನ ಸಹಾಂಕವು 0 ಶೂನ್ಯವಾಗುತ್ತದೆ. ಅಂದರೆ

$$C_0^2 - C_1^2 + C_2^2 + \ldots (-1)^n C_n^2 = 0$$

6. ಷಡ್ರಸಗಳಾದ **ಕಟು** (ಕಹಿ), **ಆಮ್ಲ** (ಹುಳಿ), **ಮಧುರ** (ಸಿಹಿ), **ಲವಣ** (ಉಪ್ಪು), **ತಿಕ್ತ** (ಖಾರ) ಮತ್ತು **ಕಷಾಯ** (ಅಥವಾ ತುವರ ಅಂದರೆ ಒಗರು, ಒಗಚು) ಇವುಗಳ ಪೈಕಿ ಒಂದೊಂದೇ ರಸವನ್ನು, ಎರಡೆರಡು ರಸಗಳನ್ನು,...., ಆರು ರಸಗಳನ್ನೂ ಆಯ್ಕೆ ಮಾಡಿಕೊಂಡರೆ ಅಂತಹ ಒಟ್ಟು ಎಷ್ಟು ಸಾಧ್ಯತೆಗಳಿವೆ?

ಈಗ, 6 ರಸಗಳಲ್ಲಿ ಒಂದೊಂದೇ ರಸವನ್ನು ${}^6C_1$ ರೀತಿಗಳಲ್ಲಿ ಆಯ್ಕೆ ಮಾಡಬಹುದು. ಹಾಗೆಯೇ, ಎರಡೆರಡು ರಸಗಳನ್ನು ಒಮ್ಮೆಗೆ ${}^6C_2$ ರೀತಿಗಳಲ್ಲಿ ಆರಿಸಬಹುದು. ಆದ್ದರಿಂದ, ಹಾಗೆಯೇ ಮುಂದುವರಿಸುತ್ತಾ ಆಯ್ಕೆ ಮಾಡುವ ಒಟ್ಟು ಸಾಧ್ಯತೆಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ

$${}^6C_1 + {}^6C_2 + {}^6C_3 + {}^6C_4 + {}^6C_5 + {}^6C_6$$

$$= 2^6 - {}^6C_0 = 64 - 1 = 63$$

ಎಂದಾಗುತ್ತದೆ.

ಇದೇ ಸಮಸ್ಯೆಯನ್ನು ಪ್ರಸಿದ್ಧ ಆಯುರ್ವೇದ ಗ್ರಂಥವಾದ **ಸುಶ್ರುತ ಸಂಹಿತೆಯಲ್ಲಿ** ಆಚಾರ್ಯ ಸುಶ್ರುತರು ಚರ್ಚಿಸಿದ್ದಾರೆ. ಅವರ ಹೇಳಿಕೆ ಹೀಗಿದೆ:

ತತ್ರೈತೇಷಾಂ ರಸಾನಾಂ ಸಂಭೋಗಾತ್ ತ್ರಿಷಷ್ಟಿರ್ಭವಂತಿ
ತದ್ಯಥಾ ಪಂಚದಶದ್ವಿಕಾಃ ವಿಂಶಸ್ತ್ರಿಕಾಃ
ಪಂಚದಶ ಚತುಷ್ಕಾಃ ಷಟ್ಪಂಚಕಾಃ
ಏಕಶಃ ಷಡ್ರಸಾಃ ಏಕಃ ಷಟ್ಕ ಇತಿ ||

ಅಂದರೆ, ಎರಡು ರಸಗಳನ್ನು 15 ರೀತಿಯಲ್ಲಿ, ಮೂರು ರಸಗಳನ್ನು 20 ರೀತಿಯಲ್ಲಿ, ನಾಲ್ಕು ರಸಗಳನ್ನು 15 ರೀತಿಯಲ್ಲಿ, ಐದು ರಸಗಳನ್ನು 6 ರೀತಿಯಲ್ಲಿ, ಒಂದು ರಸವನ್ನು 6 ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಮತ್ತು ಆರು ರಸಗಳನ್ನು 1 ರೀತಿಯಲ್ಲೂ - ಹೀಗೆ ಒಟ್ಟು 63 ವಿಧಗಳಲ್ಲಿ ಷಡ್ರಸಗಳನ್ನು ಬೆರಿಸಬಹುದು.

ಇಲ್ಲಿ ಗಮನಿಸಬೇಕಾದ ಅಂಶವೆಂದರೆ

$^6C_2 = 15, {}^6C_3 = 20, {}^6C_4 = 15, {}^6C_5 = 6, {}^6C_1 = 6, {}^6C_6 = 1.$

ಇವುಗಳ ಒಟ್ಟು ಸಂಖ್ಯೆ $15 + 20 + 15 + 6 + 6 + 1 = 63.$

(***ಸುಶ್ರುತ ಸಂಹಿತಾ***, ಸೂತ್ರಸ್ಥಾನ, ಅಧ್ಯಾಯ 42, ಶ್ಲೋಕ 19.)

6.3 ದ್ವಿಪದೀಯ ವಿಸ್ತಾರದಲ್ಲಿ ಪದಗಳ ಗುಣಗಳು

ದ್ವಿಪದಿಯ n ಘಾತದ ವಿಸ್ತಾರದಲ್ಲಿ $n + 1$ ಪದಗಳಿರುವುದನ್ನು ನಾವು ಈಗಾಗಲೇ ಗಮನಿಸಿದ್ದೇವೆ. ದ್ವಿಪದಿಯ ಈ ಘಾತೋಕ್ತಿಯಲ್ಲಿ $r + 1$ ನೆಯ ಪದವನ್ನು T_{r+1} ಎಂದು ಕರೆದರೆ $(x + y)^n$ ವಿಸ್ತಾರದಲ್ಲಿ ಸಾಮಾನ್ಯ ಪದ

$$T_{r+1} = {}^nC_r x^{n-r} y^r \text{ ಮತ್ತು } (x + y)^n = \sum_{n=0}^{n} {}^nC_r x^{n-r} y^r$$

ಉದಾಹರಣೆಗಳು

1. $\left(x + \dfrac{2}{x^2}\right)^8$ ಎಂಬ ದ್ವಿಪದಿಯ ಘಾತದ ವಿಸ್ತಾರದಲ್ಲಿ x^2ನ ಸಹಾಂಕವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

$\left(x + \dfrac{2}{x^2}\right)^8$ ಎಂಬುದರ ವಿಸ್ತಾರದಲ್ಲಿ x^2 ಎಂಬುದು (ಟ ಜ ೧)ನೆಯ ಪದದಲ್ಲಿ ಇರುತ್ತದೆ ಎಂದು ಇಟ್ಟುಕೊಳ್ಳೋಣ. ಆಗ

$$T_{r+1} = {}^8C_r . x^{8-r} \times \left(\frac{2}{x^2}\right)^r$$

$$= {}^8C_r\, x^{8-r}.\frac{2^r}{x^{2r}} \quad = \quad {}^8C_r x^{8-3r}.2^r$$

ಈಗ, $8 - 3r = 2$ ಅಥವಾ $r = 2$.

ಆದ್ದರಿಂದ, $T_{r+1} = T_3 = {}^8C_2 x^2.2^2 = \frac{8.7}{2} \times 2^2 x^2 = 112\, x^2$

ಅಂದರೆ, x^2ನ ಸಹಾಂಕವು 112.

2. $\left(x+\frac{1}{x}\right)^{10}$ನ ಮಧ್ಯಸ್ಥಿತ ಪದವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಮೇಲಿನ ದ್ವಿಪದಿಯ ವಿಸ್ತಾರದಲ್ಲಿ 11 ಪದಗಳಿದ್ದು ಮಧ್ಯಸ್ಥಿತ ಪದವು 6ನೆಯ ಪದವಾಗಿರುತ್ತದೆ. ಅಂದರೆ ಅದು T_6 $(r = 5)$ ಆಗಿರುತ್ತದೆ.

ಆದ್ದರಿಂದ, ಮಧ್ಯಸ್ಥಿತ ಪದವು

$$T_6 = {}^{10}C_5\; x^5 . \frac{1}{x^5} \;=\; {}^{10}C_5.$$

3. $\left(x+\frac{3}{x^2}\right)^{11}$ನ ಮಧ್ಯಸ್ಥಿತ ಪದಗಳ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಮೇಲಿನ ದ್ವಿಪದಿಯ ವಿಸ್ತಾರದಲ್ಲಿ 12 ಪದಗಳಿದ್ದು 6 ಮತ್ತು 7 ನೆಯ ಪದಗಳು ಮಧ್ಯಸ್ಥಿತವಾಗಿರುತ್ತವೆ.

ಆದ್ದರಿಂದ, T_6 ಮತ್ತು T_7 ಮಧ್ಯಸ್ಥಿತ ಪದಗಳು.

$$T_6 = {}^{11}C_5\; .x^6\left(\frac{3}{x^2}\right)^5 = {}^{11}C_5 \times 3^5 \times x^{6-10} = {}^{11}C_5 \times \frac{3^5}{x^4}$$

ಮತ್ತು

$$T_7 = {}^{11}C_6\; .x^5\left(\frac{3}{x^2}\right)^6 = {}^{11}C_6 \times 3^6 .x^{-7} = {}^{11}C_6 . \frac{3^6}{x^7}$$

4. $\left(x-\frac{3}{x^2}\right)^9$ನ ವಿಸ್ತಾರದಲ್ಲಿ $x-$ ಮುಕ್ತ ಪದದ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಮೇಲಿನ ದ್ವಿಪದಿಯ ವಿಸ್ತಾರದಲ್ಲಿ $x-$ ಮುಕ್ತ ಪದವು T_{r+1}ನಲ್ಲಿ ಇರಲಿ. ಆಗ

$$T_{r+1} = (-1)^r . {}^9C_r \times x^{9-r} \times \left(\frac{3}{x^2}\right)^r = (-1)^r . {}^9C_r . 3^r x^{9-3r}$$

ಈ ಪದವು x ಮುಕ್ತವಾದರೆ ಅದರ ಘಾತಾಂಕವು 0 ಯಾಗಿರಬೇಕು.

ಅಂದರೆ, $9 - 3r = 0 \Rightarrow r = 3$

ಹಾಗಾಗಿ, x – ಮುಕ್ತಪದವು

$$T_4 = {}^9C_3 . 3^3 \times (-1)^3 = -{}^9C_3 \times 3^3 = -\frac{9 \times 8 \times 7}{3 \times 2 \times 1} \times 3^3$$

$$= - 84 \times 3^3 = - 2268.$$

ಅಭ್ಯಾಸ - 6.1

1. ಈ ಕೆಳಗಿನ ಬೀಜೋಕ್ತಿಗಳನ್ನು ದ್ವಿಪದ ಪ್ರಮೇಯದಿಂದ ವಿಸ್ತರಿಸಿ.

   (a) $\left(2x - \frac{1}{x}\right)^5$ (b) $\left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^5$

   (c) $\left(2a - \frac{b}{3}\right)^6$ (d) $(2 + \sqrt{x})^5$

2. $\left(3x + \frac{1}{x}\right)^{18}$ ಇದರ ವಿಸ್ತರಣೆಯಲ್ಲಿ 7ನೇ ಮತ್ತು 11ನೇ ಪದಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

3. $\left(3x^2 - \frac{y}{3}\right)^9$ ಇದರ ವಿಸ್ತರಣೆಯಲ್ಲಿ ೭ನೇ ಪದವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

4. $\left(\frac{a}{2} - \frac{3}{b}\right)^{10}$ ಇದರ ವಿಸ್ತರಣೆಯಲ್ಲಿ ೮ನೇ ಪದವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

5. $(5x + 1)^5$ ಇದರ ವಿಸ್ತರಣೆಯಲ್ಲಿ ಮಧ್ಯಸ್ಥಿತ ಪದಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

6. $\left(2x^2 - \frac{3}{x^3}\right)^{25}$ ಇದರ ವಿಸ್ತರಣೆಯಲ್ಲಿ x ಇಲ್ಲದಿರುವ ಪದವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

7. $\left(2 - x + 3x^2\right)^5$ ಇದರ ವಿಸ್ತರಣೆಯಲ್ಲಿ x^3ನ ಸಹಾಂಕವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

8. $\left(x^2 - x\right)^{20}$ ಇದರ ವಿಸ್ತರಣೆಯಲ್ಲಿ x^{23}ನ ಸಹಾಂಕವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಅಭ್ಯಾಸ - 6.2

1. $C_0, C_1, C_2, ..., C_n$ ಇವುಗಳು n ದರ್ಜೆಯ ದ್ವಿಪದ ಸಹಾಂಕಗಳನ್ನು ಸೂಚಿಸಿದರೆ, ಕೆಳಕಂಡ ಫಲಿತಾಂಶಗಳನ್ನು ಸಾಧಿಸಿ :

   (a) $C_1 + 2C_2 + 3C_3 + ... + nC_n = n.2^{n-1}$

   (b) $C_0 + 2C_1 + 3C_2 + ... + (n+1)\, C_n = (n+2)\, 2^{n-1}$

   (c) $C_0C_2 + C_1C_3 + ... + C_{n-2}C_n = \frac{2n!}{(n-2)!\,(2n+2)!}$

   (d) $C_0 + \frac{C_1}{2} + \frac{C_2}{3} + ... + \frac{C_n}{n+1} = \frac{2^{n+1}-1}{n+1}$

   (e) $\frac{C_1}{C_0} + \frac{2C_2}{C_1} + \frac{3C_3}{C_2} + ... + \frac{nC_n}{C_{n-1}} = \frac{n(n+1)}{2}$

2. ಈ ಕೆಳಗಿನ ಶ್ರೇಢಿಗಳ ಮೊತ್ತಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

   (a) $C_0C_4 + C_1C_5 + C_2C_6 + ... + C_rC_{r+4}$

   (b) $4C_0 + 6C_1 + 8C_3 + ... + (2n + 4)\, C_n$

   (c) $3C_0 + 7C_1 + 11C_3 + ...(n + 1)$ ಪದಗಳ ತನಕ

   (d) $C_0C_n + C_1C_{n-1} + C_2C_{n-2} + ... + C_nC_0$

   (e) $C_0 - 2C_1 + 3C_2 - 4C_3 + ... + (-1)^n(n+1)\, C_n$

   (f) $2C_1 + 11C_2 + 20C_3 + ... n$ ಪದಗಳ ತನಕ.

ಅಧ್ಯಾಯ - 7

ಆಂಶಿಕ ಭಿನ್ನರಾಶಿಗಳು

7.1 ಬಹುಘಾತಪದಿ

$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + ... + a_n$ ಎಂಬ ಬೀಜೋಕ್ತಿಯಲ್ಲಿ $a_0, a_1, a_2 ..... a_n$ ಗಳು ಸ್ಥಿರ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾಗಿವೆ ಮತ್ತು $a_0 \neq 0$. ಇಂತಹ ಉತ್ಪನ್ನವನ್ನು x ನ **ಬಹುಘಾತಪದಿ** ಎಂದು ಹೇಳುತ್ತೇವೆ. ಇದರಲ್ಲಿ x ನ ಅತಿ ಹೆಚ್ಚಿನ ಘಾತಾಂಕ n ಆಗಿರುವುದರಿಂದ ಅದನ್ನು x ನಲ್ಲಿ **n ಪ್ರಮಾಣದ ಬಹುಘಾತಪದಿ** ಎಂದು ಹೇಳಬಹುದು. ಉದಾಹರಣೆಗೆ, $3x^4 + 6x^3 - 8x^2 + 7x + 8$ ಎಂಬುದು 4ನೇ ಪ್ರಮಾಣದ ಬಹುಘಾತಪದಿ. $x^5 + 8x + 3$ ಎಂಬುದು 5ನೇ ಪ್ರಮಾಣದ ಬಹುಘಾತಪದಿ. $f(x)$ ಮತ್ತು $g(x)$ ಗಳು x ನ ಎರಡು ಬಹುಘಾತಪದಿಗಳಾಗಿದ್ದರೆ, $\frac{f(x)}{g(x)}$ ಒಂದು **ಭಾಗಲಬ್ಧ ಉತ್ಪನ್ನ** ಆಗುವುದು. ಉದಾಹರಣೆಗೆ

$$\frac{3x+2}{x^2+5x+2}, \quad \frac{2x^2+3x+7}{x^4+3x^3-x^2+2x+1} \text{ ಮತ್ತು } \frac{x^2+1}{2x^2+3x+1}$$

ಇವು ಭಾಗಲಬ್ಧ ಉತ್ಪನ್ನಗಳು.

7.2. ಶುದ್ಧ ಮತ್ತು ಅಶುದ್ಧ ಭಿನ್ನರಾಶಿಗಳು

$\frac{f(x)}{g(x)}$ ಎಂಬ ಭಾಗಲಬ್ಧ ಉತ್ಪನ್ನದಲ್ಲಿ $f(x)$ ನ ಪ್ರಮಾಣವು $g(x)$ ನ ಪ್ರಮಾಣಕ್ಕಿಂತ ಕಡಿಮೆ ಇದ್ದಲ್ಲಿ ಅದನ್ನು **ಶುದ್ಧ ಭಿನ್ನರಾಶಿ** ಎಂದೂ ಮತ್ತು $f(x)$ನ ಪ್ರಮಾಣವು $g(x)$ನ ಪ್ರಮಾಣಕ್ಕಿಂತ ಜಾಸ್ತಿ ಇದ್ದಲ್ಲಿ ಅದಕ್ಕೆ **ಅಶುದ್ಧ ಭಿನ್ನರಾಶಿ** ಎಂದೂ ಹೇಳುವರು.

ಧನ ಅಥವಾ ಋಣ ಚಿಹ್ನೆಗಳನ್ನು ಒಳಗೊಂಡ ಬೈಜಿಕ ಭಿನ್ನರಾಶಿಗಳನ್ನು ಕೊಟ್ಟಿದ್ದಾಗ, ಅವುಗಳಿಗೆ ಸಮನಾದ (ಶುದ್ಧ ಅಥವಾ ಅಶುದ್ಧ) ಭಾಗಲಬ್ಧ ಭಿನ್ನರಾಶಿಯನ್ನು ಸುಲಭವಾಗಿ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದು.

ಉದಾಹರಣೆ : $\frac{1}{x+2} - \frac{2}{x-1} + \frac{3}{x+3} = \frac{2x^2+x+9}{x^3-2x^2-5x+6}$

ಈ ಅಧ್ಯಾಯವು ಇದರ ವಿರುದ್ಧವಾದ ಸಮಸ್ಯೆಯನ್ನು ಕುರಿತಾಗಿದೆ. ಅಂದರೆ ಒಂದು ಭಾಗಲಬ್ಧ ಭಿನ್ನರಾಶಿಯನ್ನು ಕೊಟ್ಟಾಗ ಅದನ್ನು ಸರಳ ಭಿನ್ನರಾಶಿಗಳ ಬೈಜಿಕ ಮೊತ್ತಗಳಾಗಿ

ವಿಭಜಿಸುವುದು. ಈ ಸರಳ ಭಿನ್ನರಾಶಿಗಳನ್ನು ದತ್ತ ಭಿನ್ನರಾಶಿಯ **ಆಂಶಿಕ ಭಿನ್ನರಾಶಿ** (ಅಥವಾ ವಿಭಜಿತ ಭಿನ್ನರಾಶಿ) ಎನ್ನುವರು.

ಉದಾ : $\dfrac{2x^2+x+9}{x^3-2x^2-5x+6} = \dfrac{1}{x+2} - \dfrac{2}{x-1} + \dfrac{3}{x+3}$

ಎಂದು ಪರಿವರ್ತಿಸಬಹುದು. ಬಲಬದಿಯ ಪದಗಳು ಆಂಶಿಕ ಭಿನ್ನರಾಶಿಗಳು. ಈ ರೀತಿ ದತ್ತ ಭಿನ್ನರಾಶಿಗಳನ್ನು ಆಂಶಿಕ ಭಿನ್ನರಾಶಿಗಳ ಮೊತ್ತವಾಗಿ ಮಾಡುವ ವಿಧಾನಕ್ಕೆ **"ಭಿನ್ನರಾಶಿಯ ಆಂಶಿಕ ವಿಭಜನೆ"** ಎಂದು ಹೇಳಬಹುದು.

ಒಂದು ಭಿನ್ನರಾಶಿಯ ಆಂಶಿಕ ವಿಭಜನೆ ಮಾಡುವಾಗ ಕೆಳಗಿನ ಅಂಶಗಳನ್ನು ಗಮನಿಸಬೇಕು:

ಅಂಶದಲ್ಲಿನ ಬಹುಘಾತಪದಿಯ ಪ್ರಮಾಣವು, ಛೇದದಲ್ಲಿನ ಬಹುಘಾತಪದಿಯ ಪ್ರಮಾಣಕ್ಕಿಂತ ಕಡಿಮೆ ಇರಬೇಕು. ಹಾಗೆ ಇಲ್ಲದಿದ್ದಲ್ಲಿ ಅಂಶವನ್ನು ಛೇದದಿಂದ ಭಾಗಿಸಿ.

ಉದಾಹರಣೆ 1.

$$\frac{x^3+4x^2+7x+5}{x^2+3x+4}$$

ಇಲ್ಲಿ ಅಂಶದ ಪ್ರಮಾಣ ಛೇದದ ಪ್ರಮಾಣಕ್ಕಿಂತ ಜಾಸ್ತಿ ಇದೆ (ಅಶುದ್ಧ ಭಿನ್ನರಾಶಿ). ಆದ್ದರಿಂದ ಅಂಶವನ್ನು ಛೇದದಿಂದ ಭಾಗಿಸಿ

$$\frac{x^3+4x^2+7x+5}{x^2+3x+4} = x + 1 + \frac{x+2}{x^2+3x+4}$$

ಎಂದು ಬರೆಯಬಹುದು.

$\dfrac{x+2}{x^2+3x+4}$ ನಲ್ಲಿ ಅಂಶದ ಪ್ರಮಾಣವು ಛೇದದ ಪ್ರಮಾಣಕ್ಕಿಂತ ಕಡಿಮೆ ಇದೆ.

(ಶುದ್ಧ ಭಿನ್ನರಾಶಿ). ಇದನ್ನು ಪುನಃ ಆಂಶಿಕ ಭಿನ್ನರಾಶಿಗಳಾಗಿ ಈ ಮುಂದಿನ 1ನೇ ವಿಧಾನದ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಸಾಧ್ಯವಿದ್ದಲ್ಲಿ ಪರಿವರ್ತಿಸಬಹುದು. ಈ ಉದಾಹರಣೆಯಲ್ಲಿ x^2+3x+4 ಎಂಬುದನ್ನು ಅಪವರ್ತಿಸಲು ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲವಾದ್ದರಿಂದ

$$\frac{x^3+4x^2+7x+5}{x^2+3x+4} = x+1+\frac{x+2}{x^2+3x+4}$$

ಎಂದಾಗುವುದು.

ಉದಾಹರಣೆ 2.

ಉದಾ. (1)ರಲ್ಲಿ ಛೇದವನ್ನು ಸ್ವಲ್ಪ ಬದಲಾಯಿಸಿ

$$\frac{x^3+4x^2+7x+5}{x^2+4x+3} = x + \frac{6x+5}{(x+3)(x+1)}$$

$$= x + \frac{A}{x+3} + \frac{B}{x+1}$$

$$= x + \frac{13}{2(x+3)} - \frac{1}{2(x+1)}$$

(ಮುಂದೆ ಹೇಳಿರುವ 1ನೇ ವಿಧಾನವನ್ನು ನೋಡಿ.)

7.3 ಆಂಶಿಕ ಭಿನ್ನರಾಶಿಗಳಾಗಿ ಪರಿವರ್ತಿಸುವುದು

ಈ ಕೆಳಗಿನ ವಿಧಾನಗಳನ್ನು ಗಮನಿಸಿ.

1ನೇ ವಿಧಾನ : ದತ್ತ ಭಿನ್ನರಾಶಿಯು ಛೇದದಲ್ಲಿ ಸರಳ ಅಪವರ್ತನ ಹೊಂದಿದ್ದರೆ ಮತ್ತು ಈ ಸರಳ ಅಪವರ್ತನ ಒಂದೇ ಸಲ ಇದ್ದರೆ ಆಂಶಿಕ ಭಿನ್ನರಾಶಿ ಬರೆಯುವ ವಿಧಾನವನ್ನು ಕೆಳಗಿನ ಉದಾಹರಣೆಯಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಲಾಗಿದೆ.

ಉದಾಹರಣೆ 3.

$\frac{3x+7}{(x+1)(x-2)}$ ಎಂಬುದನ್ನು ಎರಡು ಸರಳ ಆಂಶಿಕ ಭಿನ್ನರಾಶಿಗಳ ಮೊತ್ತವಾಗಿ ಬರೆಯಬಹುದು.

$\frac{3x+7}{(x+1)(x-2)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-2}$ ಆಗಿರಲಿ.

$$\therefore \frac{3x+7}{(x+1)(x-2)} = \frac{A(x-2)+B(x+1)}{(x+1)(x-2)}$$

ಅಥವಾ $3x + 7 = A(x-2) + B(x+1)$ ... (1)

ಈಗ, ಸಮೀಕರಣ (1)ರಲ್ಲಿ

$x = 2$ ಆದಾಗ, $3B = 13 \quad \therefore B = \frac{13}{3}$.

$x = -1$ ಆದಾಗ, $\quad -3A = 4 \quad \therefore A = -4/3$

$$\therefore \frac{3x+7}{(x+1)(x-2)} = \frac{-4}{3(x+1)} + \frac{13}{3(x-2)}$$

2ನೇ ವಿಧಾನ : $(x-a)$ ಎನ್ನುವುದು r ಸಲ ಪುನರಾವರ್ತಿಸುವ ಅಪವರ್ತನವಾಗಿ ಛೇದದಲ್ಲಿ ಇದ್ದಾಗ r ಆಂಶಿಕ ಭಿನ್ನರಾಶಿಗಳನ್ನು ಕೆಳಗಿನ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಬರೆಯಬಹುದು.

ಉದಾಹರಣೆ 4.

$$\frac{3x+7}{(x+1)^2(x-2)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{(x+1)^2} + \frac{C}{x-2}$$

$$= \frac{A(x+1)(x-2) + B(x-2) + C(x+1)^2}{(x+1)^2(x-2)}$$

$$\therefore 3x+7 = A(x+1)(x-2) + B(x-2) + C(x+1)^2 \quad \ldots (1)$$

ಸಮೀಕರಣ (1) ರಲ್ಲಿ

$x = -1$ ಆದರೆ $B(-3) = 4 \quad \therefore B = \frac{-4}{3}$

$x = 2$ ಆದರೆ $C(3)^2 = 13 \quad \therefore C = \frac{13}{9}$

$x = 0$ ಆದರೆ $-2A - 2B + C = 7 \quad \ldots (2)$

(2)ರಲ್ಲಿ A ಮತ್ತು B ಗಳ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಆದೇಶಿಸಿದಾಗ

$$-2A + 2.\left(\frac{4}{3}\right) + \frac{13}{9} = 7$$

ಅಥವಾ $-2A = 7 - \frac{8}{3} - \frac{13}{9} = \frac{26}{9}$

$$\therefore A = \frac{-13}{9}$$

ಆದ್ದರಿಂದ ದತ್ತ ಭಿನ್ನರಾಶಿಯನ್ನು

$$\frac{-13}{9(x+1)} - \frac{4}{3(x+1)^2} + \frac{13}{9(x-2)}$$

ಎಂದು ಬರೆಯಬಹುದು.

3ನೇ ವಿಧಾನ : ಛೇದದಲ್ಲಿ ಎರಡನೆಯ ಘಾತದ ಬೀಜೋಕ್ತಿಯು ಅಪವರ್ತನವಿದ್ದಾಗ ಆಂಶಿಕ ಭಿನ್ನರಾಶಿಗಳಾಗಿ ಈ ಕೆಳಗಿನ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಪರಿವರ್ತಿಸಬಹುದು.

ಉದಾಹರಣೆ 5.

$$\frac{x-4}{(x^2+3)(2x-1)}$$

ಇದನ್ನು ಆಂಶಿಕ ಭಿನ್ನರಾಶಿಗಳಾಗಿ ವಿಭಜಿಸಿ.

$$\frac{x-4}{(x^2+3)(2x-1)} = \frac{Ax+B}{x^2+3} + \frac{C}{2x-1} \text{ ಆಗಿರಲಿ.}$$

$$\therefore x-4 = (Ax+B)\ (2x-1) + C(x^2+3) \qquad \dots (1)$$

ಸಮೀಕರಣ (1)ರಲ್ಲಿ $2x = 1$ ಆದಾಗ

$$C\left(\frac{1}{4}+3\right) = \frac{1}{2} - 4$$

ಅಥವಾ $\frac{13C}{4} = -\frac{7}{2}$

$$\therefore\ C = \frac{7.4}{13.2} = -\frac{14}{13}$$

(1) ರಲ್ಲಿ $x = 0$ ಆದಾಗ $\quad -4 = -B - \frac{42}{13}$

ಅಥವಾ $B = 4 - \frac{42}{13} = \frac{52-42}{13} = \frac{10}{13}$

(1) ರಲ್ಲಿ $x = 1$ ಆದಾಗ

$$1-4 = (A+B)\ (2-1) + C\ (1+3)$$

ಅಥವಾ $-3 = \left(A + \frac{10}{13}\right) - \frac{14}{13}(4)$

$$= A + \frac{10}{13} - \frac{56}{13}$$

ಅಥವಾ $A = -3 + \frac{46}{13}$

$$= \frac{46 - 39}{13} = \frac{7}{13}$$

$$\therefore \frac{x-4}{(x^2+3)(2x-1)} = \frac{\frac{7}{13}x + \frac{10}{13}}{x^2 + 3} - \frac{14}{13(2x - 1)}$$

ಉದಾಹರಣೆ 6.

$$\frac{x^3+3x^2-7x-20}{x^2+3x-10}$$

ಈ ಭಿನ್ನರಾಶಿಯಲ್ಲಿ ಅಂಶದ ಘಾತ ಛೇದದ ಘಾತಕ್ಕಿಂತ ಹೆಚ್ಚಾಗಿದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ಅಂಶವನ್ನು ಛೇದದಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದಾಗ

$$x + \frac{3x-20}{x^2+3x-10}$$

ಎಂದಾಗುವುದು.

$$\frac{3x-20}{x^2+3x-10} = \frac{3x-20}{(x+5)\ (x-2)} = \frac{A}{(x+5)} + \frac{B}{(x-2)}$$

ಆಗಿರಲಿ.

$$\therefore 3x - 20 = A(x - 2) + B(x + 5)$$

ಮೇಲಿನ ಸಮೀಕರಣದಲ್ಲಿ

$x = 2$ ಆದರೆ, $7B = -14 \ \therefore \ B = -2$

$x = -5$ ಆದರೆ, $-7A = -35 \ \therefore \ A = 5$

ಆದ್ದರಿಂದ ದತ್ತ ಭಿನ್ನರಾಶಿ

$$x + \frac{5}{x + 5} - \frac{2}{x - 2}$$

ಎಂದು ಪರಿವರ್ತಿತವಾಗಿದೆ

ಅಭ್ಯಾಸ - 7

ಆಂಶಿಕ ಭಿನ್ನರಾಶಿಗಳಾಗಿ ಪರಿವರ್ತಿಸಿ :

1. $\frac{3x + 7}{(x + 2)(x + 3)}$

2. $\frac{x + 5}{x^2 + 7x + 12}$

3. $\frac{x - 6}{(x + 3)(x - 2)}$

4. $\frac{4x}{(x - 1)(x + 1)^2}$

5. $\frac{4(x - 1)}{(x + 2)(x - 2)^2}$

6. $\frac{2x - 8}{(x - 2)(x + 1)^2}$

7. $\frac{2x^2 - 1}{x^2 - 7x - 12}$

8. $\frac{2x^2 - 1}{x^2 - 7x + 12}$

9. $\frac{15x - 10x^2}{(2x + 1)(9 + x^2)}$

10. $\frac{1}{(x - 1)(x - 2)(x - 3)}$

11. $\dfrac{1}{1 - x^4}$

12. $\dfrac{x^3}{x^3 - 1}$

13. $\dfrac{x^3 - 3x^2 - 17x - 7}{x^2 - 3x - 10}$

14. $\dfrac{1}{x^3 + 1}$

15. $\dfrac{1}{x^3 - 1}$

16. $\dfrac{2x^2 - x + 2}{x^2(x + 2)^2}$

17. $\dfrac{1}{(x^2 + 1)(x^2 - x + 1)}$

18. $\dfrac{1}{(1 - x)(1 - 2x)(1 - 3x)}$

19. $\dfrac{1}{x(x + 1)(2x + 1)}$

20. $\dfrac{2x^2}{(x - 1)^2 (x^2 + 1)}$

21. $\dfrac{3 - 5x}{3x^2 - 4x + 1}$

ಅಧ್ಯಾಯ 8

ಸಂಖ್ಯಾ ಸಿದ್ಧಾಂತದ ಮೂಲ ಪರಿಕಲ್ಪನೆಗಳು ಮತ್ತು ಸಮಶೇಷೀಯತಾ ಸಂಬಂಧ

8.1 ಮೂಲ ಪರಿಕಲ್ಪನೆಗಳು

ಈ ಅಧ್ಯಾಯದಲ್ಲಿ ನಾವು ಎಲ್ಲ ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳು, ಅವುಗಳ ನಡುವೆ ವ್ಯಾಖ್ಯಾನಿಸಬಹುದಾದ ಕೆಲವು ಮುಖ್ಯ ಸಂಬಂಧಗಳು ಮತ್ತು ಅವುಗಳ ಗುಣ ವಿಶೇಷಗಳ ಕುರಿತು ಅಧ್ಯಯನ ಮಾಡುತ್ತೇವೆ.

ಎಲ್ಲ ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳ ಗಣವನ್ನು Z ಎಂಬ ಸಂಕೇತದಿಂದಲೂ, ಧನಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳ ಗಣವನ್ನು – ಅಂದರೆ ಸ್ವಾಭಾವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗಣವನ್ನು – N ಎಂಬ ಸಂಕೇತದಿಂದಲೂ ಸೊನ್ನೆಯಲ್ಲದ ಎಲ್ಲ ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳ ಗಣವನ್ನು Z^* ಎಂಬ ಸಂಕೇತದಿಂದಲೂ ನಮೂದಿಸುತ್ತೇವೆ.

Z ನಲ್ಲಿ ವ್ಯಾಖ್ಯಾನಿಸಬಹುದಾದ '$\leq$' ಕ್ರಮಸಂಬಂಧದ ಕುರಿತು ನಾವೀಗಾಗಲೇ ತಿಳಿದಿರುವುದರಿಂದ ಆ ವಿಷಯದ ಅಧ್ಯಯನವನ್ನು ನಾವು ಸವಿವರವಾಗಿ ಮಾಡುವುದಿಲ್ಲವಾದರೂ, ಪೂರ್ಣತೆಗೋಸ್ಕರವಾಗಿ ಪ್ರಸ್ತಾವಿಸುತ್ತ ಅದರ ಗುಣ ವಿಶೇಷಗಳನ್ನು ನೆನಪಿಸಿಕೊಳ್ಳುತ್ತೇವೆ.

ಕ್ರಮ ಸಂಬಂಧದ ವ್ಯಾಖ್ಯೆ :

$a, b \in Z$ ಮತ್ತು $a < b \Leftrightarrow b - a \in N$. ಅಂದರೆ $b - a \in N$ ಆದಾಗ ಮತ್ತು ಆಗಬೇಕಾದರೆ $a < b$ ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ.

$a < b$ ಅಥವಾ $a = b$ ಇವುಗಳಲ್ಲಿ ಯಾವುದಾದರೂ ಒಂದು ಸತ್ಯವಾದರೆ $a \leq b$ ಎಂದು ಬರೆಯುತ್ತೇವೆ.

ಉದಾ : $4 \leq 4$ $(\because 4 = 4)$

$4 \leq 5$ $(\because 5 - 4 = 1 \in N$ ಆದ್ದರಿಂದ $4 < 5)$

Z ನಲ್ಲಿ ವ್ಯಾಖ್ಯಾನಿಸಲ್ಪಟ್ಟ ಈ ಸಂಬಂಧ $\leq$ ಈ ಕೆಳಗಿನ ನಿಯಮಗಳಿಗೆ ಬದ್ಧವಾಗಿದೆ:

1. Z ನ ಎಲ್ಲ ಧಾತುಗಳಿಗೂ $a \leq a$ ಸತ್ಯವಾಗಿದೆ ($\leq$ ಸ್ವತುಲ್ಯ ಸಂಬಂಧವಾಗಿದೆ).
2. $a, b \in Z$; $a \leq b$ ಮತ್ತು $b \leq a$ ಆದರೆ $a = b$ ಆಗುತ್ತದೆ.

   ($\leq$ ಪ್ರತಿ ಸಮಮಿತ ಸಂಬಂಧವಾಗಿದೆ).

3. $a, b, c \in Z$; $a \leq b$ ಮತ್ತು $b \leq c$ ಆದರೆ $a \leq c$ ಆಗುತ್ತದೆ.

($\leq$ ಪ್ರವಹನಶೀಲ ಸಂಬಂಧವಾಗಿದೆ).

ಮೇಲಿನ ಮೂರು ನಿಯಮಗಳಿಗೆ ಬದ್ಧವಾಗಿರುವ ಯಾವುದೇ ಸಂಬಂಧವನ್ನು ಅಂದರೆ ಸ್ವತುಲ್ಯ, ಪ್ರತಿಸಮಮಿತ ಮತ್ತು ಪ್ರವಹನಶೀಲವಾಗಿರುವ ಯಾವುದೇ ಸಂಬಂಧವನ್ನು **ಆಂಶಿಕ ಕ್ರಮ** ಸಂಬಂಧವೆನ್ನುತ್ತಾರೆ.

ನಾವು ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳ ಗಣದಲ್ಲಿ ವ್ಯಾಖ್ಯಾನಿಸಿದ '$\leq$' ಸಂಬಂಧವು ಈ ಮೂರು ನಿಯಮಗಳಿಗೆ ಬದ್ಧವಾಗಿದೆ. ಈ ನಿಯಮಗಳಲ್ಲಿ ಅಗತ್ಯವಾಗಿ ಅದು

4. $a, b \in Z$ ಆದಾಗ $a \leq b$ ಅಥವಾ $b \leq a$ ಸತ್ಯವಾಗಿದೆ. ಆದ್ದರಿಂದಲೇ Z ನಲ್ಲಿ $\leq$ ಕ್ರಮಸಂಬಂಧ (ಪೂರ್ಣಕ್ರಮ ಸಂಬಂಧವಾಗಿದೆ)

ಯಾವುದೇ ಗಣದಲ್ಲಿ ಪೂರ್ಣಕ್ರಮ ಸಂಬಂಧವನ್ನು ವ್ಯಾಖ್ಯಾನಿಸಲಾಗಿದ್ದರೆ ಅಂತಹ ಗಣವನ್ನು **ಕ್ರಮಸಂಬಂಧಯುಕ್ತ** ಗಣವೆಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ.

$(Z, \leq)$ ಒಂದು ಕ್ರಮ ಸಂಬಂಧಯುಕ್ತ ಗಣವಾಗಿದೆ.

Z ನಲ್ಲಿ $+$ ಮತ್ತು . ಎಂಬ ಎರಡು ಪರಿಕರ್ಮಗಳು ಪ್ರಚಲಿತವಿವೆ.

($\leq$ ಎಂಬ ಕ್ರಮ ಸಂಬಂಧವು ಈ ಪರಿಕರ್ಮಗಳೊಂದಿಗೆ ಈ ಕೆಳಗಿನ ಅರ್ಥದಲ್ಲಿ ಹೊಂದಿಕೊಳ್ಳುತ್ತದೆ.

5. $c \in Z$ ಮತ್ತು $a \leq b$ ಆದರೆ $a + c \leq b + c$

6. c ಯು ಋಣವಲ್ಲದ ಪೂರ್ಣಾಂಕವಾಗಿದ್ದು $a \leq b$ ಆದರೆ $ac \leq bc$

ಅಭ್ಯಾಸಕ್ಕಾಗಿ ಪ್ರಶ್ನೆಗಳು

1. $a \leq b$ ಮತ್ತು $c \leq d$ ಆದರೆ $a + c \leq b + d$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.
2. $a \leq b$ ಮತ್ತು $c \leq d$ ಮತ್ತು a, c ಗಳು ಧನ ಪೂರ್ಣಾಂಕವಾಗಿದ್ದರೆ $ac \leq bd$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.
3. a ಯು ಸ್ವಾಭಾವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಿದ್ದು $a \leq b$ ಆದರೆ $\frac{1}{a} \geq \frac{1}{b}$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.
4. (2) ಮತ್ತು (3) ನೆಯ ಪ್ರಶ್ನೆಗಳಲ್ಲಿ $a, c > 0$ ಅಥವಾ $a > 0$ ಎಂಬ ಪ್ರತಿಬಂಧವು ಅಗತ್ಯವೆಂಬುದನ್ನು ತೋರಿಸಲು ಉದಾಹರಣೆಗಳನ್ನು ಕೊಡಿ.

8.2.1 ಭಾಜ್ಯತಾ ಸಂಬಂಧ

ವ್ಯಾಖ್ಯೆ : $a, b \in Z$ ಮತ್ತು $a \neq b$ ಆಗಿರಲಿ. $b = ka$ ಆಗುವಂತೆ Z ನಲ್ಲಿ k ಎಂಬ ಧಾತುವೊಂದಿದ್ದರೆ a ಯು b ಯನ್ನು ಭಾಗಿಸುತ್ತದೆ. $a | b$ ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ. ಹಾಗಾದಾಗ aಯು bಯ ಅಪವರ್ತನವೆಂದೂ, ಅಥವಾ bಯು aಯ ಅಪವರ್ತ್ಯವೆಂದೂ ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ.

ಆದ್ದರಿಂದ, $a \mid b \Leftrightarrow b = ka$ ಆಗುವಂತೆ $k \in Z$ ಧಾತುವೊಂದಿದೆ.

ಉದಾ :

1. $6 = 2.3 = 3.2$ ಆದ್ದರಿಂದ $3 \mid 6$ ಮತ್ತು $2 \mid 6$
2. $a = 1.a = a.1$ ಆದ್ದರಿಂದ $1 \mid a$ ಮತ್ತು $a \mid 1$. ಇದು Z^*ನ ಎಲ್ಲ ಗಣಾಂಶ a ಗಳಿಗೂ ಸತ್ಯವಾಗಿದೆ.
3. $a \mid b$ ಆದರೆ $-a \mid b$ ಮತ್ತು $a \mid -b$

ಆದ್ದರಿಂದ Z^* ನ ಯಾವುದೇ ಧಾತು $\underline{a}$ಗೆ ಕನಿಷ್ಠ 4 ಅಪವರ್ತನಗಳು ± 1, $\pm a$ ಇರುತ್ತವೆ.

ಉದಾ 1.

6 ರ ಎಲ್ಲ ಅಪವರ್ತನಗಳನ್ನು ಬರೆಯಿರಿ.

$\{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6\}$ ಇದು 6ರ ಎಲ್ಲ ಅಪವರ್ತನಗಳ ಗಣ.

ಉದಾ 2.

5ರ ಎಲ್ಲ ಅಪವರ್ತನಗಳ ಗಣ :

$\{\pm 1, \pm 5\}$

ಮೇಲಿನ ಅಭ್ಯಾಸ ಮತ್ತು ಉದಾಹರಣೆಗಳನ್ನು ಕೂಲಂಕಷವಾಗಿ ಪರಿಶೀಲಿಸಿದಲ್ಲಿ ಭಾಜ್ಯತಾ ಸಂಬಂಧಕ್ಕೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದಂತೆ ಕೆಳಗಿನ ವಿಷಯಗಳು ನಮ್ಮ ಗಮನಕ್ಕೆ ಬರುತ್ತದೆ.

(a) $d \mid a$ ಆದರೆ $-d \mid a$

(b) $a \mid a$ ಅಂದರೆ ಭಾಜ್ಯತಾ ಸಂಬಂಧವು Z^* ನಲ್ಲಿ ಸ್ವತುಲ್ಯವಾಗಿದೆ.

(c) $a \mid b$ ಮತ್ತು $b \mid a$ ಆದರೆ $a = \pm b$

(d) $a \mid b$ ಮತ್ತು $b \mid c$ ಆದರೆ $b = k_1 a$, $c = k_2 b$, $(k_1, k_2 \in Z)$ ಆಗುವಂತೆ ಇವೆ. ಆದ್ದರಿಂದ $c = k_2(k_1 a) = (k_2 k_1)a \Rightarrow a \mid c$

ಅಂದರೆ, ಭಾಜ್ಯತಾ ಸಂಬಂಧವು ಪ್ರವಹನ ಶೀಲವಾಗಿದೆ.

ಈ ಸಂಬಂಧವನ್ನು ಸ್ವಾಭಾವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗಣ Nಗೆ ಸೀಮಿತಗೊಳಿಸಿದರೆ ಅದು ಸ್ವತುಲ್ಯವೂ, ಪ್ರತಿ ಸಮಮಿತವೂ, ಪ್ರವಹನ ಶೀಲವೂ ಆಗುವುದರಿಂದ ಅದು ಅಂಶಿಕ ಕ್ರಮ ಸಂಬಂಧವಾಗುತ್ತದೆ. ಆದರೆ ಈ ಭಾಜ್ಯತಾ ಸಂಬಂಧವು ಕ್ರಮ ಸಂಬಂಧವಲ್ಲ. ಏಕೆಂದರೆ $2, 3 \in N$ ಆದರೆ $2 \nmid 3$ ಮತ್ತು $3 \nmid 2$

ಅಭ್ಯಾಸ :

a, b, c ಗಳು ಸೊನ್ನೆಯಲ್ಲದ Zನ ಗಣಾಂಶಗಳು $(a, b, c \in Z^*)$

$a \mid b$ ಮತ್ತು $a \mid c$ ಆದರೆ ಯಾವುದೇ $l, m \in Z$ ಗೆ

$a \mid (lb \pm mc)$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

8.2.2 ಯುಕ್ಲಿಡೀಯ ಭಾಜನ ವಿಧಿ

ಈಗ $a, b \in N$ ಆಗಿರಲಿ ಮತ್ತು $a \neq 0$ ಈ ಎರಡು ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳಿಗೆ ಸಂಬಂಧ ಪಟ್ಟಂತೆ $S = \{b - aq | q \in Z\}$ ಎಂಬ ಗಣವನ್ನು ಸೃಷ್ಟಿಸಬಹುದು. ಇದು Zನ ಉಪಗಣ ಮತ್ತು $b \in S$ ಆದ್ದರಿಂದ $S \neq \phi$. ಖಂಡಿತವಾಗಿಯೂ Sನಲ್ಲಿ ಒಂದು ಧನಪೂರ್ಣಾಂಕವಾದರೂ ಇದೆ (ಏಕೆ? ಒಂದನ್ನಾದರೂ ತೋರಿಸಿ); rಎಂಬುದು Sನಲ್ಲಿರುವ ಧನಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳಲ್ಲಿ ಅತಿ ಚಿಕ್ಕ ಧನಪೂರ್ಣಾಂಕವಾಗಿರಲಿ. [ಶೂನ್ಯವಲ್ಲದ ಯಾವುದೇ ಧನಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳ ಗಣದಲ್ಲಿ ಅತಿಚಿಕ್ಕ ಧಾತುವೊಂದಿದೆ. ಇದನ್ನು ಸಕ್ರಮೀಕರಣ ಗುಣ ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ. ಕ್ರಮ ಸಂಬಂಧ ಯುಕ್ತ ಗುಣಗಳಲ್ಲಿ ಈ ಗುಣವಿದ್ದರೆ ಅದನ್ನು ಸಕ್ರಮಯುಕ್ತ ಗಣವೆನ್ನುತ್ತೇವೆ. ಸ್ವಾಭಾವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗಣಕ್ಕೆ ಈ ಗುಣವಿದೆ.] r ಧನ ಪೂರ್ಣಾಂಕವಾಗಿರುವುದರಿಂದ $o<r$. ಈ $r \leq a$ ಕೂಡಾ ಆಗಿರುತ್ತದೆ. ಏಕೆಂದರೆ $r > a$ ಆದರೆ $r - a$ ಒಂದು ಧನಪೂರ್ಣಾಂಕವಾಗಿದ್ದು r ಗಿಂತ ಸಣ್ಣದಾಗಿರುತ್ತದೆ ಮತ್ತು $r - a \in S$ ಆಗಿರುತ್ತದೆ. ಆ ಕಾರಣ r, ಎಂಬುದು Sನಲ್ಲಿರುವ ಧನ ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳಲ್ಲಿ ಅತಿ ಚಿಕ್ಕದೆಂಬ ನಮ್ಮ ಆಯ್ಕೆಗೆ ವಿರೋಧವಾಗುತ್ತದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ S ನಲ್ಲಿರುವ ಅತಿ ಚಿಕ್ಕ ಧನಪೂರ್ಣಾಂಕ $r \leq a$ ಆಗಿರುತ್ತದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ $r = b - aq,\ 0 < r \leq a$

ಅಥವಾ $b = aq_1 + r,\ 0 < r \leq a$

ಒಂದು ವೇಳೆ $r = a$ ಆದರೆ $b = a(q_1 + 1) + 0$ ಎಂದೂ ಬರೆಯಬಹುದು.

ಹಾಗಾಗಿ ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳ ಗಣದಲ್ಲಿ a, b ಗಳನ್ನು ಕೊಟ್ಟಾಗ aಯು ಧನ ಪೂರ್ಣಾಂಕವಾದರೆ $b = aq + r$ ಮತ್ತು $0 \leq r < a$ ಆಗುವಂತೆ r ಮತ್ತು q ಎಂಬ ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳಿರುತ್ತವೆ. a ಮತ್ತು bಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದಂತೆ ಅವುಗಳು ಏಕೈಕವಾಗಿರುತ್ತವೆ. ಇದನ್ನು **"ಯೂಕ್ಲಿಡೀಯ ಭಾಜನ ವಿಧಿ"** ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ. ಇಲ್ಲಿ q ವನ್ನು ಭಾಗಲಬ್ಧವೆಂದೂ rನ್ನು ಭಾಜ್ಯ ಶೇಷವೆಂದೂ ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ. ಈ ಶೇಷವು 0 ಯಾದಾಗ $a | b$ ಆಗುತ್ತದೆ. $a.0 = 0$ ಆದಕಾರಣ $a | b$.

"ಯುಕ್ಲಿಡೀಯ ಭಾಜನ ವಿಧಿ"ಯನ್ನು ಈ ರೀತಿಯೂ ಬರೆಯಬಹುದು:

"$a, b \in Z,\ a > o$ ಆದರೆ $a | b$ ಅಥವಾ $b = aq + r\ ,\ o < r < a$, ಆಗುವಂತೆ Zನಲ್ಲಿ q ಮತ್ತು r ಎಂಬ ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳಿರುತ್ತವೆ ಮತ್ತು a ಮತ್ತು b ಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದಂತೆ ಈ q ಮತ್ತು r ಗಳು ಏಕೈಕವಾಗಿರುತ್ತವೆ."

ಈ ಭಾಜನ ವಿಧಿಯನ್ನು ಮುಖ್ಯವಾಗಿ ಮಹತ್ತಮ ಸಾಮಾನ್ಯ ಅಪವರ್ತನವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು ಉಪಯೋಗಿಸುತ್ತೇವೆ.

8.3 ಮಹತ್ತಮ ಸಾಮಾನ್ಯ ಅಪವರ್ತನ (ಮ.ಸಾ.ಅ.) :

a ಮತ್ತು b ಸೊನ್ನೆಯಲ್ಲದ ಎರಡು ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳಾಗಿರಲಿ. a ಮತ್ತು b ಗಳ ಎಲ್ಲ ಅಪವರ್ತನಗಳ ಗಣವನ್ನು ಅನುಕ್ರಮವಾಗಿ A ಮತ್ತು B ಎಂದು ಬರೆಯೋಣ. ಆಗ

$A \cap B$ ಯ ಯಾವುದೇ ಧಾತು d ಯು $d|a$ ಮತ್ತು $d|b$ ಆಗಿರುತ್ತದೆ. ಅಂದರೆ, d ಯು a ಮತ್ತು b ಗಳ ಸಾಮಾನ್ಯ ಅಪವರ್ತನವಾಗಿರುತ್ತದೆ. ಈ ಸಾಮಾನ್ಯ ಅಪವರ್ತನಗಳ ಪೈಕಿ ಅತಿದೊಡ್ಡ ಧನಾತ್ಮಕ ಅಪವರ್ತನವೊಂದಿದೆ ಮತ್ತು ಅದು ಏಕೈಕವಾಗಿರುತ್ತದೆ. ಅದನ್ನು **ಮಹತ್ತಮ ಸಾಮಾನ್ಯ ಅಪವರ್ತನ**ವೆಂಬ ಹೆಸರಿನಿಂದ ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ. a ಮತ್ತು b ಗಳ ಮಹತ್ತಮ ಸಾಮಾನ್ಯ ಅಪವರ್ತನವನ್ನು (a, b) ಎಂಬ ಸಂಕೇತದಿಂದ ಬರೆಯುತ್ತೇವೆ.

d ಯು a ಮತ್ತು b ಗಳ ಮಹತ್ತಮ ಸಾಮಾನ್ಯ ಅಪವರ್ತನವಾದರೆ ಬೇರೆ ಯಾವುದೇ ಸಾಮಾನ್ಯ ಅಪವರ್ತನ k ಯು d ಯನ್ನು ಭಾಗಿಸುತ್ತದೆ.

ಆದ್ದರಿಂದ ಮಹತ್ತಮ ಸಾಮಾನ್ಯ ಅಪವರ್ತನವು ಈ ಕೆಳಗಿನ ನಿಯಮಗಳಿಗೆ ಬದ್ಧವಾದ d ಎಂಬ ಪೂರ್ಣಾಂಕವಾಗಿದೆ.

(1) d ಯು ಧನಪೂರ್ಣಾಂಕವಾಗಿದೆ; ಮತ್ತು

(2) d ಯು a ಮತ್ತು b ಗಳ ಸಾಮಾನ್ಯ ಅಪವರ್ತನವಾಗಿದ್ದು ಬೇರೆ ಯಾವುದೇ ಸಾಮಾನ್ಯ ಅಪವರ್ತನ d_1, d ಯನ್ನು ಭಾಗಿಸುತ್ತದೆ.

ಅಂದರೆ, (1) $d|a$ ಮತ್ತು $d|b$ (2) $d_1|a$ ಮತ್ತು $d_1|b$ ಆದರೆ $d_1|d$

ಉದಾಹರಣೆ : 56 ಮತ್ತು 48ರ ಮಹತ್ತಮ ಸಾಮಾನ್ಯ ಅಪವರ್ತನವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

56ರ ಅಪವರ್ತನಗಳ ಗಣ =
$\{\pm 56, \pm 1, \pm 2, \pm 28, \pm 4, \pm 14, \pm 8, \pm 7\}$

48ರ ಅಪವರ್ತನಗಳ ಗಣ=
$\{\pm 48, \pm 1, \pm 2, \pm 24, \pm 4, \pm 12, \pm 8, \pm 6 \pm 16, \pm 3\}$

ಸಾಮಾನ್ಯ ಅಪವರ್ತನಗಳ ಗಣ $= \{\pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 8\}$

ಆದ್ದರಿಂದ ಮಹತ್ತಮ ಸಾಮಾನ್ಯ ಅಪವರ್ತನ $= 8$.

ಮಹತ್ತಮ ಸಾಮಾನ್ಯ ಅಪವರ್ತನಗಳಿಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿ ಈ ಕೆಳಗಿನ ವಿಷಯವನ್ನು ನಾವು ಕಂಡುಕೊಳ್ಳುತ್ತೇವೆ:

$(a, b) = (-a, b) = (-a-b) = (a, -b)$

ಅಂದರೆ $(a, b) = (|a|, |b|)$

ಹಾಗಾಗಿ ಯಾವುದೇ ಎರಡು ಧನ ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳ ಮಹತ್ತಮ ಸಾಮಾನ್ಯ ಅಪವರ್ತನವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವ ವಿಧಾನವು ನಮಗೆ ತಿಳಿದರೆ ಯಾವುದೇ ಎರಡು ಸೊನ್ನೆಯಲ್ಲದ ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳ ಮಹತ್ತಮ ಸಾಮಾನ್ಯ ಅಪವರ್ತನವನ್ನು ನಾವು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಲ್ಲೆವು.

ಎರಡು ಧನಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳ ಮಹತ್ತಮ ಸಾಮಾನ್ಯ ಅಪವರ್ತನವನ್ನು ಯುಕ್ಲಿಡೀಯ ಭಾಜನ ವಿಧಿಯನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವ ವಿಧಾನವನ್ನು ನಾವು ಈ ಕೆಳಗೆ ವಿವರಿಸುತ್ತೇವೆ.

a ಮತ್ತು b ಗಳು ಧನಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳಾಗಿರಲಿ. ಯಾವುದೇ ನಷ್ಟವಿಲ್ಲದೆ $a|b$ ಆದರೆ a ಯು ಮಹತ್ತಮ ಸಾಮಾನ್ಯ ಅಪವರ್ತನವಾಗುತ್ತದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ $a \nmid b$ (a , b ಯನ್ನು

ಭಾಗಿಸುವುದಿಲ್ಲ) ಎಂದಿಟ್ಟು ಕೊಳ್ಳೋಣ. ಈಗ ಯುಕ್ಲಿಡೀಯ ಭಾಜನ ವಿಧಿಯನ್ನುಪಯೋಗಿಸಿ ನಾವು ಧನಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳ ಒಂದು ಶ್ರೇಣಿಯನ್ನು ಈ ಕೆಳಗಿನಂತೆ ಕಂಡುಹಿಡಿಯುತ್ತೇವೆ;

b, a, r_1, r_2, r_3 ಇತ್ಯಾದಿ ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳು ಈಗ

$$l = aq_1 + r_1$$

$$a = r_1q_2 + r_2$$

$$r_1 = r_2q_3 + r_3$$

. . . . . .

. . . . . .

ಸಮೀಕರಣಗಳಿಂದ ಹುಟ್ಟಿಕೊಳ್ಳುತ್ತವೆ. ಈ ಶ್ರೇಣಿಯಲ್ಲಿರುವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಅನುಕ್ರಮವಾಗಿ $b > a > r_1 > r_2 > r_3 \ldots\ldots$ ಈ ಶ್ರೇಣಿಯು ಅನಂತವಾಗಿರಲು ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲದ ಕಾರಣ $r_n = 0$ ಆಗುವಂತೆ ಒಂದು ಪೂರ್ಣಾಂಕವಿರುತ್ತದೆ. ಆಗ $r_{n-2} = q_{n-1}\, r_{n-1}$ ಆಗುತ್ತದೆ. ಮುಂದಕ್ಕೆ ಭಾಜನ ವಿಧಿಯನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಲು ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲವಾಗಿ ಶ್ರೇಣಿಯು ಅಂತ್ಯಗೊಳ್ಳುತ್ತದೆ. ಈ ಕೊನೆಯ ಸೊನ್ನೆಯಲ್ಲದ ಶೇಷ r_{n-1}ನ್ನು d ಎಂದು ಕರೆಯೋಣ. ಈ d ಯು r_{n-2} ನ್ನು ಭಾಗಿಸುತ್ತದೆ. ಈಗ r_{n-1}, r_{n-2} ನ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಹಿಂದಿನ ಸಮೀಕರಣಗಳಲ್ಲಿ ಅನುಕ್ರಮವಾಗಿ ಆದೇಶಿಸುತ್ತ ಬಂದರೆ $d \mid r_{n-3}$, $d \mid r_{n-4}, \ldots\ldots,$ $d \mid r_2$, $d \mid r_1$, $d \mid a$, $d \mid b$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಬಹುದು. ಅಂದರೆ dಯು ಮೇಲಿನ ಶ್ರೇಣಿಯ ಎಲ್ಲ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಸಾಮಾನ್ಯ ಅಪವರ್ತನವಾಗಿರುತ್ತದೆ. ಮೇಲಿನ ಸಮೀಕರಣಗಳಿಂದ ವ್ಯಕ್ತವಾಗುವ ಇನ್ನೊಂದು ಅಂಶವೆಂದರೆ

$$r_1 = b - aq_1 = a(-q_1) + b$$

$$r_2 = a - r_1q_2 = a - (b - aq_1)\, q_2$$

$$= a(1 + q_1q_2) - bq_2$$

$$r_3 = r_1 - r_2\, q_3 = (b - aq_1) - q_3\left[(a_1 + q_1q_2) - bq_2\right]$$

$$= a[-q_1 - q_3(1 + q_1q_2)] + b(1 + q_2q_3)$$

ಹೀಗೆ ಮೇಲಿನ ಶ್ರೇಣಿಯ ಎಲ್ಲ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನೂ

$$sa + tb$$

ಎಂಬ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಬರೆಯಬಹುದು. ಇಲ್ಲಿ $s, t \in Z$.

ಮುಖ್ಯವಾಗಿ ಆ ಶ್ರೇಣಿಯ ಕೊನೆಯ ಸೊನ್ನೆಯಲ್ಲದ ಶೇಷ $r_{n-1} = d$ ಯನ್ನು ಕೂಡಾ $sa + tb$ ಎಂಬ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಬರೆಯಬಹುದು.

ಈಗಾಗಲೇ dಯು a ಮತ್ತು b ಗಳ ಸಾಮಾನ್ಯ ಅಪವರ್ತನವೆಂದು ಕಂಡುಕೊಂಡಿದ್ದೇವೆ. ಈಗ d^1 ಇನ್ನಾವುದೇ ಸಾಮಾನ್ಯ ಅಪವರ್ತನವಾದರೆ $a = k_1d^1$ ಮತ್ತು $b = k_2d^1$ ಆಗುತ್ತದೆ (ಇಲ್ಲಿ $k_1, k_2 \in Z$)

ಆದ್ದರಿಂದ $d = s(k_1d^1) + t(k_2d^1)$

$$= (sk_1 + tk_2)d^1$$

ಅಂದರೆ, $d^1 | d$ ಮತ್ತು d ಯು ಒಂದು ಧನ ಪೂರ್ಣಾಂಕವಾಗಿದೆ. ಹಾಗಾಗಿ dಯು ಮಹತ್ತಮ ಸಾಮಾನ್ಯ ಅಪವರ್ತನವಾಗಿದೆ.

ಉದಾಹರಣೆ 1 :

ಭಾಜನ ವಿಧಿಯನ್ನುಪಯೋಗಿಸಿ 56 ಮತ್ತು 48 ರ ಮಹತ್ತಮ ಸಾಮಾನ್ಯ ಅಪವರ್ತನವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

$$56 = 1(48) + 8$$

ಮತ್ತು $48 = 6(8) + 0$

ಆದ್ದರಿಂದ, ಮಹತ್ತಮ ಸಾಮಾನ್ಯ ಅಪವರ್ತನ 8.

ಉದಾಹರಣೆ 2.

ಭಾಜನ ವಿಧಿಯನ್ನುಪಯೋಗಿಸಿ 456 ಮತ್ತು 362 ರ ಮಹತ್ತಮ ಸಾಮಾನ್ಯ ಅಪವರ್ತನವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

$$456 = 1(362) + 94$$

$$362 = 3(94) + 80$$

$$94 = 1(80) + 14$$

$$80 = 5(14) + 10$$

$$14 = 1(10) + 4$$

$$10 = 2(4) + 2$$

$$4 = 2(2) + 0$$

ಆದ್ದರಿಂದ, 2 ಮಹತ್ತಮ ಸಾಮಾನ್ಯ ಅಪವರ್ತನವಾಗಿದೆ.

ಇದನ್ನೇ ಇನ್ನು ಮುಂದೆ ಈ ರೀತಿ ಭಾಗಾಕಾರದ ಕ್ರಮದಲ್ಲಿ ಬರೆಯುತ್ತೇವೆ:

3	362	456	1
	282	362	
5	80	94	1
	70	80	
2	10	14	1
	8	10	
	2	4	2
		4	
		0	

ಇಲ್ಲಿ ಶೇಷಗಳು ಅನುಕ್ರಮವಾಗಿ 94, 80, 14, 10, 4, 2, 0 ಶೂನ್ಯವಲ್ಲದ ಕೊನೆಯ ಶೇಷ 2. ಇದೇ ದತ್ತ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮಹತ್ತಮ ಸಾಮಾನ್ಯ ಅಪವರ್ತನ.

ಉದಾಹರಣೆ 3

325 ಮತ್ತು 456 ಇವುಗಳ ಮಹತ್ತಮ ಸಾಮಾನ್ಯ ಅಪವರ್ತನವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

2	325	456	1
	262	325	
12	63	131	2
	60	126	
1	3	5	1
	2	3	
	1	2	2
		2	
		0	

ಇಲ್ಲಿ ಶೇಷಗಳು ಅನುಕ್ರಮವಾಗಿ 131, 63, 5, 3, 2, 1, 0.

ಕೊನೆಯ ಸೊನ್ನೆಯಲ್ಲದ ಶೇಷ 1. ಆದ್ದರಿಂದ ದತ್ತ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾದ 456 ಮತ್ತು 325ರ ಮಹತ್ತಮ ಸಾಮಾನ್ಯ ಅಪವರ್ತನ 1

ಯಾವುದೇ ಎರಡು ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳ ಮಹತ್ತಮ ಸಾಮಾನ್ಯ ಅಪವರ್ತನವು ಆ ಎರಡು ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳ ರೇಖೀಯ ಸಂಯೋಜನೆಯಾಗಿರುತ್ತದೆ ಎಂಬುದನ್ನು ನಾವು ಕಂಡುಕೊಂಡಿದ್ದೇವೆ.

ಉದಾಹರಣೆ 4

315 ಮತ್ತು 57ರ ಮಹತ್ತಮ ಸಾಮಾನ್ಯ ಅಪವರ್ತನವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿದು ಅದನ್ನು 315 ಮತ್ತು 57ರ ರೇಖೀಯ ಸಂಯೋಜನೆಯಾಗಿ ನಿರೂಪಿಸಿ.

1	57	315	5
	30	285	
9	27	30	1
	27	27	
	0	3	

ಇಲ್ಲಿ ಶೇಷಗಳು ಅನುಕ್ರಮವಾಗಿ 30, 27,3,0. ಆದ್ದರಿಂದ ಸೊನ್ನೆಯಲ್ಲದ ಕೊನೆಯ ಶೇಷ 3. ಇದೇ 315 ಮತ್ತು 57ರ ಮಹತ್ತಮ ಸಾಮಾನ್ಯ ಅಪವರ್ತನ.

ಈಗ, $315 = 5 \times 57 + 30$

$57 = 1 \times 30 + 27$

$30 = 1 \times 27 + 3$

ಆದ್ದರಿಂದ $3 = 30 \times 1 - 27$

$= 30 - (57 - 30)$

$= 2 \times 30 - 57 = 2(315 - 5 \times 57) - 57$

$= 2 \times 315 - 6 \times 57$

8.4 ಸಾಪೇಕ್ಷ ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು

ವ್ಯಾಖ್ಯೆ : ಎರಡು ಸಹಜ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು a ಮತ್ತು b ಗಳ ಮ.ಸಾ.ಅ. $(a, b) = 1$ ಆಗಿರುವಂತೆ ಇದ್ದರೆ, ಆ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಪರಸ್ಪರ ಸಾಪೇಕ್ಷ ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳೆಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ.

ಅಂದರೆ, ಎರಡು ಸಾಪೇಕ್ಷ ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು 1ನ್ನು ಅಲ್ಲದೆ ಬೇರೆ ಯಾವುದೇ ಧನ ಪೂರ್ಣಾಂಕ ಸಾಮಾನ್ಯ ಅಪವರ್ತನಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿರುವುದಿಲ್ಲ.

ಉದಾಹರಣೆಗಳು : (i) 4, 9 (ii) 64, 45 (iii) 32, 45

8.5 ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಮತ್ತು ಸಂಯುಕ್ತ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು

8.5.1 ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು :

ಯಾವುದೇ ಪೂರ್ಣಾಂಕ a ಗೆ $\pm 1, \pm a$ ಗಳು ಅಗತ್ಯವಾಗಿ ಅಪವರ್ತಗಳಾಗಿರುತ್ತವೆ. ಈ ಅಪವರ್ತನಗಳಲ್ಲದೆ a ಗೆ ಬೇರೆ ಯಾವ ಅಪವರ್ತನಗಳೂ ಇಲ್ಲದಿದ್ದಲ್ಲಿ ಆ ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳನ್ನು ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳೆನ್ನುತ್ತೇವೆ.

ಯಾವುದೇ ಧನ ಪೂರ್ಣಾಂಕ pಗೆ ಕೇವಲ ಎರಡು ಧನಾತ್ಮಕ ಅಪವರ್ತನಗಳು 1ಮತ್ತು p ಮಾತ್ರ ಇದ್ದಲ್ಲಿ ಅದನ್ನು ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆಯೆನ್ನುತ್ತೇವೆ.

ಉದಾ :

(1) 2, 3, 5, 11, ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು.

(2) 6 ಅವಿಭಾಜ್ಯವಲ್ಲ, 6ಕ್ಕೆ 1,6ಅಲ್ಲದೆ 2ಮತ್ತು 3ಧನಾತ್ಮಕ ಅಪವರ್ತನಗಳಿವೆ.

(ii) **ಸಂಯುಕ್ತ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು :** ಅವಿಭಾಜ್ಯವಲ್ಲದ ಪೂರ್ಣಾಂಕವನ್ನು ಸಂಯುಕ್ತ ಸಂಖ್ಯೆ ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ. ಅಂದರೆ, c ಎಂಬುದು ಒಂದು ಸಂಯುಕ್ತ ಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಿದ್ದರೆ, ಅದು 1ಮತ್ತು cಅಲ್ಲದೆ ಬೇರೆ ಒಂದಾದರೂ ಧನ ಪೂರ್ಣಾಂಕ ಅಪವರ್ತನವನ್ನು ಹೊಂದಿರುತ್ತದೆ.

ಉದಾ : 4, 9, 10, 15

ಪ್ರಮೇಯ 1 : ಈಗ a ಯು ಒಂದು ಪೂರ್ಣಾಂಕವಾಗಿರಲಿ. p ಯು ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆಯಾದರೆ $p \nmid a$ ಅಥವಾ $(p, a) = 1$ ಆಗಿರುತ್ತದೆ.

ಸಾಧನೆ : $p \nmid a$ ಆದರೆ ಸಾಧಿಸಲು ಏನೂ ಉಳಿಯುವುದಿಲ್ಲ, $p \nmid a$ ಆದರೆ

$d = (p, a)$ ಆಗಿರಲಿ.

ಈ dಯು p ಮತ್ತು aಗಳ ಸಾಮಾನ್ಯ ಅಪವರ್ತನ. dಯು ಧನಾತ್ಮಕ ಪೂರ್ಣಾಂಕವಾಗಿರುವುದರಿಂದ ಮತ್ತು pಯು ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಿರುವುದರಿಂದ $d = 1$ ಆಗುತ್ತದೆ.

ಯಾವುದೇ ಎರಡು ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳ ಮಹತ್ತಮ ಸಾಮಾನ್ಯ ಅಪವರ್ತನ 1 ಆದರೆ ಆಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳನ್ನು ಪರಸ್ಪರ ಅಸಹಭಾಜ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ.

ಪ್ರಮೇಯ 2 : $c|ab$ ಮತ್ತು $(c, a) = 1$ ಆದರೆ $c|b$

ಅಂದರೆ, c ಯು ab ಯನ್ನು ಭಾಗಿಸುವ ಪೂರ್ಣಾಂಕ ಮತ್ತು c ಮತ್ತು a ಗಳು ಪರಸ್ಪರ ಸಾಪೇಕ್ಷ ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾದರೆ c ಯು b ಯನ್ನು ಭಾಗಿಸುತ್ತದೆ.

ಸಾಧನೆ : $c|ab$ ಮತ್ತು $(c, a) = 1$ ಎಂದು ಕೊಟ್ಟಿದೆ.

ಆದ್ದರಿಂದ $sc + ta = 1$ ಆಗುವಂತೆ Z ನಲ್ಲಿ s, t ಎಂಬ ಧಾತುಗಳಿವೆ.

ಆದ್ದರಿಂದ, $(sc + ts)b = b$

$\Rightarrow scb + tab = b$

$c|ab$ ಆದ್ದರಿಂದ $ab = kc$ ಆಗುವಂತೆ Z ನಲ್ಲಿ k ಎಂಬ ಧಾತುವಿದೆ.

ಹಾಗಾಗಿ, $b = (sb)c + (tk) . c = (sb + tk)\, c$ ಅಂದರೆ, $c|b$

ಉಪಪ್ರಮೇಯ : $p|\, ab$ ಮತ್ತು p ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆಯಾದರೆ, $p\,|\,a$ ಅಥವಾ $p\,|\,b$.

ಸಾಧನೆ : $p \nmid a$ ಆದರೆ $(p, a) = 1$ ಆದ್ದರಿಂದ ಹಿಂದಿನ ಪ್ರಮೇಯದಂತೆ $p\,|\,b$

8.5.2 ಸಂಯುಕ್ತ (ಅಥವಾ ವಿಭಾಜ್ಯ)ಸಂಖ್ಯೆಗಳು

ಯಾವುದೇ ಪೂರ್ಣಾಂಕವು ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆಯಲ್ಲದಿದ್ದರೆ ಅದನ್ನು ಸಂಯುಕ್ತ (ಅಥವಾ ವಿಭಾಜ್ಯ)ಸಂಖ್ಯೆ ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ. ಉದಾಹರಣೆಗೆ, 6, 9, 10, 15 ಸಂಯುಕ್ತ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು. cಯು ಒಂದು ಸಂಯುಕ್ತ ಸಂಖ್ಯೆಯಾದರೆ $c = a \, . \, b$, $a < c$, $b < c$ ಎಂದು ಬರೆಯಬಹುದು. ಈ ಅಪವರ್ತನ ಕ್ರಿಯೆಯನ್ನು ಮುಂದುವರಿಸುತ್ತ ಹೋದರೆ ಯಾವುದೇ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು (ಧನಪೂರ್ಣಾಂಕವನ್ನು) ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧವಾಗಿ ಬರೆಯಬಹುದು. ಈ ಪ್ರಕ್ರಿಯೆಯಿಂದ ಬರುವ ಅಪವರ್ತನಗಳು ಆ ಗುಣಲಬ್ಧದಲ್ಲಿ ಬರೆಯುವ ಕ್ರಮವನ್ನು ಬಿಟ್ಟರೆ ಏಕೈಕವಾಗಿರುತ್ತವೆ. ಈ ಪ್ರಮೇಯದ ಸಾಧನೆಯನ್ನು ಈ ಮಟ್ಟದಲ್ಲಿ ನಾವು ಕೊಡಲಪೇಕ್ಷಿಸುವುದಿಲ್ಲವಾದರೂ ಅದರ ಸತ್ಯತೆಯನ್ನು ಗಮನದಲ್ಲಿಟ್ಟುಕೊಳ್ಳುತ್ತೇವೆ.

8.5.3. ಸಂಯುಕ್ತ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಘಾತ ಅಪವರ್ತನೀಕರಣ

ಒಂದು ಸಂಯುಕ್ತ ಸಂಖ್ಯೆ aಯನ್ನು ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧವಾಗಿ ಬರೆಯುವಾಗ, ಆ ಅಪವರ್ತನಗಳಲ್ಲಿ ಕೆಲವು ಪುನರಾವರ್ತನೆ ಹೊಂದಿರಬಹುದು.

ಈಗ, a ಎಂಬ ಸಂಯುಕ್ತ ಸಂಖ್ಯೆಯು p_1, $p_2, \ldots\ldots, p_k$ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಅಪವರ್ತನಗಳನ್ನಾಗಿ ಹೊಂದಿದ್ದು, ಅವುಗಳು ಪ್ರತ್ಯೇಕವಾಗಿ $a_1, a_2, \ldots, a_k$ ಸಲ ಪುನರಾವರ್ತನ ಹೊಂದಿರಲಿ. ಆಗ ಸಂಯುಕ್ತ ಸಂಖ್ಯೆ a ಯ ಮಾದರಿ ಸಂವಿಭಜನೆಯ ರೂಪ:

$$a = p_1^{a_1} . p_2^{a_2} \ldots . p_k^{a_k}$$

ಇಲ್ಲಿ, $p_1 < p_2 < p_3 < \ldots, < p_k$.

ಉದಾಹರಣೆ :

(i) $1872 = 2^4 . 3^2 . 13^1$

(ii) $30400 = 4^3 . 5^2 . 19^1$

8.5.4. ದತ್ತ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಧನಾತ್ಮಕ ಭಾಜಕಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ

a ಎಂಬುದು ಒಂದು ದತ್ತ ಪೂರ್ಣಾಂಕವಾಗಿರಲ್ಲಿ. ಈ ಪೂರ್ಣಾಂಕದ ಧನಾತ್ಮಕ ಭಾಜಕಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು $T(a)$ ಎಂಬ ಉತ್ಪನ್ನವಾಗಿ ಸೂಚಿಸೋಣ.

$$a = p_1^{a_1} . p_2^{a_2} \ldots . p_n^{a_n}$$

ಎಂಬುದು a ಯ ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಅಪವರ್ತನಗಳ ಮಾದರಿ ಸಂವಿಭಜನೆಯಾಗಿರಲಿ.

ಆಗ, aಯ ಯಾವುದೇ ಭಾಜಕ ಸಂಖ್ಯೆ d ಯು

$$d = p_1^{m_1} . p_2^{m_2} , p_3^{m_3} \ldots . p_n^{m_n}$$

ಎಂಬ ರೂಪದಲ್ಲಿರುತ್ತದೆ.

ಇಲ್ಲಿ, ಪ್ರತಿಯೊಂದು $i = 1, 2, \ldots.., n$ಗೂ $0 \leq m_i \leq a_i$ ಆಗಿರುತ್ತದೆ.

ಆದ್ದರಿಂದ, ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಸಂಖ್ಯೆ m_i ಗೂ $(a_i + 1)$ ಸಾಧ್ಯತೆಗಳಿರುತ್ತವೆ. ಹೀಗಾದ್ದರಿಂದ, a ಸಂಖ್ಯೆಯ (d ಅಂತಹ) ಭಾಜಕಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯು $(m_1, m_2, \ldots.., m_n)$ ಗಣದ ವಿಭಿನ್ನ ಆಯ್ಕೆಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಗೆ ಸಮನಾಗಿರುತ್ತದೆ. ಈ ಆಯ್ಕೆಗಳು ಮೇಲೆ ಹೇಳಿದ ನಿರ್ಬಂಧಗಳಿಗೆ ಒಳಗಾಗಿರುತ್ತದೆ. ಅಂತಹ ಆಯ್ಕೆಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ

$$(1 + a_1)\ (1 + a_2)\ (1 + a_3) \ldots .(1 + a_n)$$

ಆಗಿರುತ್ತದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ

$$T(a) = (1 + a_1)\ (1 + a_2)\ (1 + a_3) \ldots .(1 + a_n)$$

ಉದಾಹರಣೆ : $768 = 2^8 . 3^1 \quad \therefore \quad T(768) = (1 + 8)(1 + 1) = 18.$

8.5.5 ಸಂಖ್ಯೆಯೊಂದರ ಎಲ್ಲ ಧನಾತ್ಮಕ ಭಾಜಕಗಳ ಮೊತ್ತ

ಒಂದು ದತ್ತ ಪೂರ್ಣಾಂಕ ಸಂಖ್ಯೆ aಯ ಎಲ್ಲ ಧನಾತ್ಮಕ ಭಾಜಕಗಳ ಮೊತ್ತವನ್ನು $S(a)$ ಎಂದು ಸೂಚಿಸೋಣ.

aಯ ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಅಪವರ್ತನಗಳ ಮಾದರಿ ಸಂವಿಭಜನೆಯು

$$a = p_1^{a_1} . p_2^{a_2} \ldots . p_n^{a_n}$$

ಆಗಿರಲಿ, ಆಗ

$$S(a) = \left[\frac{p_1^{a_1+1}}{p_1 - 1}\right] \left[\frac{p_2^{a_2+1}}{p_2 - 1}\right] \ldots\ldots \left[\frac{p_n^{a_n+1}}{p_n - 1}\right]$$

ಎಂಬ ಸೂತ್ರವನ್ನು ಸಾಧಿಸಬಹುದು. (ಇಲ್ಲಿ ಆ ಸಾಧನೆಯನ್ನು ಒದಗಿಸಿಲ್ಲ)

ಉದಾಹರಣೆ : $960 = 2^6 . 3^1 . 5^1$

$$\therefore \; S(960) = \frac{2^7 - 1}{2 - 1} \cdot \frac{3^2 - 1}{3 - 1} \cdot \frac{5^2 - 1}{5 - 1} = 3048.$$

ಪ್ರಮೇಯ 1: ಒಂದಕ್ಕಿಂತ ಹೆಚ್ಚಿನ ಪೂರ್ಣಾಂಕದ ಒಂದಕ್ಕಿಂತ ಹೆಚ್ಚಿನ ಕನಿಷ್ಠ ಭಾಜಕವು ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆ ಆಗಿರುತ್ತದೆ.

ಸಾಧನೆ : ಯಾವುದೇ ಒಂದು ಧನ ಪೂರ್ಣಾಂಕ ಸಂಖ್ಯೆ a ದತ್ತ ಸಂಖ್ಯೆ ಆಗಿರಲಿ ಮತ್ತು ಅದರ ಕನಿಷ್ಠ ಧನ ಭಾಜಕವು k ಆಗಿರಲಿ. ಅಂದರೆ, $1 < k < a$ ಆಗಿರುತ್ತದೆ.

ಸಾಧ್ಯವಿದ್ದರೆ k ಒಂದು ಸಂಯುಕ್ತ ಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಿರಲಿ. ಅಂದರೆ, k ಸಂಖ್ಯೆಯು 1 ಮತ್ತು k ಅಲ್ಲದೆ ಇನ್ನೊಂದು ಭಾಜಕವನ್ನು ಹೊಂದಿದೆ; ಅದು x ಆಗಿರಲಿ. ಆದ್ದರಿಂದ

$$1 < x < k$$

ಈಗ, $x \mid k$ ಮತ್ತು $k \mid a$ $\quad \therefore \; x \mid a$

ಅಂದರೆ, k ಗಿಂತ ಕಡಿಮೆ ಇರುವ x ಸಂಖ್ಯೆಯು a ಯ ಭಾಜಕವಾಗುತ್ತದೆ. ಆದರೆ, kಯು a ಸಂಖ್ಯೆಯ ಕನಿಷ್ಠ ಭಾಜಕವಾಗಿದೆ ಎಂಬ ಮೊದಲಿನ ಹೇಳಿಕೆಯನ್ನು ಇದು ವಿರೋಧಿಸುತ್ತದೆ.

ಆದ್ದರಿಂದ, k ಒಂದು ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಿದೆ.

ಪ್ರಮೇಯ 2 : ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಅನಂತ.

ಸಾಧನೆ : ಸಾಧ್ಯವಿದ್ದರೆ, p ಎಂಬುದು ಗರಿಷ್ಠ ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆ ಆಗಿರಲಿ. ಅಂದರೆ p ಗಿಂತ ಹೆಚ್ಚಿನ ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆಯು ಇಲ್ಲ. ಈಗ

$$N = 1 + (2 . 3 . 5 . 7 \ldots . p)$$

ಅಂದರೆ, p ಗಿಂತ ಕಡಿಮೆ ಇರುವ ಎಲ್ಲಾ ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧಕ್ಕಿಂತ 1 ಹೆಚ್ಚು.

ಈಗ, N ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು $2, 3, 5, ..., p$ ಗಳ ಪೈಕಿ ಯಾವ ಸಂಖ್ಯೆಯಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದರೂ ಶೇಷ 1 ಉಳಿಯುತ್ತದೆ.

ಆದ್ದರಿಂದ, $2, 3, 5 ...., p$ ಗಳಲ್ಲಿ ಯಾವುದೂ N ಸಂಖ್ಯೆಯ ಭಾಜಕವಲ್ಲ.

ಈಗ, N ಎಂಬುದು (i) ಒಂದು ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆ ಅಥವಾ (ii) ಒಂದು ಸಂಯುಕ್ತ ಸಂಖ್ಯೆ ಆಗಿರಬಹುದು.

(i) N ಒಂದು ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಿದ್ದರೆ, ಆಗ $N > p$. ಅಂದರೆ, ಗರಿಷ್ಠ ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆ p ಗಿಂತ ಹೆಚ್ಚಿನ ಒಂದು ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆ N ಇದೆ.

(ii) N ಒಂದು ಸಂಯುಕ್ತ ಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಿದ್ದರೆ, ಆಗ $2, 3, 5 ...., p$ ಗಳಿಗಿಂತ ಬೇರೆಯಾದ ಒಂದು ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆ q ಎಂಬುದು N ಸಂಖ್ಯೆಯ ಭಾಜಕವಾಗಿರಬೇಕು. ಇಲ್ಲಿ $q > p$ ಎಂಬುದು ಸ್ಪಷ್ಟವಾಗಿದೆ. ಅಂದರೆ, ಗರಿಷ್ಠವೆಂದು ಊಹಿಸಲಾದ ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆ p ಗಿಂತ ಹೆಚ್ಚಿನ ಒಂದು ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆ ಇದೆ.

ಹೀಗೆ, ಮೇಲಿನ ಎರಡು ಸಂದರ್ಭಗಳಲ್ಲೂ p ಯು ಗರಿಷ್ಠ ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆ ಎಂಬ ಹೇಳಿಕೆಗೆ ವಿರೋಧ ಉಂಟಾಗುತ್ತದೆ.

ಆದ್ದರಿಂದ, ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಅನಂತ.

ಪ್ರಮೇಯ 3 : $ax + by = 1$ ಆಗಿರುವಂತೆ x ಮತ್ತು y ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳಿದ್ದರೆ, ಆಗ $(a, b) = 1$.

(ಅಂದರೆ, a, b, x, y ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳು $ax + by = 1$ ಸಮೀಕರಣವು ಸರಿ ಹೊಂದುವಂತಿದ್ದರೆ, ಆಗ a ಮತ್ತು b ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಸಾಪೇಕ್ಷ ಅವಿಭಾಜ್ಯಗಳಾಗಿರುತ್ತವೆ.)

ಸಾಧನೆ : ಸಾಧ್ಯವಿದ್ದರೆ, $(a, b) = d \neq 1$ ಆಗಿರಲಿ. ಈಗ, $d | a$ ಮತ್ತು $d | b$ ಆಗಿರುವುದರಿಂದ

$d | ax$ ಮತ್ತು $d | by$

$\therefore \; d | (ax + by)$

ಆದರೆ $ax + by = 1$

$\therefore \; d | 1$

ಆದರೆ, $d > 1$ ಆಗಿರುವುದರಿಂದ $d | 1$ ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲ, ಆದ್ದರಿಂದ ಉಂಟಾಗಿರುವ ವಿರೋಧದಿಂದಾಗಿ $(a, b) = 1$

ಪ್ರಮೇಯ 4: $(a, b) = 1$ ಮತ್ತು $(a, c) = 1$ ಆಗಿದ್ದರೆ, ಆಗ $(a, bc) = 1$.

ಸಾಧನೆ : $(a, b) = 1$ ಆಗಿರುವುದರಿಂದ

$$1 = ax + by \quad \dots \quad (1)$$

ಸಮೀಕರಣ ಸರಿಹೊಂದುವಂತೆ x ಮತ್ತು y ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳು ಇರುತ್ತವೆ. ಅಂತೆಯೇ

$$(a, b) = 1 \Rightarrow 1 = am + cn \quad \text{... (2)}$$

ಆಗುವಂತೆ m ಮತ್ತು n ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳು ಇರುತ್ತವೆ.

$$\therefore\ (ax + by)(am + cn) = 1$$

ಅಥವಾ $a^2mx + ax \cdot cn + by \cdot am + bcny = 1$

ಅಥವಾ $(amx + cnx + bmy)\, a + (ny)\, bc = 1$

ಅಥವಾ $p(a) + q(bc) = 1 \quad \text{...(3)}$

ಇಲ್ಲಿ, $p = amx + cnx + bmy$, ಮತ್ತು $q = ny$

ಫಲಿತಾಂಶ (3)ಕ್ಕೆ ಪ್ರಮೇಯ 3ನ್ನು ಅನ್ವಯಿಸುವುದರಿಂದ $(a, bc) = 1$ ಅಂದರೆ, ಮತ್ತು bc ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಸಾಪೇಕ್ಷ ಅವಿಭಾಜ್ಯಗಳೆಂದು ಸಾಧಿಸಿದಂತಾಯಿತು.

ಪ್ರಮೇಯ 5 : ಒಂದು ಸಂಯುಕ್ತ ಸಂಖ್ಯೆ a ಯ ಕನಿಷ್ಠ ಧನ ಭಾಜಕವು $\sqrt{a}$ ಅನ್ ಮೀರುವುದಿಲ್ಲ.

ಸಾಧನೆ : a ಎಂಬ ಸಂಯುಕ್ತ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಕನಿಷ್ಠ ಧನಾತ್ಮಕ ಭಾಜಕವು p ಆಗಿರಲಿ.

$$\therefore\ a = kp,\ (1 < p \le k)$$

ಈಗ, $p \le k$ ಎಂಬುದನ್ನು ಪರಿಗಣಿಸಿ.

ಮೇಲಿನ ಅಸಮೀಕರಣದ ಎರಡು ಕಡೆಗಳನ್ನು p ಇಂದ ಗುಣಿಸಿದಾಗ

$$p^2 \le kp$$

ಅಥವಾ $p^2 \le a \quad (\because\ a = kp)$

ಅಥವಾ $p^2 \le \sqrt{a}$

ಎಂದಾಗುತ್ತದೆ. ಅಂದರೆ, p ಯು $\sqrt{a}$ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಮೀರುವುದಿಲ್ಲ.

8.6 ಸಮಶೇಷೀಯತೆಗಳು

ವ್ಯಾಖ್ಯೆ : a ಮತ್ತು b ಯಾವುದೇ ಎರಡು ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳಾಗಿರಲಿ. m ಎಂಬುದು ಒಂ ಸ್ಥಿರ ಧನ ಪೂರ್ಣಾಂಕವಾಗಿರಲಿ. ಆಗ, $(a - b)$ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು m ಸಂಖ್ಯೆಯು ನಿಃಶೇಷವ ಭಾಗಿಸಿದರೆ (ಅಂದರೆ, $m \mid a - b$ ಆದರೆ)

$$a \equiv b (\text{mod} m)$$

(ಓದುವ ಕ್ರಮ : "a ಕಾಂಗ್ರುಯೆಂಟ್ ಮಾಡ್ಯುಲೊ m") ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ. ಆದ್ದರಿಂದ

$$a \equiv b\ (\text{mod} m) \text{ ಮತ್ತು } m \mid a - b$$

ಎಂಬ ಎರಡು ಹೇಳಿಕೆಗಳೂ ಸಮಾನವಾಗಿವೆ.

$a \equiv b(\text{mod}m)$ ಆಗಿದ್ದರೆ, ಅಂದರೆ $m \mid (a-b)$ ಆಗಿದ್ದರೆ, ಆಗ

$a-b = km$ ಅಥವಾ $a = b+km$

(ಇಲ್ಲಿ k ಒಂದು ಪೂರ್ಣಾಂಕ) ಎಂದು ಬರೆಯಬಹುದು.

$a \equiv b(\text{mod}m)$ ಆಗಿಲ್ಲದಿದ್ದರೆ, ಆಗ

$a \neq b(\text{mod}m)$ ಅಂದರೆ, $m \nmid (a-b)$ ಎಂದು ಬರೆಯುತ್ತೇವೆ.

ಉದಾಹರಣೆಗಳು

(i) $16 \equiv 4 \,(\text{mod}3) \because 3 \mid 16-4$

(ii) $21 \equiv -4 \,(\text{mod}5) \because 5 \mid 21-(-4)$

(iii) $15 \not\equiv 3 \,(\text{mod}7) \because 7 \nmid 15-3$

8.7 ಸಮಶೇಷೀಯತೆಗಳ ಗುಣಗಳು

ಪ್ರಮೇಯ 1 : ಸಮಶೇಷೀಯತೆಯು ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳ ಗಣದ ಮೇಲೆ ಒಂದು ಸಮಾನತೆಯ ಸಂಬಂಧವಾಗಿದೆ.

ಸಾಧನೆ : ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳ ಗಣ Zಮೇಲೆ "$\equiv (\text{mod}m)$" ಎಂಬ ಸಮಶೇಷೀಯತೆಯನ್ನು ಪರಿಗಣಿಸಿ. ಇಲ್ಲಿ mಎಂಬುದು ಒಂದು ಧನಾತ್ಮಕ ಸ್ಥಿರ ಪೂರ್ಣಾಂಕ. ಸಮಶೇಷೀಯತೆಯು ಒಂದು 'ಸಮಾನತೆಯ ಸಂಬಂಧ' ಎಂದು ಸಾಧಿಸಬೇಕಾದರೆ ಆ ಸಂಬಂಧವು (i) ಆತ್ಮಾವರ್ತಕ (ರಿಫ್ಲೆಕ್ಸೀವ್) (ii) ಸಮಮಿತೀಯ (ಸಿಮೆಟ್ರಿಕ್) ಮತ್ತು (ii) ಪ್ರವಹನೀಯ (ಟ್ರಾನ್ಸಿಟಿವ್) ಎಂದು ತೋರಿಸಬೇಕಾಗುತ್ತದೆ.

(i) ಆತ್ಮಾವರ್ತಕ : $a \in Z$ ಆಗಿರಲಿ.

$m \mid 0$ ಅಥವಾ $m \mid a-a$ ಎಂಬುದು ಸ್ಪಷ್ಟವಾಗಿದೆ.

$\therefore\ a \equiv a\,(\text{mod}m)$

ಅಂದರೆ, "$\equiv (\text{mod}m)$" ಎಂಬುದು ಆತ್ಮಾವರ್ತಕ ಸಂಬಂಧವಾಗಿದೆ.

(ii) ಸಮಮಿತೀಯ : $a, b \in Z$ ಆಗಿರಲಿ.

ಆಗ $a \equiv b(\text{mod}m) \Rightarrow m \mid a-b$

$\therefore\ m \mid -(a-b)$

ಅಥವಾ $m \mid -a+b$

ಅಥವಾ $m \mid b-a$

ಅಂದರೆ, $b \equiv a\,(\text{mod}m)$

ಆದ್ದರಿಂದ, "$\equiv (\text{mod} m)$" ಎಂಬುದು ಸಮಮಿತೀಯ ಸಂಬಂಧವಾಗಿದೆ.

(iii) ಪ್ರವಹನೀಯ : $a, b, c \in Z$ ಆಗಿರಲಿ.

ಈಗ, $a \equiv b(\text{mod} m)$ ಮತ್ತು $b \equiv c(\text{mod} m)$ ಆಗಿರಲಿ.

$\therefore\ m | a-b$ ಮತ್ತು $m | b-c$

ಆಗಿರುತ್ತದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ

$m | (a-b)+(b+c)$

ಅಥವಾ $m | a-c$

ಅಂದರೆ, $a \equiv c(\text{mod} m)$ ಆಗುತ್ತದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ "$\equiv (\text{mod} m)$" ಎಂಬುದು ಪ್ರವಹನೀಯ ಸಂಬಂಧವಾಗಿದೆ.

ಈಗ, (i),(ii),(iii)ಗಳಿಂದ ಸಮಶೇಷೀಯತೆಯು ಒಂದು **ಸಮಾನತೆಯ ಸಂಬಂಧ** ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿದಂತಾಯಿತು.

ಪ್ರಮೇಯ 2 : $a \equiv b(\text{mod}\ m)$ ಆಗಿದ್ದರೆ, ಆಗ

$a \pm x \equiv b \pm x(\text{mod}\ m)$

ಮತ್ತು $ax \equiv bx(\text{mod}\ m)$

ಸಾಧನೆ : ಈಗ, $a \equiv b(\text{mod} m)$ ಎಂದು ಕೊಟ್ಟಿದೆ.

ಅಂದರೆ, $m | a-b$ ...(1)

(i) ಮೇಲಿನ ಫಲಿತಾಂಶ (1)ರ ಬಲಗಡೆಯಲ್ಲಿ x ನ್ನು ಕೂಡಿ ಕಳೆಯುವುದರಿಂದ

$m | a+x-b-x$

ಅಥವಾ $m | (a+x)-(b+x)$

ಅಥವಾ $a+x \equiv b+x(\text{mod} m)$

ಹಾಗೆಯೇ, ಬಲಗಡೆಯಲ್ಲಿ x ನ್ನು ಕಳೆದು ಕೂಡುವುದರಿಂದ

$m | a-x-b+x$

ಅಥವಾ $m | (a-x)-(b-x)$

ಅಥವಾ $a-x \equiv b-x(\text{mod} m)$ ಎಂದು ಸಿದ್ಧವಾಗುತ್ತದೆ.

(ii) ಫಲಿತಾಂಶ (1) ರಿಂದ

$m | (a-b)$

$\therefore\ m | (a-b)\,x$

ಅಥವಾ $m | ax-bx$

ಅಂದರೆ, $ax \equiv bx(\text{mod} m)$

ಪ್ರಮೇಯ 3 : (ನಿರಸನ ನಿಯಮ)

c ಮತ್ತು m ಸಾಪೇಕ್ಷ ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾಗಿದ್ದು $ca \equiv cb \pmod{m}$ ಆಗಿದ್ದರೆ, ಆಗ $a \equiv b \pmod{m}$.

ಸಾಧನೆ : c ಮತ್ತು m ಸಾಪೇಕ್ಷ ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾಗಿವೆ.

ಅಂದರೆ, $(c, m) \equiv 1 \therefore m \nmid c$ ... (1)

ಈಗ, $ca \equiv cb \pmod{m}$ ಆಗಿದ್ದರೆ

$m \mid ca - cb$ ಅಥವಾ $m \mid c(a-b)$

ಆದ್ದರಿಂದ, $m \mid (a-b)$ [$\because m \nmid c$, (1) ರಿಂದ]

ಅಥವಾ $a \equiv b \pmod{m}$.

ಪ್ರಮೇಯ 4: $a \equiv b \pmod{m}$ ಆಗಿದ್ದು n ಎಂಬುದು m ನ ಒಂದು ಧನ ಭಾಜಕವಾಗಿದ್ದರೆ, ಆಗ $a \equiv b \pmod{m}$.

ಸಾಧನೆ : $a \equiv b \pmod{m}$ ಆಗಿರುವುದರಿಂದ $m \mid a-b$

ಈಗ, $n \mid m$ ಎಂದು ಕೊಟ್ಟಿದೆ.

$n \mid m$ ಮತ್ತು $m \mid a-b$

ಆಗಿರುವುದರಿಂದ ಪ್ರವಹನ ನಿಯಮದ ಪ್ರಕಾರ

$n \mid a-b$

ಅಂದರೆ, $a \equiv b \pmod{m}$.

ಪ್ರಮೇಯ 5 : $a \equiv b \pmod{m}$ ಆಗಿದ್ದರೆ ಮತ್ತು ಆಗಬೇಕಾಗಿದ್ದರೆ a ಮತ್ತು b ಗಳು m ನಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದಾಗ ಸಮಾನವಾದ ಶೇಷವನ್ನು ಬಿಡುತ್ತವೆ.

ಸಾಧನೆ :

(i) ಮೊದಲಿಗೆ, $a \equiv b \pmod{m}$ ಆಗಿದ್ದರೆ a ಮತ್ತು b ಗಳನ್ನು m ನಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದಾಗ ಒಂದೇ ಶೇಷವು ಉಳಿಯುತ್ತದೆ ಎಂದು ಸಾಧಿಸೋಣ.

$a \equiv b \pmod{m} \quad \therefore \ m \mid a-b$

ಅಂದರೆ, $a - b = mk \quad (k \in Z)$

ಅಥವಾ $a = b + mk$

ಈಗ, b ಯನ್ನು m ನಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದಾಗ q ಭಾಗಲಬ್ಧವಾಗಿಯೂ ಮತ್ತು $r\,(>0)$ ಶೇಷವಾಗಿಯೂ ಇರಲಿ. ಆಗ

$b = mq + r$

ಆದ್ದರಿಂದ, $a = b + mk = (mq + r) + mk$

ಅಥವಾ $a = m(q + k) + r$

ಅಥವಾ $a = ms + r$

(ಇಲ್ಲಿ, $s = q + k$ ಒಂದು ಪೂರ್ಣಾಂಕವಾಗಿದೆ.)

ಅಂದರೆ, a ಯನ್ನು m ನಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದಾಗ ಶೇಷವು r ಆಗಿರುತ್ತದೆ.

ಹೀಗೆ, a ಮತ್ತು b ಎರಡು ಸಂಖ್ಯೆಗಳೂ m ನಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದಾಗ ಒಂದೇ ಶೇಷವನ್ನು (r) ಬಿಡುತ್ತವೆ.

(ii) ಈಗ, a ಮತ್ತು b ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು m ನಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದಾಗ ಒಂದೇ ಶೇಷವು ಉಳಿದರೆ, ಆಗ $a \equiv b \pmod{m}$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸುತ್ತೇವೆ.

a ಮತ್ತು b ಗಳನ್ನು m ನಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದಾಗ, ಅವೆರಡೂ r ಎಂಬ ಶೇಷವನ್ನು ಬಿಡುತ್ತವೆ ಎಂದು ಇಟ್ಟುಕೊಳ್ಳೋಣ. ಅಂದರೆ

$a = mq_1 + r$ ಮತ್ತು $b = mq_2 + r$

ಇಲ್ಲಿ, q_1 ಮತ್ತು q_2 ಗಳು ಭಾಗಲಬ್ಧಗಳು ಮತ್ತು $0 \leq r < m$

$\therefore\ a - b = mk$

ಇಲ್ಲಿ, $k = q_1 - q_2$ ಒಂದು ಪೂರ್ಣಾಂಕವಾಗಿದೆ.

ಆದ್ದರಿಂದ, $m \mid a - b$

ಅಥವಾ $a \equiv b \pmod{m}$

ಪ್ರಮೇಯ 6 : $a \equiv b \pmod{m}$ ಆಗಿದ್ದರೆ, ಆಗ $(a, m) = (b, m) = 1$
(ಅಂದರೆ, a, m ಹಾಗೂ b, m ಜೋಡಿ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಸಾಪೇಕ್ಷ ಅಭಾಜ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾಗಿರುತ್ತವೆ.)

ಸಾಧನೆ : b ಮತ್ತು m ಗಳ ಮ.ಸಾ.ಅ. d ಆಗಿರಲಿ.

ಅಂದರೆ $(b, m) = d$

ಆಗ $d \mid b$ ಮತ್ತು $d \mid m$

$a \equiv b \pmod{m}$ ಆಗಿರುವುದರಿಂದ, $m \mid a - b$

ಈಗ, $d \mid m$ ಮತ್ತು $m \mid a - b$ ಆಗಿರುವುದರಿಂದ $d \mid a - b$ (ಪ್ರವಹನ ನಿಯಮದಿಂದ)

ಹಾಗೆಯೇ, $d \mid b$ ಮತ್ತು $d \mid a - b$ ಆಗಿರುವುದರಿಂದ

$d \mid b + (a - b)$ ಅಥವಾ $d \mid a$

ಈಗ, $d \mid a$ ಮತ್ತು $d \mid m$ ಆಗಿರುವುದರಿಂದ, $d \mid (a, m)$

ಆದರೆ, $(a,m) = 1$

$\therefore d \mid 1 \quad \therefore d = 1$

ಆದ್ದರಿಂದ, $(b,m) = 1$.

8.8 ರೇಖೀಯ ಸಮಶೇಷೀಯತೆ

$ax \equiv b(\text{mod}\, m)$ ಎಂಬುದನ್ನು "x ನಲ್ಲಿ ರೇಖೀಯ ಸಮಶೇಷೀಯತೆ" ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ. ಇಲ್ಲಿ ಅವ್ಯಕ್ತವಾದ x ನ ಜಾಗದಲ್ಲಿ ಒಂದು ಪೂರ್ಣಾಂಕವನ್ನು ಆದೇಶಿಸಿದಾಗ ಸಮಶೇಷೀಯತೆಯು ಸರಿಹೊಂದಿದ ಪಕ್ಷದಲ್ಲಿ x ಎಂಬುದು ಆ ಸಮಶೇಷೀಯತೆಯ ಒಂದು ಮೂಲ ಅಥವಾ ಪರಿಹಾರ ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ.

ಉದಾಹರಣೆ :

(i) $3x \equiv 1(\text{mod}\,7)$ ಎಂಬ ಸಮಶೇಷೀಯತೆಯ ಒಂದು ಮೂಲ 5. ಅಂತೆಯೇ, $-2, 12, 19$ ಮುಂತಾದವುಗಳು ಕೂಡ ಮೂಲಗಳು.

(ii) $3x \equiv 1(\text{mod}\,5)$ ಸಮಶೇಷೀಯತೆಯ ಒಂದು ಮೂಲ 2.

(iii) $2x \equiv 4(\text{mod}\,6)$

ಸಮಶೇಷೀಯತೆಯು 2 ಮತ್ತು 5(ಮತ್ತು ಇತರ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು) ಮೂಲಗಳಾಗಿ ಹೊಂದಿದೆ.

ಉದಾಹರಣೆಗಳು

1. ಇವುಗಳು ನಿಜವೆ?

(i) $100 \equiv 2(\text{mod}\,4)$ (ii) $73 \equiv -7(\text{mod}\,5)$

(iii) $36 \equiv 12(\text{mod}\,5)$ (iv) $17 \equiv 3(\text{mod}\,7)$

(i) ಈಗ, $100 - 2 = 98$ ಮತ್ತು $4 \nmid 98$ ಆದ್ದರಿಂದ, $100 \not\equiv 2(\text{mod}\,4)$.

(ii) $73 - (-7) = 80$ ಮತ್ತು $5 \mid 80$.

ಆದ್ದರಿಂದ, $73 \equiv -7(\text{mod}\,5)$ ನಿಜವಾಗಿದೆ.

(iii) $36 - 12 = 24$ ಮತ್ತು $5 \nmid 24$

ಆದ್ದರಿಂದ, $36 \not\equiv 12(\text{mod}\,5)$

(iv) $17 - 3 = 14$ ಮತ್ತು $7 \mid 14$

ಆದ್ದರಿಂದ, $17 \equiv 3(\text{mod}\,7)$ ನಿಜವಾಗಿದೆ.

2. ಈ ಕೆಳಗಿನ ಸಮಶೇಷೀಯತೆಗಳನ್ನು ಸರಳಗೊಳಿಸಿ.

(i) $x-7 \equiv x+8 (\mathrm{mod}\, 5)$

(ii) $2x-5 \equiv 3-x (\mathrm{mod}\, 4)$

(i) $x-7 \equiv x+8 (\mathrm{mod}\, 5)$

$\therefore\ 5 \mid (x-7)-(x+8)$ ಅಥವಾ $5 \mid -15$

ಅಥವಾ $-15 \equiv 0 (\mathrm{mod}\, 5)$

(ii) $2x-5 \equiv 3-x (\mathrm{mod}\, 4)$

$\therefore\ 4 \mid (2x-5)-(3-x)$

ಅಥವಾ $4 \mid 3x-8$

ಅಥವಾ $3x \equiv 8 (\mathrm{mod}\, 4)$

3. ಈ ಕೆಳಕಂಡ ಸಮಶೇಷೀಯತೆಗಳ ಒಂದು ಮೂಲವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

(i) $2x-1 \equiv x+5 (\mathrm{mod}\, 6)$

(ii) $3x \equiv 5 (\mathrm{mod}\, 6)$

(iii) $4x \equiv 4 (\mathrm{mod}\, 3)$

(i) $2x-1 \equiv x+5 (\mathrm{mod}\, 6)$

$\therefore\ 6 \mid (2x-1) - (x+5)$

ಅಥವಾ $6 \mid x-6$

ವೀಕ್ಷಣೆಯಿಂದ, $x = 0$ ಎಂದು ಆದೇಶಿಸಿದರೆ

$6 \mid -6$

ಎಂಬುದು ನಿಜವಾಗಿದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ, $x = 0$ ಒಂದು ಮೂಲ.

(ii) $3x \equiv 5 (\mathrm{mod}\, 6)$

$\therefore\ 6 \mid 3x-5$

x ನ ಯಾವ ಪೂರ್ಣಾಂಕ ಬೆಲೆಗೂ ಮೇಲಿನ ಫಲಿತಾಂಶವು ಸರಿಹೊಂದುವುದಿಲ್ಲ, ಆದ್ದರಿಂದ ದತ್ತ ಸಮಶೇಷೀಯತೆಯು ಪರಿಹಾರವನ್ನು (ಅಥವಾ ಮೂಲವನ್ನು) ಹೊಂದಿಲ್ಲ,

(iii) $4x \equiv 4 (\mathrm{mod}\, 3)$

$\therefore\ 3 \mid 4x-4$, ಅಂದರೆ $4x-4 = 3k \ (k \in Z)$

$\therefore\ x = \dfrac{3k+4}{4}$

ಈಗ, $k = 0$ ಆದಾಗ, $x = 1$

ಹಾಗೆಯೇ, $k = 4$ ಆದಾಗ, $x = 4$

ಆದ್ದರಿಂದ, ಸಮಶೇಷೀಯತೆಯ ಅನೇಕ ಮೂಲಗಳ ಪೈಕಿ $x = 1$ ಮತ್ತು $x = 4$ ಎಂಬುವು ಎರಡು ಮೂಲಗಳಾಗಿವೆ.

4. 5^4 ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು 7 ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದಾಗ ಉಳಿಯುವ ಕನಿಷ್ಠ ಧನ ಶೇಷವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಈಗ, $5^4 = 5^2 \times 5^2$

$= 25 \times 25$

ಆದರೆ $25 \equiv 4 (\text{mod} 7)$ ಎಂಬುದು ಸ್ಪಷ್ಟವಾಗಿದೆ.

ಆದ್ದರಿಂದ, ಎರಡು ಕಡೆಗಳಲ್ಲೂ ವರ್ಗಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳುವುದರಿಂದ

$$5^4 \equiv 4^2 (\text{mod} 7)$$

ಅಂದರೆ, $5^4 \equiv 16 (\text{mod} 7)$

ಆದರೆ, $16 \equiv 2 (\text{mod} 7)$

$\therefore\ 5^4 \equiv 2 (\text{mod} 7)$

ಅಂದರೆ, 5^4ನ್ನು 7 ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದಾಗ ಉಳಿಯುವ ಕನಿಷ್ಠ ಧನ ಶೇಷವು 2 ಆಗಿದೆ.

5. 11^{132} ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ವಿಸ್ತರಿಸಿದಾಗ ಕೊನೆಯ ಅಂಕಿಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಈಗ, $11^{132} = (11^{2)66}$

ಆದರೆ, $11 \equiv 1 (\text{mod } 10)$ ಎಂಬುದು ಸ್ಪಷ್ಟವಾಗಿದೆ.

$\therefore\ 11^2 \equiv 1 (\text{mod } 10)$

ಆದ್ದರಿಂದ, $(11^2)^{66} = 1^{66} (\text{mod } 10)$

ಅಥವಾ $11^{132} = 1 (\text{mod } 10)$

ಅಂದರೆ, 11^{132} ಸಂಖ್ಯೆಯ ವಿಸ್ತರಣೆಯಲ್ಲಿ ಕೊನೆಯ ಅಂಕಿ 1 ಆಗಿದೆ.

ಅಭ್ಯಾಸ – 8

1. ಯುಕ್ಲಿಡ್‌ನ ಭಾಜನವಿಧಿಯನ್ನು ಬಳಸಿ $a = 210$ ಮತ್ತು $b = 55$ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮ.ಸಾ.ಅ. ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ ಹಾಗೂ ಅದನ್ನು x ಮತ್ತು y ಎಂಬ ಸೂಕ್ತ ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳು ಸರಿಹೊಂದುವಂತೆ $xa + yb$ ರೂಪದಲ್ಲಿ ನಿರೂಪಿಸಿ.

2. 963 ಮತ್ತು 657 ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮ.ಸಾ.ಅ.ವನ್ನು $963x + 657y$ ಮಾದರಿಯಲ್ಲಿ ನಿರೂಪಿಸಿ. ಈ ನಿರೂಪಣೆಯು ಏಕೈಕವಲ್ಲ ಎಂದು $ax_1 + by_1$ ಎಂಬ ಇನ್ನೊಂದು ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ನಿರೂಪಿಸಿ ಸಾಧಿಸಿ.

3. ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಮತ್ತು ಸಂಯುಕ್ತ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ವ್ಯಾಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಕೊಡಿ. ಶೂನ್ಯವು (0) ಒಂದು ಸಂಯುಕ್ತ ಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಿದೆಯೆ?

4. a ಮತ್ತು b ಎಂಬ ಎರಡು ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳನ್ನು ಯಾವಾಗ ಸಾಪೇಕ್ಷ ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ? ಈ ಕೆಳಕಂಡ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಜೋಡಿಗಳು ಸಾಪೇಕ್ಷ ಅವಿಭಾಜ್ಯವಾಗಿವೆಯೇ ಎಂದು ಪರೀಕ್ಷಿಸಿ.

   (i) 10, 49 (ii) 18, 15 (iii) 220, 229

5. ಈ ಕೆಳಕಂಡ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿಗೆ $T(a)$ ಮತ್ತು $S(a)$ಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

   (i) $a = 1024$ (ii) $a = 1025$ (iii) $a = 1026$

6. ಈ ಕೆಳಕಂಡ ಸಮಶೇಷೀಯತೆಗಳು ಸರಿಹೊಂದುವ x ನ ಒಂದು ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

   (a) $2x \equiv 3 (\text{mod} 3)$ (b) $2x + 1 \equiv x + 5 (\text{mod} 6)$ (c) $5x \equiv 4 (\text{mod } 13)$
   (d) $3(x + 1) \equiv (x + 3)(\text{mod} 4)$ (e) $4x + 3 \equiv 1 (\text{mod} 8)$

7. ಈ ಕೆಳಕಂಡ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಸೂಚಿತ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದಾಗ ಉಳಿಯುವ ಕನಿಷ್ಠ ಅನೃಣ (ಶೂನ್ಯ ಅಥವಾ ಧನಾತ್ಮಕ) ಶೇಷಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ದತ್ತ ಸಂಖ್ಯೆ	ಭಾಜಕ
(a) $64 \times 65 \times 66$	67
(b) $135 \times 146 \times 73$	7
(c) 35×76	9
(d) $36 \times 35 \times 33$	37

8. ಈ ಕೆಳಕಂಡ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಕೊನೆಯ ಅಂಕಿಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

   (a) 7^{100} (b) 3^{15} (c) 13^{37} (d) 3^{200}

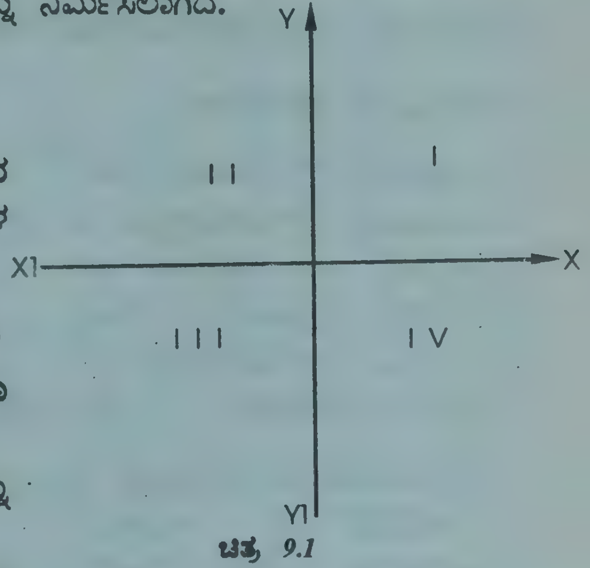
ಅಧ್ಯಾಯ 9

ನಿರ್ದೇಶಕ ರೇಖಾಗಣಿತ

ಹದಿನಾರನೆಯ ಶತಮಾನಕ್ಕೂ ಮೊದಲು ಬೀಜಗಣಿತ ಮತ್ತು ರೇಖಾಗಣಿತವನ್ನು ಪ್ರತ್ಯೇಕವಾಗಿಯೇ ಅಭ್ಯಸಿಸಲಾಗುತ್ತಿತ್ತು. ನಂತರದಲ್ಲಿ ಗಣಿತ ಶಾಸ್ತ್ರಜ್ಞರಾದ ರೇನೆ ಡೆಕಾರ್ಟೆಯವರು ಈ ಎರಡು ವಿಷಯಗಳನ್ನು ಒಟ್ಟುಗೂಡಿಸಿ ಅಭ್ಯಾಸ ಮಾಡುವುದನ್ನು ಪರಿಚಯಿಸಿದರು. ಅಂದರೆ ಬೀಜಗಣಿತದ ವಿಧಾನಗಳಿಂದ ರೇಖಾಗಣಿತವನ್ನು ಅಭ್ಯಾಸ ಮಾಡುವುದು. ಇದನ್ನೇ ಬೀಜ ರೇಖಾಗಣಿತವೆಂದು ಹೆಸರಿಸಲಾಯಿತು. ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಬಿಂದುವಿಗೆ ಕ್ರಮಾನುಗತ ಒಂದು ಜೊತೆ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಜೋಡಣೆಯಿಂದ, ಬೀಜಗಣಿತ ಮತ್ತು ರೇಖಾಗಣಿತಗಳ ಹೊಂದಾಣಿಕೆಯನ್ನು ನಿರ್ಮಿಸಲಾಗಿದೆ.

9.1 ಲಂಬ ನಿರ್ದೇಶಕಗಳು :

ಯಾವುದೇ ಸಮತಲದಲ್ಲಿನ ಬಿಂದುವೊಂದರ ಸ್ಥಾನವನ್ನು ನಿರ್ಧರಿಸಲು ಲಂಬನಿರ್ದೇಶಕಗಳ ಪದ್ಧತಿಯು ಒಂದು ಸಾಧನ.



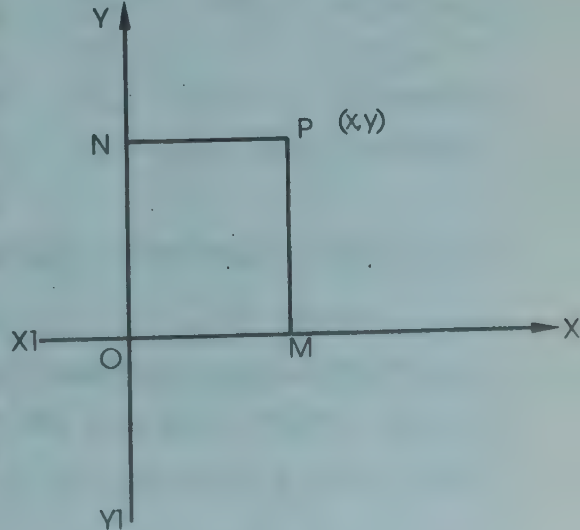
ಚಿತ್ರ 9.1

$XOX^{\prime}$ ಸರಳರೇಖೆಯನ್ನು x - **ಅಕ್ಷವೆಂದೂ,** $YOY^{\prime}$ ಸರಳರೇಖೆಯನ್ನು y - **ಅಕ್ಷವೆಂದೂ** ಕರೆಯಲಾಗುತ್ತದೆ.

ಈ ಅಕ್ಷರಗಳ ಛೇದನ ಬಿಂದು O - ಅನ್ನು **ಮೂಲಬಿಂದುವೆಂದು** ಕರೆಯಲಾಗುತ್ತದೆ.

ಈ ಎರಡು ಅಕ್ಷಗಳು ಒಂದು ಸಮತಲವನ್ನು ನಾಲ್ಕು ಭಾಗಗಳನ್ನಾಗಿ ವಿಭಜಿಸುತ್ತವೆ. XOY ಸಮತಲ ಭಾಗವನ್ನು I ಪಾದವೆಂದು, $YOX^{\prime}$ ಭಾಗವನ್ನು II ಪಾದವೆಂದು, $X^{\prime}OY^{\prime}$ ಭಾಗವನ್ನು III ಪಾದವೆಂದು ಮತ್ತು $Y^{\prime}OX$ ಸಮತಲ ಭಾಗವನ್ನು IV ಪಾದವೆಂದೂ ಕರೆಯಲಾಗುತ್ತದೆ.

P ಬಿಂದುವು I ಪಾದದಲ್ಲಿದೆಯೆಂದು ಪರಿಗಣಿಸಿ. P ಬಿಂದುವಿನಿಂದ PM ಮತ್ತು PN ಗಳನ್ನು ಲಂಬಗಳಾಗಿ x - ಅಕ್ಷಕ್ಕೂ y - ಅಕ್ಷಕ್ಕೂ ಕ್ರಮವಾಗಿ ಎಳೆಯಿರಿ. (ಚಿತ್ರ 9.2).



ಚಿತ್ರ 9.2

$PN=x$ ಅನ್ನು P ಬಿಂದುವಿನ **ಕೋಟಿಯೆಂದು**, $PM=y$ ಅನ್ನು P ಬಿಂದುವಿನ **ಭುಜವೆಂದು** ಕರೆಯಲಾಗುತ್ತದೆ. ಇವರೆಡನ್ನೂ ಜೊತೆಯಾಗಿ ಅಂದರೆ, (x, y) ಅನ್ನು P ಬಿಂದುವಿನ **ಲಂಬ ನಿರ್ದೇಶಕಗಳೆಂದು** ಕರೆಯಲಾಗುತ್ತದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ಸಮತಲದಲ್ಲಿನ ಯಾವುದೇ ಬಿಂದುವು ಒಂದು ಕ್ರಮಾನುಗತ ಜೋಡಿ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿಂದ ನಿರೂಪಿತವಾಗಿರುತ್ತದೆ.

ಕೋಟಿಯನ್ನು x- ನಿರ್ದೇಶಕವೆಂದೂ ಹಾಗೂ ಭುಜವನ್ನು y- ನಿರ್ದೇಶಕವೆಂದೂ ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ.

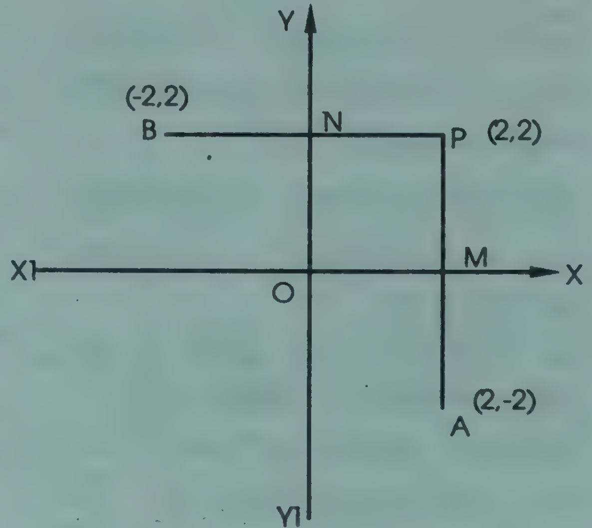
ಯಾವುದೇ ಬಿಂದುವನ್ನು y-ಅಕ್ಷದ ಬಲಭಾಗದಲ್ಲಿದ್ದರೆ **ಧನವಾಗಿಯೂ**, ಎಡಭಾಗದಲ್ಲಿದ್ದರೆ ಋಣವಾಗಿಯೂ ಪರಿಗಣಿಸಲಾಗುವುದು. ಹಾಗೆಯೇ, ಯಾವುದೇ ಬಿಂದುವನ್ನು x- ಅಕ್ಷದ ಮೇಲಿನ ಭಾಗದಲ್ಲಿದ್ದರೆ **ಧನವಾಗಿಯೂ**, ಕೆಳಭಾಗದಲ್ಲಿದ್ದರೆ **ಋಣವಾಗಿಯೂ** ಪರಿಗಣಿಸಲಾಗುವುದು.

ಸೂಚನೆ : x- ಅಕ್ಷದ ಮೇಲಿನ ಯಾವುದೇ ಬಿಂದುವಿನ ಭುಜವು ಮತ್ತು y- ಅಕ್ಷದ ಮೇಲಿನ ಯಾವುದೇ ಬಿಂದುವಿನ ಕೋಟಿಯೂ ಶೂನ್ಯವಾಗಿರುತ್ತದೆ.

ಬಿಂದುವಿನ ಪ್ರತಿಫಲನ

ಉದಾಹರಣೆಗೆ, $P(2,2)$ I ಪಾದದಲ್ಲಿರುವ ಬಿಂದುವಾದರೆ, IV ಪಾದದಲ್ಲಿರುವ A ಬಿಂದುವನ್ನು x - ಅಕ್ಷದಲ್ಲಿನ (P ಬಿಂದುವಿನ) ಪ್ರತಿಫಲನವೆಂದು ಮತ್ತು $PM = MA$ ಆಗಿರುವುದರಿಂದ A ಬಿಂದುವಿನ ನಿರ್ದೇಶಕಗಳು $(2, -2)$

II ಪಾದದಲ್ಲಿರುವ B ಬಿಂದುವನ್ನು y - ಅಕ್ಷದಲ್ಲಿನ (P ಬಿಂದುವಿನ) ಪ್ರತಿಫಲನವೆಂದು ಮತ್ತು $PN=BN$ ಆಗಿರುವುದರಿಂದ B ಬಿಂದುವಿನ ನಿರ್ದೇಶಕಗಳು $(-2,2)$ ಎಂದು ಪರಿಗಣಿಸಲಾಗುವುದು. (ಚಿತ್ರ 9.3)



ಚಿತ್ರ 9.3

9.2.1 ಎರಡು ಬಿಂದುಗಳ ನಡುವಿನ ದೂರ

$A(x_1, y_1)$ ಮತ್ತು $B(x_2, y_2)$ ಯಾವುದೇ ಎರಡು ಬಿಂದುಗಳಾಗಿರಲಿ. A ಮತ್ತು B ಬಿಂದುಗಳಿಂದ AM ಮತ್ತು BN ಗಳನ್ನು ಲಂಬಗಳಾಗಿ x-ಅಕ್ಷಕ್ಕೂ, AL ಅನ್ನು ಲಂಬವಾಗಿ BN ಗೂ ಎಳೆಯಿರಿ (ಚಿತ್ರ 9.4). ಈಗ, ABL ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಕೋನವಾದ್ದರಿಂದ, ಪೈಥಾಗೊರಸ್‌ನ ಪ್ರಮೇಯದಿಂದ $AB^2 = AL^2 + BL^2$ ಆಗಿರುತ್ತದೆ.

ಚಿತ್ರ 9.4

ಚಿತ್ರದ ಆಧಾರದಿಂದ , $AL = MN = ON - OM = x_2 - x_1$

ಮತ್ತು

$$BL = BN - LN = BN - AM = y_2 - y_1$$

ಆದ್ದರಿಂದ, $AB^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$

$$= (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2$$

$$\therefore \ AB = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

ಈ ಸೂತ್ರವನ್ನು ದೂರದ ಸೂತ್ರವೆಂದು ಕರೆಯಲಾಗುತ್ತದೆ.

ಸೂಚನೆ : ಮೂಲಬಿಂದುವಿನಿಂದ (x, y) ಬಿಂದುವಿನ ದೂರವು $\sqrt{x^2 + y^2}$ ಆಗಿರುತ್ತದೆ.

ಉದಾಹರಣೆಗಳು

1. (a, b) ಮತ್ತು (b, a)ಗಳಿಗಿರುವ ದೂರವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

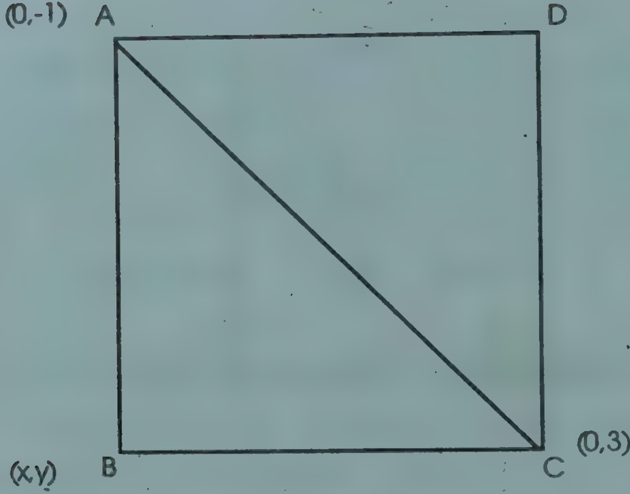
   $A \equiv (a, b)$ ಮತ್ತು $B \equiv (b, a)$ ಆಗಿರಲಿ. ಆಗ

   $$AB = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

   $$= \sqrt{(a-b)^2 + (b-a)^2} = \sqrt{2(a-b)^2} = \sqrt{2}(a-b)$$

2. $(0, -1)$ ಮತ್ತು $(0, 3)$ಗಳು ಚೌಕವೊಂದರ ಅಭಿಮುಖ ಶೃಂಗದ್ವಯಗಳಾದರೆ ಉಳಿದ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

   $ABCD$ ಎಂಬ ಚೌಕದಲ್ಲಿ



ಚಿತ್ರ 9.5

$AC^2 = AB^2 + BC^2 = 2AB^2$ (ಕಾರಣ $AB = BC$)

$\therefore \quad AC^2 = 2AB^2$

$A \equiv (0, -1)$, $B \equiv (x, y)$ ಮತ್ತು $C\,(0,3)$ ಆಗಿರಲಿ. ಆಗ

$(0-0)^2 + (-1-3)^2 = 2\,[(x-0)^2 + (y+1)^2]$

ಅಥವಾ $16 = 2\;[x^2 + y^2 + 2y + 1]$

ಅಥವಾ $x^2 + y^2 + 2y = 7$ ... (1)

ಈಗ, $AB = BC$ ಅಥವಾ $AB^2 = BC^2$

$\therefore \quad (0-x)^2 + (-1-y)^2 = (x-0)^2 + (y-3)^2$

ಅಥವಾ $x^2 + y^2 + 2y + 1 = x^2 + y^2 - 6y + 9$

ಅಥವಾ $y = 1$ ... (2)

ಆದ್ದರಿಂದ (2)ನ್ನು (1)ರಲ್ಲಿ ಬಳಸುವುದರಿಂದ

$x^2 + 1 + 2 = 7$ ಅಥವಾ $x = \pm 2$

$\therefore \quad B \equiv (2, 1)$ ಮತ್ತು $D = (-2, 1)$ [$\because$ D ಯು B ಯ y - ಅಕ್ಷದಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿಫಲಕ]

3. (1, 2), (5, –6) ಮತ್ತು (3, –4) ಬಿಂದುಗಳು (11, 2) ಬಿಂದುವನ್ನು ಕೇಂದ್ರವಾಗುಳ್ಳ ವೃತ್ತದ ಪರಿಧಿಯ ಮೇಲಿರುವುವು ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

$O \equiv (11, 2)$ ಕೇಂದ್ರಬಿಂದುವಾಗಿಯೂ, $A \equiv (1, 2)$, $B \equiv (5, -6)$ ಮತ್ತು $C \equiv (3, -4)$ ಆಗಿರಲಿ. ಆದ್ದರಿಂದ

$OA = \sqrt{(11-1)^2 + (2-2)^2} = 10$

$$OB = \sqrt{(11-5)^2 + (2+6)^2} = 10$$

$$OC = \sqrt{(11-3)^2 + (2+4)^2} = 10$$

ಈಗ, $OA = OB = OC$ ಆದ್ದರಿಂದ, A, B ಮತ್ತು C ಬಿಂದುಗಳು ವೃತ್ತದ ಪರಿಧಿಯ ಮೇಲಿರುವುವು.

4. (1, 4), (9, –2) ಮತ್ತು (5, 1) ಬಿಂದುಗಳು ಏಕರೇಖಸ್ಥವಾಗಿವೆ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

$A \equiv (1, 4)$, $B \equiv (9, -2)$ ಮತ್ತು $C \equiv (5, 1)$ ಆಗಿರಲಿ. ಆಗ

$$AB = \sqrt{(1-9)^2 + (4+2)^2} = 10$$

$$BC = \sqrt{(9-5)^2 + (-2-1)^2} = 5$$

$$CA = \sqrt{(1-5)^2 + (4-1)^2} = 5$$

$AB = BC + CA$ ಆಗಿರುವುದರಿಂದ A, B ಮತ್ತು C ಬಿಂದುಗಳು ಏಕರೇಖಸ್ಥವಾಗಿವೆ.

ಅಭ್ಯಾಸ – 9.1

1. A (1, 2), B (8, 3) ಮತ್ತು C (3, 8) ಶೃಂಗಗಳ ತ್ರಿಕೋನದ ಪರಿಧಿಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
2. A (1, 3), B (3,–1) ಮತ್ತು C (–5,–5) ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಕೋನದ ಶೃಂಗಗಳೆಂದು ಸಾಧಿಸಿ.
3. A (2,1), B (3,4) ಮತ್ತು C (4,1) ಸಮದ್ವಿಭುಜ ತ್ರಿಕೋನದ ಶೃಂಗಗಳೆಂದು ಸಾಧಿಸಿ.
4. (8,0) ಮತ್ತು (6, y) ಬಿಂದುಗಳು (–1,2) ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ಸಮಾನಾಂತರದಲ್ಲಿದ್ದರೆ y ನ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
5. A (–4, 6) ಮತ್ತು B (14, –2) ಬಿಂದುಗಳಿಂದ ಸಮಾನಾಂತರದಲ್ಲಿರುವ, x - ಅಕ್ಷದ ಮೇಲಿನ ಬಿಂದುವೊಂದನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
6. A (2,4) ಬಿಂದುವಿನ x ಮತ್ತು y ಅಕ್ಷದಲ್ಲಿನ ಪ್ರತಿಫಲನಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
7. A (2,2), B (–2,–2) ಮತ್ತು $(-2\sqrt{3}, 2\sqrt{3})$ ಬಿಂದುಗಳು ಸಮಬಾಹು ತ್ರಿಭುಜವೊಂದರ ಶೃಂಗಗಳಾಗಿರುವುವು ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

8. (3,–2), (–2,3), (5,5) ಮತ್ತು (–4,–4)ಗಳು ಒಂದು ವಜ್ರಾಕೃತಿಯ ಶೃಂಗಗಳಾಗಿರುವುವೆಂದು ತೋರಿಸಿ.

9. (–2,–2) (–1,2), (8,6) ಮತ್ತು (7,2) ಗಳು ಸಮಾನಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜವೊಂದರ ಶೃಂಗಗಳಾಗಿರುವುವೆಂದು ತೋರಿಸಿ.

10. (7,9), (3,–7) ಮತ್ತು (–3,3)ಗಳು ಲಂಬಕೋನ ಹಾಗೂ ಸಮದ್ವಿಬಾಹು ತ್ರಿಭುಜದ ಶೃಂಗಗಳಾಗಿರುವುವೆಂದು ತೋರಿಸಿ.

9.2.2. ರೇಖಾಖಂಡವೊಂದರ ವಿಭಜನೆ

P ಮತ್ತು *Q* ಬಿಂದುಗಳ ರೇಖೆಯೊಂದನ್ನು ಪರಿಗಣಿಸಿ. *R* ಎಂಬುದು *PQ* ಸರಳರೇಖೆಯ ಮೇಲಿರುವ ಬಿಂದುವಾದರೆ, ಆಗ *R* ಬಿಂದುವು *PQ* ರೇಖಾಭಾಗವನ್ನು *PR* : *RQ* ಪ್ರಮಾಣದಲ್ಲಿ ವಿಭಜಿಸುತ್ತದೆ ಎಂದು ಹೇಳುತ್ತೇವೆ(ಚಿತ್ರ 9.6).

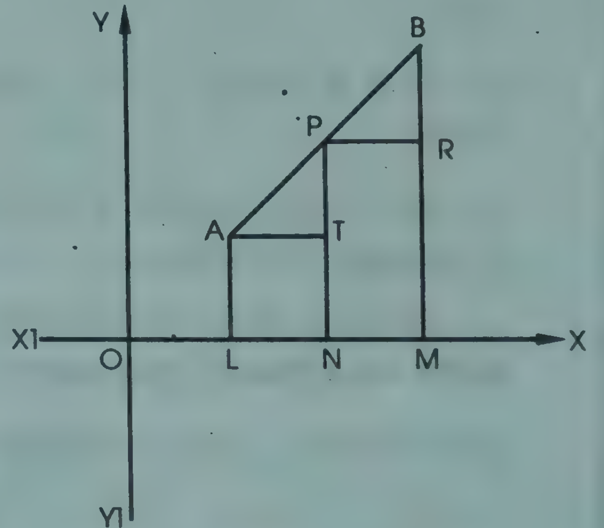


ಚಿತ್ರ 9.6

ವಿಭಜನಾ ಸೂತ್ರಗಳು

(i) ಅಂತರೀಯ ವಿಭಜನಾಬಿಂದುವಿನ ನಿರ್ದೇಶಕಗಳು

*AB*ಯು ಒಂದು ಸರಳರೇಖೆಯಾಗಿರಲಿ. $A \equiv (x_1, y_1)$ ಮತ್ತು $B \equiv (x_2, y_2)$ ದತ್ತ ನಿರ್ದೇಶಕಗಳಾಗಿರಲಿ. $P(x, y)$ ಬಿಂದುವು*AB* ಸರಳರೇಖೆಯನ್ನು ಅಂತರೀಯವಾಗಿ $m : n$ ಪ್ರಮಾಣದಲ್ಲಿ ವಿಭಜಿಸಲಿ. *AL*, *PN* ಮತ್ತು *BM* ಗಳನ್ನು *x* - ಅಕ್ಷಕ್ಕೆ ಲಂಬವಾಗಿಯೂ, *AT* ಮತ್ತು *PR* ಗಳನ್ನು ಕ್ರಮವಾಗಿ *PN* ಮತ್ತು *BM*ಗಳಿಗೆ ಲಂಬವಾಗಿ ಎಳೆಯಿರಿ. ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ (9.7) *APT* ಮತ್ತು *PBR* ತ್ರಿಕೋನಗಳು ಸಮರೂಪವಾಗಿವೆ. ಆದಕಾರಣ



ಚಿತ್ರ 9.7

$$\frac{AP}{PB} = \frac{AT}{PR} = \frac{PT}{BR} = \frac{m}{n} \qquad \dots (1)$$

ಆಗಿರುತ್ತದೆ.

ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿರುವಂತೆ

$$AT = LN = ON - OL = x - x_1 \qquad \dots (2)$$

ಮತ್ತು $PR = NM = OM - ON = x_2 - x \qquad \dots (3)$

ಅದೇ ರೀತಿ, $PT = PN - TN = y - y_1 \qquad \dots (4)$

$BR = BM - RM = y_2 - y \qquad \dots (5)$

ಸಮೀಕರಣ (1)ರಿಂದ $\frac{AT}{PR} = \frac{m}{n}$

ಇದರಲ್ಲಿ (2) ಮತ್ತು (3) ಬಳಸಿದಾಗ

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x} = \frac{m}{n}$$

ಅಥವಾ $(x - x_1)\, n = m\,(x_2 - x)$

ಅಥವಾ $(mx_2 + nx_1) = x\,(m + n)$

ಅಂದರೆ, $x = \frac{mx_2 + nx_1}{m + n}$

ಅದೇ ರೀತಿ, $\frac{PT}{BR} = \frac{m}{n}$

ಇದರಲ್ಲಿ (4) ಮತ್ತು (5) ಬಳಸಿದಾಗ

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y} = \frac{m}{n}$$

ಅಥವಾ $n\,(y - y_1) = m\,(y_2 - y)$

ಅಥವಾ $(m + n)y = my_2 + ny_1$

ಅಂದರೆ, $y = \frac{my_2 + ny_1}{m + n}$

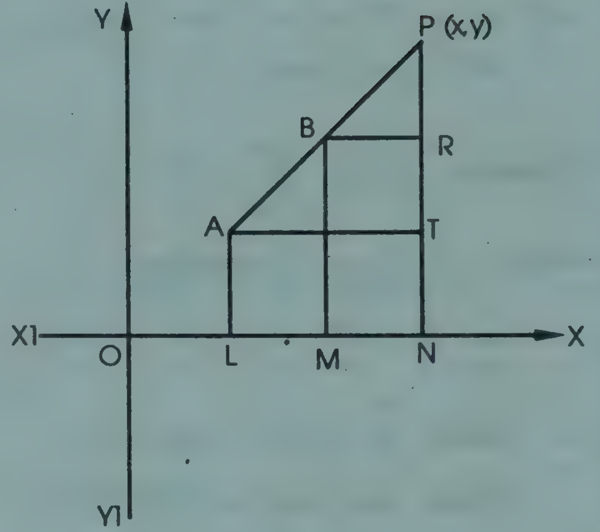
ಆದ್ದರಿಂದ, ಅಂತರೀಯ ವಿಭಜನಾ ಬಿಂದುವಿನ ನಿರ್ದೇಶಕಗಳು :

$$\left[\frac{mx_2 + nx_1}{m + n}, \frac{my_2 + ny_1}{m + n}\right]$$

(ii) ಬಾಹ್ಯವಿಭಜನಾ ಬಿಂದುವಿನ ನಿರ್ದೇಶಕಗಳು

P ಬಿಂದುವು AB ಸರಳರೇಖೆಯನ್ನು ಬಾಹ್ಯವಾಗಿ $m : n$ ಪ್ರಮಾಣದಲ್ಲಿ ವಿಭಜಿಸಲಿ. AL, BM, PN ಗಳನ್ನು x - ಅಕ್ಷಕ್ಕೆ ಲಂಬವಾಗಿಯೂ, AT ಮತ್ತು BR ಗಳನ್ನು PN ಗೆ ಲಂಬವಾಗಿಯೂ ಎಳೆಯಿರಿ. $A \equiv (x_1, y_1)$, $B \equiv (x_2, y_2)$ ಮತ್ತು $P \equiv (x, y)$ ಆಗಿರಲಿ.

ಚಿತ್ರ 9.8 ರಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿರುವಂತೆ APT ಮತ್ತು BPR ತ್ರಿಕೋನಗಳು ಸಮರೂಪವಾಗಿವೆ.



ಚಿತ್ರ 9.8

ಆದ್ದರಿಂದ,

$$\frac{AP}{BP} = \frac{AT}{BR} = \frac{PT}{PR} = \frac{m}{n} \quad \text{... (1)}$$

ಈಗ, $AT = LN = ON - OL = x - x_1$ ... (2)

ಮತ್ತು $BR = MN = ON - OM = x - x_2$ ... (3)

ಅದೇ ರೀತಿ, $PT = PN - TN = y - y_1$ ... (4)

ಮತ್ತು $PR = PN - RN = PN - BM = y - y_2$ ... (5)

ಸಮೀಕರಣ (1) ರಿಂದ $\frac{AT}{BR} = \frac{m}{n}$

ಇದರಲ್ಲಿ, (2) ಮತ್ತು (3) ಬಳಸಿದಾಗ

$$\frac{x - x_1}{x - x_2} = \frac{m}{n}$$

ಅಥವಾ $n(x-x_1) = m(x-x_2)$

ಅಥವಾ $x(m-n) = mx_2 - nx_1$

ಅಂದರೆ, $x = \dfrac{mx_2 - nx_1}{m - n}$

ಅದೇ ರೀತಿ, $\dfrac{PT}{PR} = \dfrac{m}{n}$

ಇದರಲ್ಲಿ (4) ಮತ್ತು (5) ಬಳಸಿದಾಗ

$$\frac{y - y_1}{y - y_2} = \frac{m}{n}$$

ಅಥವಾ $n(y-y_1) = m(y-y_2)$

ಅಥವಾ $y(m-n) = my_2 - ny_1$

ಅಂದರೆ, $y = \dfrac{my_2 - ny_1}{m - n}$

ಆದ್ದರಿಂದ, ಬಾಹ್ಯವಿಭಜನಾ ಬಿಂದುವಿನ ನಿರ್ದೇಶಕಗಳು :

$$\left(\frac{mx_2 - nx_1}{m - n}, \frac{my_2 - ny_1}{m - n}\right)$$

ಸೂಚನೆ : P ಬಿಂದುವು AB ಸರಳರೇಖೆಯ ಮಧ್ಯಬಿಂದುವಾಗಿದ್ದರೆ $AP : PB = 1 : 1$. ಆದ್ದರಿಂದ, ವಿಭಜನಾಸೂತ್ರದ ಆಧಾರದ ಮೇಲೆ P ಬಿಂದುವಿನ ನಿರ್ದೇಶಕಗಳು

$$\left[\frac{1x_2 + 1x_1}{1 + 1}, \frac{1.y_2 + 1.y_1}{1 + 1}\right]$$

ಆಗಿರುತ್ತವೆ. ಆದ್ದರಿಂದ

ಮಧ್ಯಬಿಂದು $\equiv \left[\dfrac{x_1 + x_2}{2}, \dfrac{y_1 + y_2}{2}\right]$

ತ್ರಿಕೋನದ ಗುರುತ್ವ ಕೇಂದ್ರದ ನಿರ್ದೇಶಕಗಳು

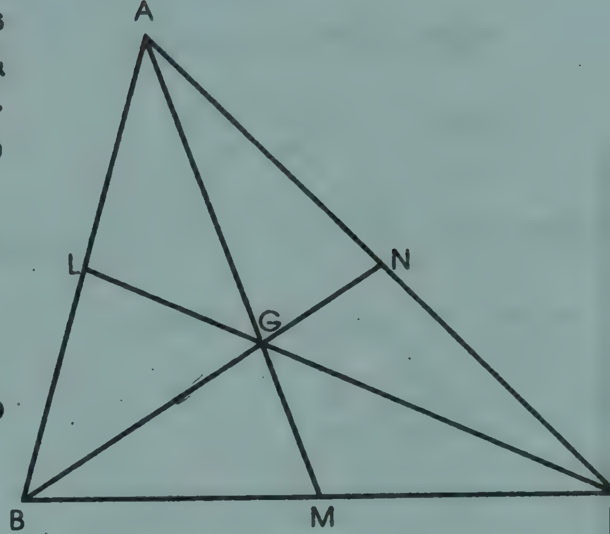
$A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ ಮತ್ತು $C(x_3, y_3)$ ಒಂದು ABC ತ್ರಿಕೋನದ ಶೃಂಗಗಳಾಗಿರಲಿ.

A ಮತ್ತು B ಶೃಂಗಗಳಿಂದ AM ಮತ್ತು BN ಮಧ್ಯರೇಖೆಗಳನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ. ಮಧ್ಯ ರೇಖೆಗಳ ಛೇದನ ಬಿಂದುವನ್ನು ಗುರುತ್ವಕೇಂದ್ರವೆಂದು ಹೆಸರಿಸಲಾಗಿದೆ. ತ್ರಿಭುಜದ ಯಾವುದೇ ಎರಡು ಮಧ್ಯರೇಖೆಗಳು ಪರಸ್ಪರ 2 : 1 ಪ್ರಮಾಣದಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುತ್ತವೆ. ಆದ್ದರಿಂದ

$$\frac{AG}{GM} = \frac{2}{1}$$

M ಬಿಂದುವು BCಯ ಮಧ್ಯಬಿಂದುವಾದ್ದರಿಂದ

$$M \equiv \left(\frac{x_2+x_3}{2}, \frac{y_2+y_3}{2}\right)$$



ಚಿತ್ರ 9.9

ಆಗಿರುತ್ತದೆ. G ಬಿಂದುವು AMಅನ್ನು ಅಂತರೀಯವಾಗಿ 2 : 1 ಪ್ರಮಾಣದಲ್ಲಿ ವಿಭಜಿಸುವುದರಿಂದ

$$G \equiv \left[\frac{2\left(\frac{x_2+x_3}{2}\right)+1x_1}{2+1}, \frac{2\left(\frac{y_2+y_3}{2}\right)+1.y_1}{2+1}\right]$$

ಅಂದರೆ, $G \equiv \left[\frac{x_1+x_2+x_3}{3}, \frac{y_1+y_2+y_3}{3}\right]$

ಸೂಚನೆ : P ಬಿಂದುವು AB ಸರಳರೇಖೆಯನ್ನು ಅಂತರೀಯವಾಗಿ ವಿಭಜಿಸಿದ್ದಲ್ಲಿ $\frac{m}{n}$ನ ಚಿಹ್ನೆಯು ಧನಾತ್ಮಕವಾಗಿರುತ್ತದೆ. ಹಾಗೆಯೇ. P ಬಿಂದುವು AB ಸರಳರೇಖೆಯನ್ನು ಬಾಹ್ಯವಾಗಿ ವಿಭಜಿಸಿದರೆ $\frac{m}{n}$ನ ಚಿಹ್ನೆಯು ಋಣಾತ್ಮಕವಾಗಿರುತ್ತದೆ.

ಉದಾಹರಣೆಗಳು

1. (2,2) ಮತ್ತು (4,6) ಬಿಂದುಗಳ ರೇಖಾಖಂಡವನ್ನು ಅಂತರೀಯವಾಗಿ ಹಾಗೂ ಬಾಹ್ಯವಾಗಿ 1:3 ಪ್ರಮಾಣದಲ್ಲಿ ವಿಭಜಿಸುವ ಬಿಂದುಗಳ ನಿರ್ದೇಶಕಗಳನ್ನು ಗೊತ್ತುಮಾಡಿ.

P ಬಿಂದುವು ಅಂತರೀಯ ವಿಭಜನಾ ಬಿಂದುವಾಗಿರಲಿ. ಆಗ

$$P \equiv \left[\frac{mx_2 + nx_1}{m+n}, \frac{my_2 + ny_1}{m+n}\right]$$

$$\equiv \left[\frac{1.4 + 3.2}{1+3}, \frac{1.6 + 3.2}{1+3}\right]$$

$$\equiv \left[\frac{4+6}{4}, \frac{6+6}{4}\right]$$

$$\equiv \left(\frac{5}{2}, 3\right)$$

Q ಬಿಂದುವು ಬಾಹ್ಯ ವಿಭಜನಾ ಬಿಂದುವಾಗಿರಲಿ. ಆಗ

$$Q \equiv \left[\frac{mx_2 - nx_1}{m-n}, \frac{my_2 - ny_1}{m-n}\right]$$

$$\equiv \left[\frac{1.4 - 3.2}{1-3}, \frac{1.6 - 3.2}{1-3}\right]$$

$$\equiv [1,0]$$

2. (1,–2) ಮತ್ತು (–3,4) ಬಿಂದುದ್ವಯಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸುವ ರೇಖೆಯನ್ನು ತ್ರಿಭಜಿಸುವ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಗೊತ್ತುಮಾಡಿ.

P ಮತ್ತು Q ಬಿಂದುಗಳು AB ಸರಳರೇಖೆಯನ್ನು ತ್ರಿಭಜಿಸಲಿ. P ಬಿಂದುವು AB ಅನ್ನು 1:2 ಪ್ರಮಾಣದಲ್ಲಿ ಅಂತರೀಯವಾಗಿ ವಿಭಜಿಸುತ್ತದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ

$$P \equiv \left[\frac{1(-3) + 2(1)}{1+2}, \frac{1(4) + 2(-2)}{1+2}\right]$$



ಚಿತ್ರ 9.10

ಅಂದರೆ, $P \equiv \left[-\frac{1}{3}, 0\right]$.

Q ಬಿಂದುವು AB ಅನ್ನು 2:1 ಪ್ರಮಾಣದಲ್ಲಿ ವಿಭಜಿಸುತ್ತದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ

$$Q \equiv \left[\frac{2(-3) + 1(1)}{2 + 1}, \frac{2(4) + 1(-2)}{2 + 1}\right]$$

ಅಥವಾ $Q \equiv \left[-\frac{5}{3}, 2\right]$.

3. $A \equiv (1,2)$ ಮತ್ತು $B \equiv (5,-3)$ ಆದರೆ x ಮತ್ತು y ಅಕ್ಷಗಳು ABಯನ್ನು ಯಾವ ಪ್ರಮಾಣದಲ್ಲಿ ವಿಭಜಿಸುತ್ತವೆ? ವಿಭಜನಾ ಬಿಂದುಗಳ ನಿರ್ದೇಶಕಗಳನ್ನು ಗೊತ್ತುಮಾಡಿ.

x - ಅಕ್ಷವು AB ರೇಖಾಖಂಡವನ್ನು P ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ $m : n$ ಪ್ರಮಾಣದಲ್ಲಿ ವಿಭಜಿಸಲಿ. P ಬಿಂದುವು x - ಅಕ್ಷದಲ್ಲಿರುವುದರಿಂದ P ಬಿಂದುವಿನ ಭುಜ (y) ನಿರ್ದೇಶಕ) 0 ಆಗಿರುತ್ತದೆ.

ಅಂದರೆ, $\frac{m(-3) + n(2)}{m+n} = 0$

$\therefore 3m = 2n$, ಅಥವಾ $\frac{m}{n} = \frac{2}{3} > 0$

P ಬಿಂದುವಿನ ಕೋಟಿ $= \frac{2(5) + 3(1)}{2 + 3} = \frac{13}{5}$.

ಆದ್ದರಿಂದ, x-ಅಕ್ಷವು AB ರೇಖಾಖಂಡವನ್ನು 2:3 ಪ್ರಮಾಣದಲ್ಲಿ ಅಂತರೀಯವಾಗಿ ವಿಭಜಿಸುತ್ತದೆ ಮತ್ತು

$$P \equiv \left(\frac{13}{5}, 0\right).$$

Q ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ y - ಅಕ್ಷವು AB ರೇಖಾಖಂಡವನ್ನು $k : l$ ಪ್ರಮಾಣದಲ್ಲಿ ವಿಭಜಿಸಲಿ.

Q ಬಿಂದುವು y - ಅಕ್ಷದಲ್ಲಿರುವುದರಿಂದ

Q ಬಿಂದುವಿನ ಕೋಟಿ $= 0$ ಆಗಿರುತ್ತದೆ.

ಅಂದರೆ, $\frac{k(5) + l(1)}{k + l} = 0$

ಆದ್ದರಿಂದ, $5k + l = 0$ ಅಥವಾ $\frac{k}{l} = -\frac{1}{5} < 0$

Q ಬಿಂದುವಿನ ಭುಜ $= \frac{1(-3) - 5(2)}{1 - 5} = \frac{-13}{-4} = \frac{13}{4}$.

ಆದ್ದರಿಂದ, y - ಅಕ್ಷವು AB ರೇಖಾಖಂಡವನ್ನು 1:5 ಪ್ರಮಾಣದಲ್ಲಿ ಬಾಹ್ಯವಾಗಿ ವಿಭಜಿಸುತ್ತದೆ ಮತ್ತು

$$Q \equiv \left(0, \frac{13}{4}\right)$$

4. ABC ತ್ರಿಭುಜದಲ್ಲಿ B, C ಮತ್ತು G (ಗುರುತ್ವಕೇಂದ್ರ)ಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ (2,3), (–3,4) ಮತ್ತು (–5,–1) ಆಗಿವೆ. A ಅನ್ನು ಗೊತ್ತುಮಾಡಿ.

A ಶೃಂಗದ ನಿರ್ದೇಶಕಗಳು (x, y) ಆಗಿರಲಿ. ಆಗ, ಗುರುತ್ವಕೇಂದ್ರ

$$G \equiv \left[\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}\right]$$

ಆದ್ದರಿಂದ, $(-5, -1) \equiv \left(\frac{2 - 3 + x}{3}, \frac{3 + 4 + y}{3}\right)$

ಅನುರೂಪ ನಿರ್ದೇಶಕಗಳು ಸಮನಾದವುಗಳಾದ್ದರಿಂದ

$\frac{-1 + x}{3} = -5$ ಅಥವಾ $x = -14$

$\frac{7 + y}{3} = -1$ ಅಥವಾ $y = -10$

ಆದ್ದರಿಂದ, $A \equiv (-14, -10)$.

5. (–1,–2), (6,1), (3,5) ಬಿಂದುಗಳು ತ್ರಿಭುಜದ ಮಧ್ಯ ಬಿಂದುಗಳಾಗಿದ್ದರೆ ತ್ರಿಭುಜದ ಶೃಂಗಗಳ ನಿರ್ದೇಶಕಗಳನ್ನು ಗೊತ್ತುಮಾಡಿ.

ABC ತ್ರಿಕೋನದ ಶೃಂಗಗಳು

$A \equiv (x_1, y_1)$, $B \equiv (x_2, y_2)$ ಮತ್ತು $C \equiv (x_3, y_3)$ ಆಗಿರಲಿ.

ಆಗ, AB, BC ಮತ್ತು CA ಬಾಹುಗಳ ಮಧ್ಯಬಿಂದುಗಳು

ದತ್ತ ನಿಯಮದಂತೆ

$$\frac{x_1 + x_2}{2} = -1, \text{ ಅಥವಾ } x_1 + x_2 = -2$$

$$\frac{x_2 + x_3}{2} = 6, \text{ ಅಥವಾ } x_2 + x_3 = 12$$

$$\frac{x_3 + x_1}{2} = 3 \text{ ಅಥವಾ } x_3 + x_1 = 6$$

ಮೇಲಿನ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಕೂಡುವುದರಿಂದ

$$2(x_1 + x_2 + x_3) = 16$$

ಅಥವಾ $x_1 + x_2 + x_3 = 8$

ಆದ್ದರಿಂದ, $x_1 = 8 - (x_2 + x_3) = 8 - 12 = -4$

$$x_2 = 8 - (x_1 + x_3) = 8 - 6 = 2$$

$$x_3 = 8 - (x_1 + x_2) = 8 + 2 = 10$$

ಅದೇ ರೀತಿ, $\frac{y_1 + y_2}{2} = -2$ ಅಥವಾ $y_1 + y_2 = -4$

$$\frac{y_2 + y_3}{2} = 1 \text{ ಅಥವಾ } y_2 + y_3 = 2$$

$$\frac{y_3 + y_1}{2} = 5 \text{ ಅಥವಾ } y_3 + y_1 = 10$$

ಮೇಲಿನ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಕೂಡುವುದರಿಂದ

$$2(y_1 + y_2 + y_3) = 8$$

ಅಥವಾ $y_1 + y_2 + y_3 = 4.$

ಆದ್ದರಿಂದ

$$y_1 = 4 - (y_2 + y_3) = 4 - 2 = 2$$

$$y_2 = 4 - (y_1 + y_3) = 4 - 10 = -6$$

$$y_3 = 4 - (y_1 + y_2) = 4 - (-4) = 8$$

ಆದ್ದರಿಂದ A, B, C ಶೃಂಗಗಳ ನಿರ್ದೇಶಕಗಳು :

$(x_1, y_1) \equiv (-4, 2)$, $(x_2, y_2) \equiv (2, -6)$ ಮತ್ತು $(x_3, y_3) \equiv (10, 8)$

ಅಭ್ಯಾಸ - 9.2

1. ಈ ಕೆಳಕಂಡ ಬಿಂದುದ್ವಯಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸುವ ರೇಖಾಖಂಡಗಳ ವಿಭಜನಾ ಬಿಂದುಗಳ ನಿರ್ದೇಶಕಗಳನ್ನು ಗೊತ್ತುಮಾಡಿ.
   (i) (3, 4) ಮತ್ತು (5, 2), 3 : 2 ಪ್ರಮಾಣದಲ್ಲಿ, ಅಂತರೀಯವಾಗಿ;
   (ii) (–1, –2) ಮತ್ತು (–2, –1), 3 : 1 ಪ್ರಮಾಣದಲ್ಲಿ, ಅಂತರೀಯವಾಗಿ;
   (iii) (4, –1) ಮತ್ತು (–2, 6), 3 : 4 ಪ್ರಮಾಣದಲ್ಲಿ ಬಾಹ್ಯವಾಗಿ;
   (iv) (8, –6) ಮತ್ತು (6, –8), 1 : 2 ಪ್ರಮಾಣದಲ್ಲಿ ಬಾಹ್ಯವಾಗಿ;
2. (2, 1) ಮತ್ತು (1, 2) ಬಿಂದುದ್ವಯಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸುವ ರೇಖೆಯನ್ನು ತ್ರಿಭಜಿಸುವ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಗೊತ್ತುಮಾಡಿ.
3. (2, 4) ಮತ್ತು (4, –2) ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸುವ ರೇಖೆಯನ್ನು ನಾಲ್ಕು ಸಮಭಾಗಗಳನ್ನಾಗಿ ಮಾಡುವ ವಿಭಜನಾ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಗೊತ್ತುಮಾಡಿ.
4. (2, 1), (3, 4) ಮತ್ತು (–2, –2) ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಶೃಂಗಗಳಾಗುಳ್ಳ ತ್ರಿಕೋನದ ಭುಜಗಳ ಮಧ್ಯಬಿಂದುಗಳ ನಿರ್ದೇಶಕಗಳನ್ನು ಗೊತ್ತುಮಾಡಿ.
5. *ABC* ತ್ರಿಭುಜದ ಬಾಹುಗಳ ಮಧ್ಯಬಿಂದುಗಳ ತ್ರಿಕೋನದ ಭುಜಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ 7, 7, 6 ಆಗಿದ್ದಲ್ಲಿ, *ABC* ತ್ರಿಕೋನದ ಭುಜಗಳನ್ನು ಗೊತ್ತುಮಾಡಿ.
6. *ABC* ತ್ರಿಭುಜದ ಮಧ್ಯಬಿಂದುಗಳ ನಿರ್ದೇಶಕಗಳು (3, 3), $\left(\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right)$ ಮತ್ತು $\left(\frac{5}{2}, \frac{3}{2}\right)$ ಆಗಿದ್ದಲ್ಲಿ ಶೃಂಗಗಳ ನಿರ್ದೇಶಕಗಳನ್ನು ಗೊತ್ತುಮಾಡಿ.
7. (–2, –2), (–1, 2), (8, 6) ಬಿಂದುಗಳು ಸಮಾನಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜವೊಂದರ ಶೃಂಗಗಳಾದರೆ ನಾಲ್ಕನೇ ಶೃಂಗದ ನಿರ್ದೇಶಕಗಳನ್ನು ಗೊತ್ತುಮಾಡಿ.
8. (2, 5), (–2, 3) (–2, –1) ಶೃಂಗಗಳನ್ನುಳ್ಳ ತ್ರಿಭುಜದ ಗುರುತ್ವಕೇಂದ್ರವನ್ನು ಗೊತ್ತುಮಾಡಿ.

9. $\left(8, \frac{12}{5}\right)$ ಬಿಂದುವು (x, y) ಮತ್ತು $(10, 2)$ ಬಿಂದುದ್ವಯಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸುವ ರೇಖೆಯನ್ನು ಅಂತರೀಯವಾಗಿ $3 : 2$ ಪ್ರಮಾಣದಲ್ಲಿ ವಿಭಜಿಸಿದರೆ x ಮತ್ತು y ನ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಗೊತ್ತುಮಾಡಿ.

10. $(6, 4)$ ಮತ್ತು $(-2, 8)$ ಬಿಂದುದ್ವಯಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸುವ ರೇಖೆಯನ್ನು x – ಮತ್ತು y - ಅಕ್ಷಗಳು ಯಾವ ಪ್ರಮಾಣದಲ್ಲಿ ವಿಭಜಿಸುತ್ತವೆ? ವಿಭಜನಾ ಬಿಂದುಗಳ ನಿರ್ದೇಶಕಗಳಾವುವು?

11. $C\ (2, 6)$ ವೃತ್ತವೊಂದರ ಕೇಂದ್ರಬಿಂದು ಮತ್ತು $(3,7)$ ವ್ಯಾಸದ ಒಂದು ತುದಿಯಾದರೆ, ವ್ಯಾಸದ ಇನ್ನೊಂದು ತುದಿಯನ್ನು ಗೊತ್ತುಮಾಡಿ.

12. $(-2, 3)$ ಮತ್ತು $(3, 7)$ ಬಿಂದುದ್ವಯಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸುವ ರೇಖೆಯನ್ನು $(-17, -19)$ ಬಿಂದುವು ಯಾವ ಪ್ರಮಾಣದಲ್ಲಿ ವಿಭಜಿಸುತ್ತದೆ.

13. $(2, 3)$, $(-1, 2)$ ಮತ್ತು $(4, 1)$ ಶೃಂಗಗಳ ತ್ರಿಭುಜದ ಮಧ್ಯರೇಖೆಗಳ ಉದ್ದಗಳನ್ನು ಗೊತ್ತುಮಾಡಿ.

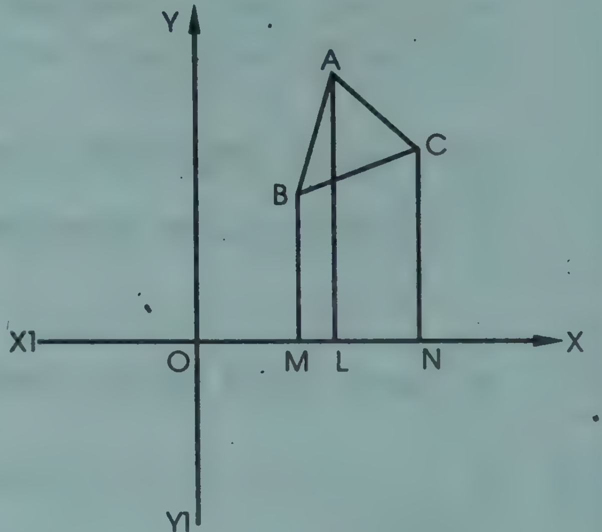
14. $(-2, 3)$ ಮತ್ತು $(4, 5)$ ಬಿಂದುದ್ವಯಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸುವ ರೇಖೆಯನ್ನು ಹರಾತ್ಮಕವಾಗಿ ವಿಭಜಿಸುವ $\left(0, \frac{11}{5}\right)$ ಬಿಂದುವಿನ ರೂಪಭೇದವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

15. $(4, a)$ ಬಿಂದುವು $A\ (1, 3)$ ಮತ್ತು $B\ (5, -5)$ ಬಿಂದುದ್ವಯಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸುವ ರೇಖೆಯನ್ನು ಯಾವ ಪ್ರಮಾಣದಲ್ಲಿ ವಿಭಜಿಸುತ್ತದೆ ಮತ್ತು a ಯ ಬೆಲೆ ಏನು?

9.2.3 ತ್ರಿಭುಜದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ

$A \equiv (x_1, y_1)$, $B \equiv (x_2, y_2)$, $C \equiv (x_3, y_3)$ ಬಿಂದುಗಳು ತ್ರಿಭುಜದ ದತ್ತ ಶೃಂಗಗಳಾಗಿರಲಿ. AL, BM, CN ಗಳನ್ನು x - ಅಕ್ಷಕ್ಕೆ ಲಂಬವಾಗಿ ಎಳೆಯಿರಿ.

ಚಿತ್ರ 9.11 ರಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿರುವಂತೆ



ಚಿತ್ರ 9.11

ABC ತ್ರಿಭುಜದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ $= ABML$ ತ್ರಪೀಜಿಯಂನ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ
$+ ALNC$ ತ್ರಪೀಜಿಯಂನ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ
$- BMNC$ ತ್ರಪೀಜಿಯಂನ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ

ಆದ್ದರಿಂದ, ABC ತ್ರಿಭುಜದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ $= \frac{1}{2}ML\ (AL + BM)$

$$+ \frac{1}{2}LN\ (AL + CN) - \frac{1}{2}MN\ (BM + CN)$$

ಚಿತ್ರ 9.11ರಿಂದ, $ML = OL - OM = x_1 - x_2$

$LN = ON - OL = x_3 - x_1$

$MN = ON - OM = x_3 - x_2$

$AL = y_1,\ BM = y_2,\ CN = y_3$

ಆದ್ದರಿಂದ, ಸಮೀಕರಣ (1)ರಿಂದ ABC ತ್ರಿಭುಜದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ

$$\Delta ABC = \frac{1}{2}\left[(x_1 - x_2)(y_3 + y_2) + (x_3 - x_1)(y_1 + y_3) - (x_3 - x_2)(y_2 + y_3)\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[x_1\ (y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3\ (y_1 - y_2)\right]$$ ಚದರಮಾನ.

ಅಥವಾ $\Delta ABC = \frac{1}{2} \sum x_1(y_2 - y_3)$

ಸೂಚನೆ : (1) A, B ಮತ್ತು C ಬಿಂದುಗಳು ಏಕರೇಖಸ್ಥವಾಗಿದ್ದಲ್ಲಿ, ABC ತ್ರಿಭುಜದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ ΔABC ಶೂನ್ಯವಾಗಿರುತ್ತದೆ.

(2) ತ್ರಿಭುಜದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವು ಅಪ್ರದಕ್ಷಿಣೆಯಾಗಿದ್ದಲ್ಲಿ ಧನಾತ್ಮಕವಾಗಿಯೂ ಮತ್ತು ಪ್ರದಕ್ಷಿಣೆಯಾಗಿದ್ದಲ್ಲಿ ಋಣಾತ್ಮಕವಾಗಿಯೂ ಪರಿಗಣಿಸುತ್ತೇವೆ.

ಉದಾಹರಣೆಗಳು

1. $(a, b + c), (b, c + a), (c, a + b)$ ಬಿಂದುಗಳು ಏಕರೇಖಸ್ಥವಾಗಿವೆಯೆಂದು ತೋರಿಸಿ.

$P \equiv (a, b + c),\ Q \equiv (b, c + a),\ R \equiv (c, a + b)$ ಆಗಿರಲಿ

$$\Delta PQR = \frac{1}{2}\left[x_1\ (y_2 - y_3) + x_2\ (y_3 - y_1) + x_3\ (y_1 - y_2)\right]$$

$\therefore\ \Delta PQR = \frac{1}{2}\ [a(c-b) + b(a-c) + c(b-a)]$

$= \frac{1}{2}\ [ac - ab + ba - bc + cb - ca]$

$= \frac{1}{2}\ (0) = 0$

ಆದ್ದರಿಂದ, P, Q, R ಬಿಂದುಗಳು ಏಕರೇಖಸ್ಥವಾಗಿವೆ.

2. (2, 5), (–2, 3) (–2,–1) ಮತ್ತು (3, –2) ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಶೃಂಗಗಳಾಗಿ ಹೊಂದಿರುವ ಚತುರ್ಭುಜದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

$A \equiv (2, 5), B \equiv (-2, 3), C \equiv (-2, -1)$ ಮತ್ತು $D \equiv (3, -2)$ ಆಗಿರಲಿ.

$ABCD$ ಚತುರ್ಭುಜದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ =

ABC ತ್ರಿಭುಜದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ + ADC ತ್ರಿಭುಜದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ

ಈಗ, $\Delta ABC = \frac{1}{2}\ [2(3+1) - 2(-1-5) - 2(5-3)] = 8$ ಚದರಮಾನ.

ಮತ್ತು $\Delta ADC = \frac{1}{2}\ [2(-2+1) + 3(-2-5) - 2(5+2)] = 17$ ಚದರಮಾನ.

$\therefore\ ABCD$ ಚತುರ್ಭುಜದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ $= 8 + 17 = 25$ ಚದರಮಾನ.

ಅಭ್ಯಾಸ - 9.3

1. ಈ ಕೆಳಕಂಡ ಶೃಂಗಗಳನ್ನುಳ್ಳ ತ್ರಿಭುಜಗಳ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
   (i) (2, 3), (–1, 2), (4, 1)
   (ii) (–5, –2), (9, 3), (3, 5)
   (iii) (2, 3), (–2, –5), (–4, 6)

2. ಈ ಕೆಳಕಂಡ ಶೃಂಗಗಳನ್ನುಳ್ಳ ಚತುರ್ಭುಜಗಳ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
   (i) (0, 0), (2, 3), (–2, 1) (0, –1)
   (ii) (1, 3), (1, –2), (6, 2), (4, 4)
   (iii) (1, –4), (2, 0), (1, 2), (–1,3)

3. $A \equiv (a, -4)\ B \equiv (1, -1)$ ಮತ್ತು $C \equiv (5, 2)$ ಬಿಂದುಗಳು ಏಕರೇಖಸ್ಥವಾಗಿದ್ದಲ್ಲಿ aನ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

9.3 ಬಿಂದುಪಥ ಹಾಗೂ ಅದರ ಸಮೀಕರಣ

ಒಂದು ದತ್ತ ನಿಯಮಾನುಸಾರ ಚಲಿಸುವ ಬಿಂದುವು ರೇಖಿಸುವ ವಕ್ರರೇಖೆಯನ್ನು **ಬಿಂದುಪಥ** ಅಥವಾ ಸಂಕ್ಷೇಪವಾಗಿ **ಪಥ** ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ಪಥದ ಮೇಲಿರುವ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಬಿಂದುವೂ ದತ್ತ ನಿಯಮವನ್ನು ಪಾಲಿಸಬೇಕು ಎನ್ನುವುದು ಸ್ಪಷ್ಟವಾಗಿದೆ.

ಉದಾಹರಣೆಗಳು :

1. ವೃತ್ತವನ್ನು ಒಂದು ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ಸಮಾನದೂರದಲ್ಲಿ ಚಲಿಸುವ ಬಿಂದುವೊಂದರ ಪಥ ಎನ್ನಬಹುದು.

2. ಲಂಬ ದ್ವಿಭಾಜಕವನ್ನು, ಎರಡು ಬಿಂದುಗಳಿಂದ ಸಮಾನಾಂತರದಲ್ಲಿ ಚಲಿಸುವ ಬಿಂದುವಿನ ಪಥ ಎಂದು ಹೇಳಬಹುದು.

ಪಥದ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಬರೆಯುವ ರೀತಿಗಳು ಹೀಗಿವೆ :

1. ಚರ ಬಿಂದುವಿನ ಯಾವುದೇ ಒಂದು ಸ್ಥಾನವನ್ನು $P(x, y)$ ಎಂದು ಸೂಚಿಸಬೇಕು;
2. ದತ್ತ ನಿಯಮಗಳಿಗೆ ಅನುಗುಣವಾಗಿ ಪಥದ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಬರೆಯಬೇಕು; ಮತ್ತು
3. ಕೊನೆಯಲ್ಲಿ ಪಥದ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಸುಲಭರೂಪದಲ್ಲಿ ಬರೆಯಬೇಕು.

ಉದಾಹರಣೆಗಳು

1. (i) x - ಅಕ್ಷದಿಂದ ಮತ್ತು (ii) y - ಅಕ್ಷದಿಂದ 4 ಮಾನಗಳ ದೂರದಲ್ಲಿರುವ ಬೇರೆ ಬೇರೆ ಬಿಂದು ಪಥಗಳ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಗೊತ್ತುಮಾಡಿ.

   ಉತ್ತರ : $P(x, y)$ ಚರ ಬಿಂದುವಾಗಲಿ. ದತ್ತ ನಿಯಮದಂತೆ,

   (i) $y = \pm 4$ ಮತ್ತು (ii) $x = \pm 4$.

2. $(-a, 0)$ ಮತ್ತು $(a, 0)$ ಬಿಂದುಗಳಿಂದ ಸಮಾನದೂರದಲ್ಲಿರುವ ಬಿಂದುವಿನ ಪಥದ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಬರೆಯಿರಿ.

   $A \equiv (--a, 0)$ ಮತ್ತು $B \equiv (a, 0)$ ಹಾಗೂ $P(x, y)$ ಚರಬಿಂದುವಾಗಲಿ.

   ಪಥ ಸಮೀಕರಣದ ನಿಯಮವು

   $PA = PB$ ಅಥವಾ $PA^2 = PB^2$

   $$\therefore (x + a)^2 + (y - 0)^2 = (x - a)^2 + (y - 0)^2$$

ಅಂದರೆ, $x^2 + a^2 + 2ax + y^2 = x^2 + a^2 - 2ax + y^2$

ಅಥವಾ $4ax = 0$ ಅಥವಾ $x = 0$.

3. $(a, 0)$ ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ಹಾಗೂ y - ಅಕ್ಷದಿಂದ ಸಮಾನದೂರದಲ್ಲಿರುವ ಪಥದ ಸಮೀಕರಣವು $y^2 = a(2x - a)$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

P (x, y) ಚರಬಿಂದುವಾಗಲಿ. $A \equiv (a, 0)$ ಮತ್ತು $B \equiv (0, y)$ ಆಗಿರಲಿ. ಪಥ ಸಮೀಕರಣದ ನಿಯಮದಂತೆ, $PA = PB$ ಅಥವಾ $PA^2 = PB^2$ ಆಗುತ್ತದೆ.

$\therefore (x - a)^2 + (y - 0)^2 = (x - 0)^2 + (y - y)^2$

ಅಥವಾ $x^2 + a^2 - 2xa + y^2 = x^2 + 0$

ಅಥವಾ $y^2 = 2xa - a^2$

ಅಥವಾ $y^2 = a(2x - a)$.

ಅಭ್ಯಾಸ - 9.4

1. x - ಮತ್ತು y - ಅಕ್ಷಗಳಿಂದ ಸಮಾನಾಂತರದಲ್ಲಿ ಚಲಿಸುವ ಬಿಂದುವಿನ ಪಥದ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

2. $(3, 4)$ ಬಿಂದುವಿನಿಂದ 5 ಮಾನಗಳಷ್ಟು ಸಮಾನಾಂತರದಲ್ಲಿ ಚಲಿಸುವ ಬಿಂದುವಿನ ಪಥ ಸಮೀಕರಣವೇನು?

3. $(3, -1)$ ಮತ್ತು $(-2, 4)$ ಬಿಂದು ದ್ವಯಗಳಿಂದ ಸಮಾನಾಂತರದಲ್ಲಿ ಚಲಿಸುವ ಬಿಂದುವಿನ ಪಥದ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

4. ತ್ರಿಭುಜ ಒಂದರ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವು 6 ಮತ್ತು ಎರಡು ಶೃಂಗಗಳು $(3, 4)$ ಮತ್ತು $(-1, 2)$ ಆದರೆ ಮೂರನೇ ಶೃಂಗದ ಪಥದ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

5. $A(0, 0)$ ಮತ್ತು $B(-2, 3)$ ಬಿಂದುಗಳು ABC ತ್ರಿಭುಜವೊಂದರ ಶೃಂಗಗಳು ಮತ್ತು ತ್ರಿಭುಜದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವು 16 ಆದಲ್ಲಿ, C ಬಿಂದುವಿನ ಪಥದ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಬರೆಯಿರಿ.

6. $(3, 2)$ ಬಿಂದುವಿನ ಮತ್ತು ಚರಬಿಂದುವಿನ ನಡುವಿನ ಅಂತರವು ಮೂಲಬಿಂದು ಮತ್ತು ಚರಬಿಂದುವಿನ ನಡುವಿನ ಅಂತರದ ಎರಡರಷ್ಟಾದರೆ ಬಿಂದುವಿನ ಪಥದ ಸಮೀಕರಣವೇನು?

7. ಮೂಲಬಿಂದು ಮತ್ತು $(a, 0)$ ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ಚಲಿಸುವ ಬಿಂದುವಿನ ದೂರವು $m : n$ ಪ್ರಮಾಣದಲ್ಲಿದ್ದರೆ, ಚರಬಿಂದುವಿನ ಪಥದ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಪಡೆಯಿರಿ.

8. $(2, 3)$ ಮತ್ತು $(3, 4)$ ಬಿಂದು ದ್ವಯಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸುವ ರೇಖೆಯು ಚರಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಲಂಬಕೋನ ನಿರ್ಮಿಸಿದಲ್ಲಿ, ಅಂತಹ ಬಿಂದುವಿನ ಪಥದ ಸಮೀಕರಣವೇನು?

9.4 ಸರಳರೇಖೆ

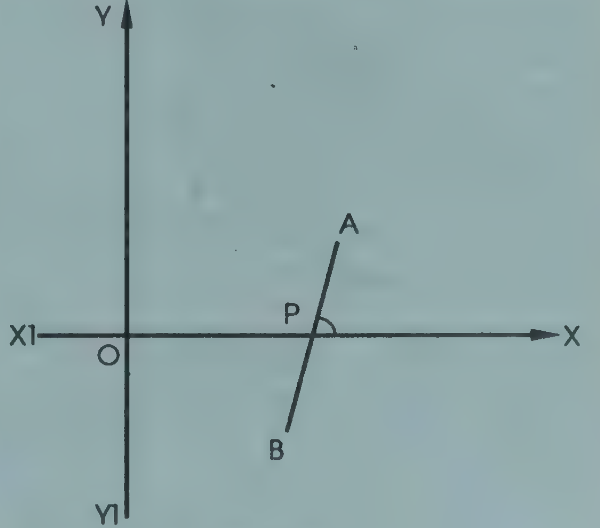
ಎರಡು ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಜೋಡಿಸುವ ಕನಿಷ್ಠ ಉದ್ದದ ರೇಖೆಯನ್ನು ನಾವು ಸರಳರೇಖೆ ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ.

ನಿರ್ದೇಶಕ ರೇಖಾಗಣಿತದಲ್ಲಿ, ಸರಳರೇಖೆಯ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಅಭ್ಯಾಸ ಮಾಡುವುದಕ್ಕೆ ಮೊದಲು, ಕೆಲವು ಉಪಯುಕ್ತ ಪದಗಳ ಅರ್ಥವನ್ನು ತಿಳಿದುಕೊಳ್ಳೋಣ.

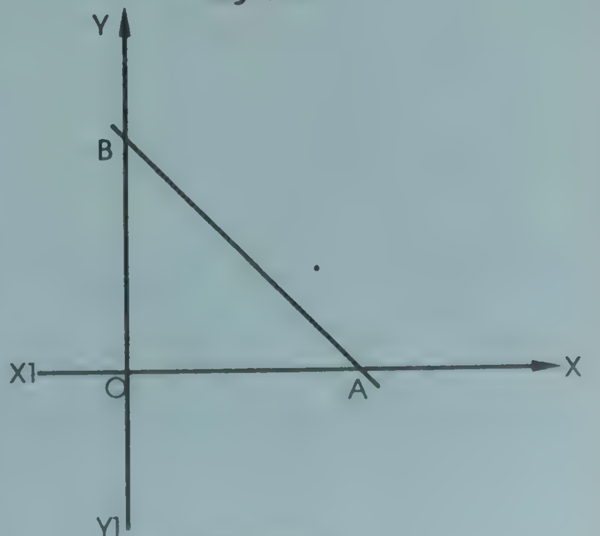
1. **ಬಾಗು** : AB ಸರಳರೇಖೆಯು OXನ್ನು P ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸಲಿ. ಧನದಿಶೆಯಲ್ಲಿ XPA ಕೋನದ ಬೆಲೆಯನ್ನು ABಯ ಬಾಗು ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ. $\angle XPA = \theta$ ಆಗಿರಲಿ.

2. **ಓಟ** : AB ಸರಳರೇಖೆಯ ಬಾಗು θ ಆಗಿದ್ದರೆ $\tan \theta$ ವನ್ನು ಓಟವೆಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ. ಇದು ಸರಳರೇಖೆಯ ಏರಿಳಿತಗಳನ್ನು ಸೂಚಿಸುತ್ತದೆ (ಚಿತ್ರ 9.12).

3. **ಛೇದಕಗಳು** : ಒಂದು ಸರಳರೇಖೆಯು OX ಮತ್ತು OY ಗಳನ್ನು A ಮತ್ತು B ಬಿಂದುಗಳಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸಲಿ. OA ಯನ್ನು x - ಛೇದಕವೆಂದೂ, OBಯನ್ನು y-ಛೇದಕವೆಂದೂ



ಚಿತ್ರ 9.12



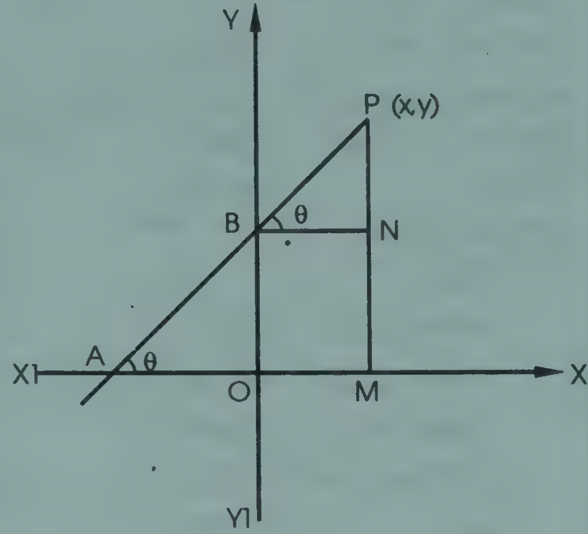
ಚಿತ್ರ 9.13

ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ. ಈ ಛೇದಕ (ರೇಖಾಂತರಗಳು) ಆಯಾ ಅಕ್ಷಗಳ ಧನ, ಋಣದಿಶೆಗಳನ್ನಾಧರಿಸಿ ಧನ, ಋಣ ಆಗಿರುವುವು(ಚಿತ್ರ 9.13).

9.4.1 ಸರಳರೇಖೆಯ ವಿವಿಧ ರೂಪಗಳು

I ಓಟ – ಛೇದಕ ರೂಪ

ಸರಳರೇಖೆಯೊಂದು x - ಅಕ್ಷವನ್ನು A ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ, y - ಅಕ್ಷವನ್ನು B ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸಲಿ. ಸರಳರೇಖೆಯ y - ಛೇದಕವು c ಆಗಿರಲಿ. ಅಂದರೆ $OB=c$ ಆಗಿರಲಿ. $P(x, y)$ ಸರಳರೇಖೆಯ ಮೇಲಿನ ಯಾವುದೇ ಬಿಂದುವಾಗಿರಲಿ, ಮತ್ತು AB ಯ ಓಟವು $\tan\theta$ ಆಗಿರಲಿ. P ಬಿಂದುವಿನಿಂದ PM ಅನ್ನು x - ಅಕ್ಷಕ್ಕೂ, BN ಅನ್ನು PM ಗೂ ಲಂಬವಾಗಿ ಎಳೆಯಿರಿ.



ಚಿತ್ರ 9.14

ಚಿತ್ರ 9.14 ರಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿದಂತೆ $\angle PBN = \theta$ ಆದ್ದರಿಂದ PBN ತ್ರಿಕೋನದಿಂದ

$$\tan\theta = \frac{PN}{BN} = \frac{PM - MN}{OM} = \frac{PM - OB}{OM}$$

ಅಥವಾ $\tan\theta = \dfrac{y - c}{x}$

ಅಥವಾ $y = x\tan\theta + c$

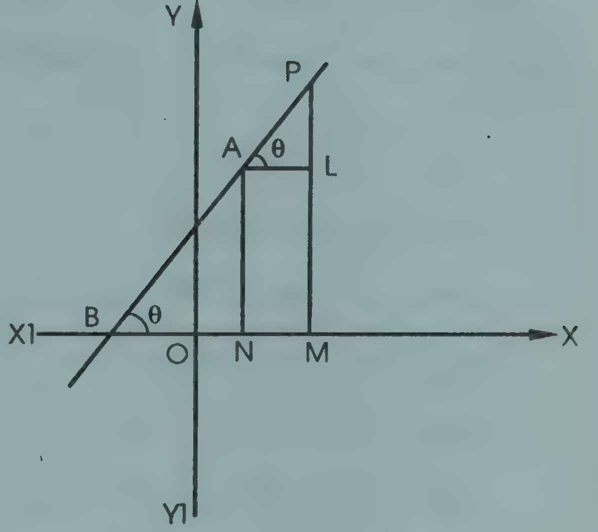
ಅಥವಾ $\boldsymbol{y = mx + c}$

ಇಲ್ಲಿ $\tan\theta = m$ ಎಂದು ಸೂಚಿಸಿದ್ದೇವೆ.

ಸೂಚನೆ : ಸರಳರೇಖೆಯು ಮೂಲಬಿಂದುವಿನ ಮೂಲಕ ಹಾದುಹೋದಲ್ಲಿ, y - ಛೇದಕವು ಶೂನ್ಯವಾಗುತ್ತದೆ. ಆಗ ಸರಳರೇಖೆಯ ಸಮೀಕರಣವು $y = mx$ ಆಗಿರುತ್ತದೆ.

II ಬಿಂದು - ಓಟ ರೂಪ

ಸರಳರೇಖೆಯೊಂದರ ಬಾಗು θ ಆಗಿರಲಿ. ಆಗ ಅದರ ಓಟವು $\tan\theta$ ಎಂದಾಗುತ್ತದೆ. $A(x_1, y_1)$ ಬಿಂದುವು ದತ್ತ ಬಿಂದುವಾಗಿರಲಿ. $P(x, y)$ ಸರಳರೇಖೆಯ ಮೇಲಿರುವ ಯಾವುದೇ ಬಿಂದುವಾಗಿರಲಿ.



ಚಿತ್ರ 9.15

A ಮತ್ತು P ಬಿಂದುಗಳಿಂದ, AN ಮತ್ತು PM ಗಳನ್ನು ಲಂಬವಾಗಿ x - ಅಕ್ಷಕ್ಕೂ, AL ಅನ್ನು PM ಗೆ ಲಂಬವಾಗಿ ಎಳೆಯಿರಿ. ಚಿತ್ರ 9.15ರ ಆಧಾರದ ಮೇರೆಗೆ

$\angle PAL = \theta$ ಮತ್ತು $\tan\theta = \dfrac{PL}{AL}$

ಆದರೆ, $PL = PM - LM = y - y_1$

$AL = NM = OM - ON = x - x_1$

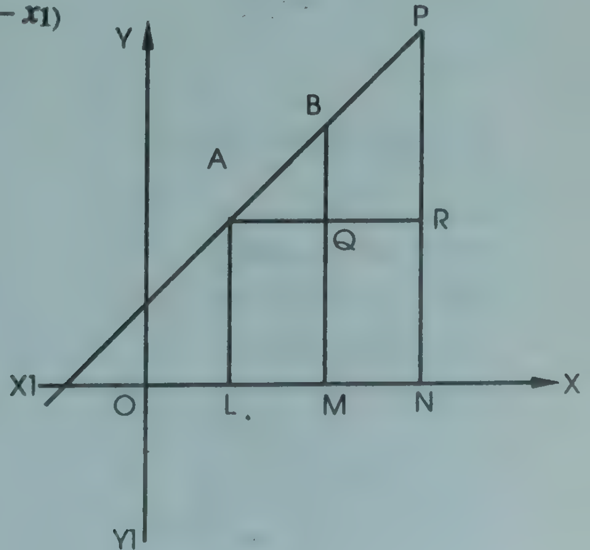
ಆದ್ದರಿಂದ, $\tan\theta = \dfrac{y - y_1}{x - x_1}$

ಅಥವಾ $y - y_1 = m(x - x_1)$

ಇಲ್ಲಿ, $\tan\theta = m$ ಎಂದು ಸೂಚಿಸಲಾಗಿದೆ.

III ಎರಡು ಬಿಂದುಗಳ ರೂಪ :

$A(x_1, y_1)$ ಮತ್ತು $B(x_2, y_2)$ ಬಿಂದುಗಳು ಸರಳರೇಖೆಯ ಮೇಲಿನ ದತ್ತ ಬಿಂದುಗಳಾಗಿರಲಿ. $P(x,y)$ ಸರಳ ರೇಖೆಯ ಮೇಲಿನ ಯಾವುದೇ ಬಿಂದುವಾಗಿರಲಿ.



ಚಿತ್ರ 9.16

A, B ಮತ್ತು P ಬಿಂದುಗಳಿಂದ AL, BM ಮತ್ತು PN ಗಳನ್ನು ಲಂಬವಾಗಿ x - ಅಕ್ಷಕ್ಕೆ ಎಳೆಯಿರಿ. A ಬಿಂದುವಿನಿಂದ AR ಅನ್ನು PN ಗೆ ಲಂಬವಾಗಿ ಎಳೆಯಿರಿ.

APR ಮತ್ತು ABQ ತ್ರಿಕೋನಗಳು ಸಮರೂಪವಾಗಿರುವುದರಿಂದ

$$\frac{PR}{BQ} = \frac{AR}{AQ} \qquad \dots (1)$$

ಚಿತ್ರ 9.16 ರಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿರುವಂತೆ

$$PR = PN - RN = PN - AL = y - y_1,$$

$$BQ = BM - QM = BM - AL = y_2 - y_1,$$

$$AR = LN = ON - OL = x - x_1,$$

$$AQ = LM = OM - OL = x_2 - x_1$$

ಆದ್ದರಿಂದ, ಸಮೀಕರಣ (1)ರಿಂದ

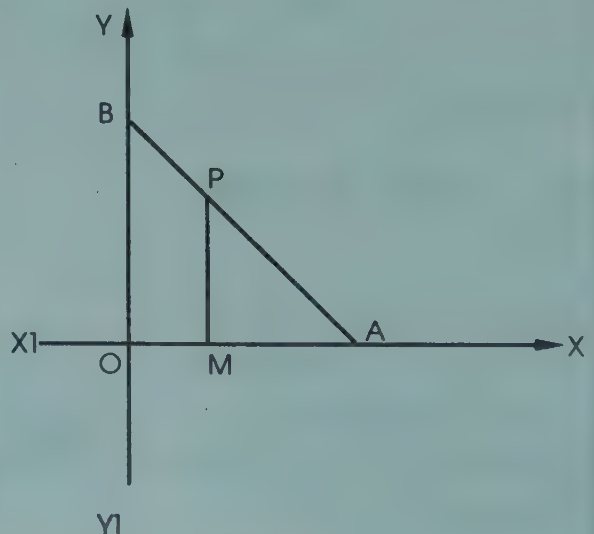
$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$$

ಅಥವಾ $y - y_1 = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$

ಸೂಚನೆ : ಮೇಲಿನ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಬಿಂದು - ಓಟ ಸಮೀಕರಣದೊಂದಿಗೆ ಹೋಲಿಸಿದಾಗ, $A(x_1, y_1)$ ಮತ್ತು $B(x_2, y_2)$ ಬಿಂದುಗಳ ಮೂಲಕ ಹಾದುಹೋಗುವ ಸರಳರೇಖೆಯ ಓಟವು $\dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ ಎಂದಾಗುತ್ತದೆ.

IV ಛೇದಕಗಳ ರೂಪ :

ಸರಳರೇಖೆಯೊಂದು x - ಅಕ್ಷದ ಮೇಲೆ $OA = a$ ಮತ್ತು y - ಅಕ್ಷದ ಮೇಲೆ $OB = b$ ರೇಖಾಂತರ (ಅಥವಾ ಛೇದಕ)ಗಳನ್ನು ರಚಿಸಲಿ. $P(x, y)$ ಬಿಂದುವು ಸರಳರೇಖೆಯ ಮೇಲಿನ ಯಾವುದೇ ಬಿಂದುವಾಗಿರಲಿ. P ಬಿಂದುವಿನಿಂದ PM ಅನ್ನು x - ಅಕ್ಷಕ್ಕೆ ಲಂಬವಾಗಿ ಎಳೆಯಿರಿ.



ಚಿತ್ರ 9.17

PMA ಮತ್ತು BOA ತ್ರಿಕೋನಗಳು ಸಮಾನರೂಪವಾಗಿರುವುದರಿಂದ

$$\frac{MP}{OB} = \frac{MA}{OA} \quad .... \quad (1)$$

ಚಿತ್ರ 9.17 ರಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿರುವಂತೆ

$$MA = OA - OM = a - x$$

ಆದ್ದರಿಂದ, ಸಮೀಕರಣ (1) ರಿಂದ

$$\frac{y}{b} = \frac{a-x}{a} = 1 - \frac{x}{a}$$

ಅಥವಾ $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$

ಇಲ್ಲಿ a ಮತ್ತು b ಗಳು x - ಮತ್ತು y - ಅಕ್ಷಗಳ ಛೇದಕಗಳಾಗಿವೆ.

V ಲಂಬ ರೂಪ :

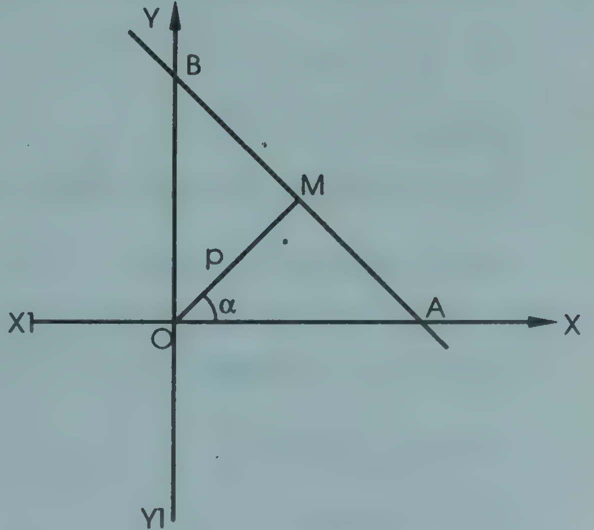
ಸರಳರೇಖೆಯೊಂದು ಅಕ್ಷಗಳನ್ನು ಕ್ರಮವಾಗಿ A ಮತ್ತು B ಬಿಂದುಗಳಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸಲಿ. ಮೂಲ ಬಿಂದುವಿನಿಂದ OM ಅನ್ನು ABಗೆ ಲಂಬವಾಗಿ ಎಳೆಯಿರಿ.

$OM = p$ ಮತ್ತು $A\hat{O}M = \alpha$ ಎಂದು ಸೂಚಿಸೋಣ.

MOA ತ್ರಿಕೋನದಲ್ಲಿ

$$\cos\alpha = \frac{OM}{OA} = \frac{p}{x - \text{ಛೇದಕ}}$$

ಅಥವಾ, x - ಛೇದಕ $= \frac{p}{\cos\alpha}$



ಚಿತ್ರ 9.18

ಅದೇ ರೀತಿ, MBO ತ್ರಿಕೋನದಲ್ಲಿ

$$\cos(90^\circ - \alpha) = \frac{OM}{OB}$$

ಅಥವಾ $OB = \frac{p}{\sin\alpha}$

ಅಥವಾ y– ಛೇದಕ $= \dfrac{p}{\sin\alpha}$

ಈಗ, ಛೇದಕ ರೂಪವು ಸರಳರೇಖೆಯ

$$\frac{x}{x-\text{ಛೇದಕ}} + \frac{y}{y-\text{ಛೇದಕ}} = 1$$

ಅಂದರೆ, $\dfrac{x}{\dfrac{p}{\cos\alpha}} + \dfrac{y}{\dfrac{p}{\sin\alpha}} = 1$

ಅಥವಾ, $x\cos\alpha + y\sin\alpha = p$

ಸೂಚನೆ : ಇಲ್ಲಿಯವರೆಗೆ ನಾವು ಸರಳರೇಖೆಯ ಹಲವು ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ರೂಪಿಸಿದ್ದೇವೆ. ಇವುಗಳೆಲ್ಲದರ ಆಧಾರದ ಮೇರೆಗೆ, ಸರಳರೇಖೆಯ ಸಮೀಕರಣವು, x, y ಗಳಲ್ಲಿನ ಒಂದನೆಯ ಘಾತದ ಸಮೀಕರಣವೆಂದು ಹೇಳಬಹುದು. ಆದ್ದರಿಂದ ಸರಳರೇಖೆಯ ಸಾಮಾನ್ಯ ರೂಪವನ್ನು $ax + by + c = 0$ ಎಂದು ಪರಿಗಣಿಸಲಾಗುವುದು.

9.4.2. ಸಾಮಾನ್ಯ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಪರಿವರ್ತಿಸುವ ವಿಧಾನ

1. ಸರಳ ರೇಖೆಯ ಸಾಮಾನ್ಯ ರೂಪ $ax + by + c = 0$ ಆಗಿರಲಿ.

   ಆಗ, $by = -ax - c$

   ಅಥವಾ $y = (-a/b)\,x + (-c/a)$

   ಈ ಸಮೀಕರಣವು ಈಗ ಓಟ - ಛೇದಕ ರೂಪದಲ್ಲಿದೆ.

   ಇದರಲ್ಲಿ ಸರಳರೇಖೆಯ ಓಟವು $= -\dfrac{a}{b} = -\dfrac{x\text{ನ ಸಹಾಂಕ}}{y\text{ನ ಸಹಾಂಕ}}$

   ಹಾಗೆಯೇ, y - ಛೇದಕ $= -\dfrac{c}{b} = -\dfrac{\text{ನಿಶ್ಚಲ ಪದ}}{y\text{ ನ ಸಹಾಂಕ}}$ ಎಂಬುದಾಗಿ ಅರ್ಥೈಸುತ್ತೇವೆ.

2. ಸಾಮಾನ್ಯ ಸಮೀಕರಣವು $ax + by + c = 0$ ಆಗಿರಲಿ.

   ಆಗ $ax + by = -c$

   $-c$ ನಿಂದ ಇಡೀ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಭಾಗಿಸಿದಾಗ

$$\frac{x}{\left(\dfrac{-c}{a}\right)} + \frac{y}{\left(\dfrac{-c}{b}\right)} = 1$$

   ಎಂದಾಗುತ್ತದೆ. ಈಗ ಮೇಲಿನ ಸಮೀಕರಣವು ಛೇದಕಗಳ ರೂಪದಲ್ಲಿದೆ.

   x – ಛೇದಕ $= -\dfrac{c}{a}$ ಮತ್ತು y – ಛೇದಕ $= -\dfrac{c}{b}$.

3. ಸಾಮಾನ್ಯ ಸಮೀಕರಣವು $ax + by + c = 0$ ಆಗಿರಲಿ.

ಈಗ, $a = r\cos\alpha$ $b = r\sin\alpha$ ಎಂದು ಆಯ್ಕೆ ಮಾಡಿದಾಗ,

$$a^2 + b^2 = r^2(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha) = r^2$$

ಮತ್ತು $$\cos\alpha = \frac{a}{r} = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

$$\sin\alpha = \frac{b}{r} = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

ಆಗುತ್ತವೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ಸಾಮಾನ್ಯ ಸಮೀಕರಣವು

$$x(r\cos\alpha) + y(r\sin\alpha) = -c$$

ಅಥವಾ $$x\cos\alpha + y\sin\alpha = -\frac{c}{r} = \frac{-c}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

ಈ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ನಾವು ಲಂಬರೂಪವೆಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ.

ಉಪಪ್ರಮೇಯ : $ax + by + c = 0$ ಸರಳರೇಖೆಯು, $A(x_1, y_1)$ ಮತ್ತು $B(x_2, y_2)$ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಜೋಡಿಸುವ ರೇಖಾಖಂಡವನ್ನು

$$-\left(\frac{ax_1 + by_1 + c}{ax_2 + by_2 + c}\right)$$

ಪ್ರಮಾಣದಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುತ್ತದೆ.

ಸಾಧನೆ : $ax + by + c = 0$ ಸರಳರೇಖೆಯು AB ರೇಖಾಖಂಡವನ್ನು C ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ $m : n$ ಪ್ರಮಾಣದಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸಲಿ. ಆಗ

$$C \equiv \left(\frac{mx_2 + nx_1}{m+n}, \frac{my_2 + ny_1}{m+n}\right).$$

ಈಗ, ಬಿಂದುವು $ax + by + c = 0$ ಸರಳರೇಖೆಯ ಮೇಲಿರುವುದರಿಂದ

$$a\left(\frac{mx_2 + nx_1}{m+n}\right) + b\left(\frac{my_2 + ny_1}{m+n}\right) + c = 0$$

ಅಥವಾ $a(mx_2 + nx_1) + b(my_2 + ny_1) + c(m + n) = 0$

ಅಥವಾ $m(ax_2 + by_2 + c) + n(ax_1 + by_1 + c) = 0$

ಅಥವಾ $\frac{m}{n} = -\frac{(ax_1 + by_1 + c)}{(ax_2 + by_2 + c)}$

ಸೂಚನೆ : $\frac{m}{n}$ ನ ಚಿಹ್ನೆಯು ಋಣವಾಗಿದ್ದಲ್ಲಿ A ಮತ್ತು B ಬಿಂದುಗಳು ಸರಳರೇಖೆಯ ಒಂದೇ ಬದಿಯಲ್ಲಿರುತ್ತವೆ ಮತ್ತು $\frac{m}{n}$ ನ ಚಿಹ್ನೆಯು ಧನವಾಗಿದ್ದಲ್ಲಿ A ಮತ್ತು B ಬಿಂದುಗಳು ಸರಳರೇಖೆಯ ಆಚೆ ಈಚೆಗಳ ವಿರುದ್ಧಬದಿಗಳಿರುತ್ತವೆ.

ಉದಾಹರಣೆಗಳು

1. (5,6)ಮತ್ತು (8,3)ಬಿಂದುಗಳ ಮೂಲಕ ಹಾದುಹೋಗುವ ರೇಖಾಭಾಗದ ಓಟವನ್ನು ಗೊತ್ತುಮಾಡಿ.

   (x_1,y_1) ಮತ್ತು (x_2,y_2) ಬಿಂದುಗಳ ಮೂಲಕ ಹಾದು ಹೋಗುವ ರೇಖಾಭಾಗದ

   ಓಟವು $= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{3-6}{8-5} = \frac{-3}{3} = -1$

   ಆಗಿರುತ್ತದೆ.

2. (2,3) ಮತ್ತು (3,4) ಬಿಂದುಗಳ ಮೂಲಕ ಹಾದುಹೋಗುವ ರೇಖೆಯ ಬಾಗುವನ್ನು ಗೊತ್ತುಮಾಡಿ.

   ಸರಳರೇಖೆಯ ಬಾಗು θ ಎಂದಿರಲಿ ಮತ್ತು $\tan\theta$ = ಓಟ ...(1)

   (2, 3) ಮತ್ತು (3, 4) ಬಿಂದುಗಳ ಮೂಲಕ ಹಾದುಹೋಗುವ ರೇಖೆಯ

   ಓಟ $= \frac{4-3}{3-2} = 1$

   ಸಮೀಕರಣ (1) ರಿಂದ, $\tan\theta = 1$

   ಆದ್ದರಿಂದ, $\theta = \frac{\pi}{4}$.

3. x -ಅಕ್ಷದಿಂದ 7 ಮಾನಗಳಷ್ಟು ದೂರದಲ್ಲಿ ಸಮಾಂತರವಾಗಿರುವ ಸರಳರೇಖೆಯ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಗೊತ್ತುಮಾಡಿ.

   x - ಅಕ್ಷಕ್ಕೆ ಸಮಾಂತರವಾಗಿರುವ ರೇಖೆಯ ಸಾಮಾನ್ಯ ಸಮೀಕರಣವು $y = h$ ಎಂದು ಪರಿಗಣಿಸುತ್ತೇವೆ. (h ಎಂಬುದು x - ಅಕ್ಷ ಮತ್ತು ಸರಳರೇಖೆಯ ನಡುವಿನ ಅಂತರ.)

   ಆದ್ದರಿಂದ ಸರಳರೇಖೆಯ ಸಮೀಕರಣವು $y = 7$ ಎಂದಾಗುತ್ತದೆ.

4. y - ಅಕ್ಷಕ್ಕೆ ಸಮಾಂತರವಾಗಿರುವ ಮತ್ತು (4,5) ಮೂಲಕ ಹಾದುಹೋಗುವ ಸರಳರೇಖೆಯ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಗೊತ್ತುಮಾಡಿ.

y - ಅಕ್ಷಕ್ಕೆ ಸಮಾಂತರವಾಗಿರುವ ಯಾವುದೇ ಸರಳರೇಖೆಯು x - ಅಕ್ಷಕ್ಕೆ ಲಂಬವಾಗಿರುತ್ತದೆ. ಆ ಸರಳರೇಖೆಯ ಸಮೀಕರಣವು $x = k$ ಮಾದರಿಯಲ್ಲಿರುತ್ತದೆ. ಇಲ್ಲಿ k ಎಂಬುದು y - ಅಕ್ಷದ ಮತ್ತು ಸರಳರೇಖೆಯ ನಡುವಿನ ಅಂತರ.

ಈಗ ಸರಳರೇಖೆಯು y - ಅಕ್ಷಕ್ಕೆ ಸಮಾಂತರವಾಗಿದ್ದು (4,5) ಮೂಲಕ ಹಾದುಹೋಗುವುದರಿಂದ $k = 4$. ಆದ್ದರಿಂದ ಸಮೀಕರಣ $x = 4$ ಆಗಿರುತ್ತದೆ.

5. ಎರಡು ಅಕ್ಷಗಳಲ್ಲಿ ಸಮಬಾಗುಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿರುವ ಮತ್ತು y - ಛೇದಕವು $-2/3$ ಆಗಿರುವ ಸರಳರೇಖೆಯ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಗೊತ್ತುಮಾಡಿ.

y - ಛೇದಕ $-2/3$ ಆಗಿದ್ದು, ಎರಡೂ ಅಕ್ಷಗಳಲ್ಲಿ ಸಮಬಾಗುವನ್ನು ಹೊಂದಿರುವ ಎರಡು ಸರಳರೇಖೆಗಳಿರುತ್ತವೆ.

(i) 45° ಬಾಗು ಇರುವ ಸರಳರೇಖೆಯ ಸಮೀಕರಣವು,

$$y = mx + c$$

$$y = (\tan 45^\circ)\, x + \left(-\frac{2}{3}\right)$$

ಅಥವಾ $3(x - y) + 2 = 0$

(ii) 135° ಬಾಗು ಇರುವ ಸರಳರೇಖೆಯ ಸಮೀಕರಣವು

$$y = (\tan 135^\circ)\, x + \left(-\frac{2}{3}\right)$$

ಅಥವಾ $3(x + y) + 2 = 0$

6. $(-5, 6)$ ಮೂಲಕ ಹಾದುಹೋಗುವ ಮತ್ತು 150° ಬಾಗುವನ್ನು ಹೊಂದಿರುವ ಸರಳರೇಖೆಯನ್ನು ಗೊತ್ತುಮಾಡಿ.

$y - y_1 = m(x - x_1)$ ರೂಪದ ಸಮೀಕರಣವು

$$y - 6 = (\tan 150^\circ)(x + 5)$$

ಅಥವಾ $y - 6 = -\frac{1}{\sqrt{3}}(x + 5)$

ಅಥವಾ $x + \sqrt{3}y + 5 - 6\sqrt{3} = 0$ ಎಂದಾಗುತ್ತದೆ.

7. $(a, 0)$ ಮತ್ತು $(0, b)$ ಬಿಂದುಗಳ ಮೂಲಕ ಹಾದು ಹೋಗುವ ಸರಳರೇಖೆಯ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಗೊತ್ತು ಮಾಡಿ.

ಸರಳರೇಖೆಯ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

ರೂಪದಲ್ಲಿ ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೆ

$$y - 0 = \frac{b - 0}{0 - a}(x - a)$$

$$-ay = bx - ab$$

ಅಥವಾ $bx + ay = ab$

ಅಥವಾ $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ ಎಂದಾಗುತ್ತದೆ.

8. $y = mx + c$ ಸರಳರೇಖೆಯು $(2, 5)$ ಮತ್ತು $(-3, 7)$ ಬಿಂದುಗಳ ಮೂಲಕ ಹಾದುಹೋದರೆ, m ಮತ್ತು c ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಸರಳರೇಖೆಯು $(2, 5)$ ಬಿಂದುವಿನ ಮೂಲಕ ಹಾದು ಹೋಗುವುದರಿಂದ

$$5 = 2m + c \qquad \text{... (1)}$$

ಮತ್ತು $(-3, 7)$ ಬಿಂದುವಿನ ಮೂಲಕ ಹಾದು ಹೋಗುವುದರಿಂದ

$$7 = -3m + c \qquad \text{...(2)}$$

(1) ಮತ್ತು (2) ಏಕಕಾಲಿಕ ಸಮೀಕರಣಗಳು. ಇವುಗಳನ್ನು ಪರಿಹರಿಸಿದಾಗ

$$m = -\frac{2}{5} \text{ ಮತ್ತು } c = \frac{29}{5}$$

ಎಂದಾಗುತ್ತದೆ.

9. $A(4,5)$, $B(-2,1)$ ಮತ್ತು $C(6,-3)$ ಬಿಂದುಗಳು, ABC ತ್ರಿಕೋನದ ಶೃಂಗಗಳಾದರೆ, A ಶೃಂಗದ ಮೂಲಕ ಹಾದುಹೋಗುವ ಮಧ್ಯರೇಖೆಯ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಗೊತ್ತುಮಾಡಿ.

BC ಯ ಮಧ್ಯ ಬಿಂದುವು $\equiv \left[\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right]$

$$\equiv \left[\frac{-2 + 6}{2}, \frac{1 - 3}{2}\right] = [2, -1]$$

ಈಗ, (2, –1) ಮತ್ತು A (4, 5) ಬಿಂದುಗಳ ಮೂಲಕ ಹಾದು ಹೋಗುವ ಸರಳರೇಖೆಯು

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_2)$$

ಅಂದರೆ, $$y + 1 = \frac{5+1}{4-2}(x-2)$$

ಅಥವಾ $3x - y - 7 = 0$ ಆಗಿರುತ್ತದೆ.

10. (3,4)ಮತ್ತು (–1,3)ಬಿಂದುಗಳನ್ನು 3:4ಪ್ರಮಾಣದಲ್ಲಿ ಅಂತರೀಯವಾಗಿ ವಿಭಜಿಸುವ ಮತ್ತು x–ಅಕ್ಷದೊಂದಿಗೆ 135° ಬಾಗುವನ್ನು ಹೊಂದಿರುವ ಸರಳರೇಖೆಯ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಗೊತ್ತುಮಾಡಿ.

P ಬಿಂದುವು (3, 4) ಮತ್ತು (–1, 3) ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಜೋಡಿಸುವ ರೇಖಾಖಂಡವನ್ನು 3:4 ಪ್ರಮಾಣದಲ್ಲಿ ವಿಭಜಿಸಲಿ. ಆಗ

$$P \equiv \left[\frac{mx_2 + nx_1}{m+n}, \frac{my_2 + ny_1}{m+n}\right]$$ ಸೂತ್ರದಿಂದ

$$P \equiv \left[\frac{3(-1) + 4.3}{3+4}, \frac{3.3 + 4.3}{3+4}\right]$$

$$\equiv \left[\frac{9}{7}, \frac{25}{7}\right]$$

ಸರಳರೇಖೆಯ ಓಟ $= \tan 135° = -1$.

ಆದ್ದರಿಂದ, ಸರಳರೇಖೆಯ ಸಮೀಕರಣವು

$y - y_1 = m(x - x_1)$ ರೂಪದಲ್ಲಿ

$$y - \frac{25}{7} = -1\left(x - \frac{9}{7}\right)$$

ಅಥವಾ $7(x + y) - 34 = 0$ ಆಗುತ್ತದೆ.

11. x–ಛೇದಕವು –3 ಮತ್ತು y–ಛೇದಕವು 4 ಮಾನಗಳಿಷ್ಟಿದ್ದರೆ, ಸರಳರೇಖೆಯ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಗೊತ್ತುಮಾಡಿ.

ಸರಳರೇಖೆಯ ಸಮೀಕರಣವು $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ ರೂಪದಲ್ಲಿ

$\frac{x}{-3} + \frac{y}{4} = 1$ ಅಥವಾ $4x - 3y + 12 = 0$.

12. (7, –3) ಮತ್ತು (–8, 1) ಮೂಲಕ ಹಾದುಹೋಗುವ ಸರಳರೇಖೆಯ ಛೇದಕಗಳ ಪ್ರಮಾಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಎರಡು ಬಿಂದುಗಳ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಸರಳರೇಖೆಯ ಸಮೀಕರಣವು

$$y + 3 = \frac{-1+3}{-8-7}(x-7)$$

ಅಥವಾ $14x + 15y = -17$

ಅಥವಾ $\dfrac{x}{\left(\frac{-17}{4}\right)} + \dfrac{y}{\left(\frac{-17}{15}\right)} = 1$

ಇಲ್ಲಿ ಛೇದಕಗಳು $a = -17/4$ ಮತ್ತು $b = -17/5$

$$\therefore \frac{a}{b} = \frac{-17}{4} \times \frac{15}{-17} = \frac{15}{4}.$$

13. (3, –4) ಮತ್ತು (5,2) ಬಿಂದುಗಳ ರೇಖಾಖಂಡದ ದ್ವಿಭಾಜಕದ ಮೂಲಕ ಹಾದು ಹೋಗುವ ಮತ್ತು $x-$, $y-$ ಛೇದಕಗಳು 2:1 ಪ್ರಮಾಣದಲ್ಲಿರುವ ಸರಳರೇಖೆಯ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಗೊತ್ತುಮಾಡಿ.

M ಎಂಬುದು (3,–4) ಮತ್ತು (5,2) ಬಿಂದುಗಳ ರೇಖಾಖಂಡದ ಮಧ್ಯಬಿಂದುವಾಗಿರಲಿ.

ಆಗ, $M \equiv \left(\dfrac{x_1+x_2}{2}, \dfrac{y_1+y_2}{2}\right)$

ಅಂದರೆ, $M \equiv \left(\dfrac{3+5}{2}, \dfrac{-4+2}{2}\right) \equiv (4, -1).$

ಅಪೇಕ್ಷಿತ ರೇಖೆಯ ಛೇದಕಗಳು a ಮತ್ತು b ಆಗಿರಲಿ.

ದತ್ತ ನಿಯಮದಂತೆ $\dfrac{a}{b} = \dfrac{2}{1}$, ಅಥವಾ $a = 2b$.

ಛೇದಕಗಳ ರೂಪದ ಸಮೀಕರಣವು $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = 1$

ಅಂದರೆ, $\dfrac{x}{2b} + \dfrac{y}{b} = 1$

ಅಥವಾ $x + 2y = 2b$ ಆಗಿರುತ್ತದೆ.

ಈ ರೇಖೆಯು (4,–1) ಮೂಲಕ ಹಾದುಹೋಗುವುದರಿಂದ

$(4) + 2(-1) = 2b$ ಅಥವಾ $b = 1$

ಆದ್ದರಿಂದ, $a = 2b = 2(1) = 2$

ಸರಳರೇಖೆಯ ಸಮೀಕರಣವು $x + 2y = 2$ ಆಗಿರುತ್ತದೆ.

ಅಭ್ಯಾಸ - 9.5

1. 150° ಬಾಗುವನ್ನು ಹೊಂದಿರುವ ಮತ್ತು y-ಛೇದಕವು $\frac{3}{2}$ ಇರುವ ಸರಳರೇಖೆಯ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಗೊತ್ತುಮಾಡಿ.
2. 120° ಬಾಗು ಮತ್ತು y-ಛೇದಕವು 7 ಮಾನಗಳಷ್ಟಿರುವ ಸರಳರೇಖೆಯನ್ನು ಗೊತ್ತುಮಾಡಿ.
3. ಓಟ 2/7 ಇರುವ ಮತ್ತು (–3, 8) ಬಿಂದುವಿನ ಮೂಲಕ ಹಾದು ಹೋಗುವ ಸರಳರೇಖೆಯ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಗೊತ್ತುಮಾಡಿ.
4. ಓಟ –4 ಮಾನಗಳಷ್ಟಿರುವ ಮತ್ತು (5/7, 6/7) ಬಿಂದುವಿನ ಮೂಲಕ ಹಾದುಹೋಗುವ ಸರಳರೇಖೆಯ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಗೊತ್ತುಮಾಡಿ.
5. x - ಅಕ್ಷಕ್ಕೆ 2/3 ಮಾನಗಳಷ್ಟು ದೂರದ ಸಮಾಂತರದಲ್ಲಿರುವ ಸರಳರೇಖೆಯ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಗೊತ್ತುಮಾಡಿ.
6. x ಅಕ್ಷದಿಂದ –5 ಮಾನಗಳಷ್ಟು ದೂರದ ಸಮಾಂತರದಲ್ಲಿರುವ ಸರಳರೇಖೆಯ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಗೊತ್ತುಮಾಡಿ.
7. y-ಅಕ್ಷಕ್ಕೆ 3/4 ಮಾನಗಳಷ್ಟು ಅಂತರದಲ್ಲಿ ಸಮಾಂತರದಲ್ಲಿರುವ ಸರಳರೇಖೆಯನ್ನು ಗೊತ್ತುಮಾಡಿ.
8. y-ಅಕ್ಷಕ್ಕೆ –8 ಮಾನಗಳಷ್ಟು ಅಂತರದಲ್ಲಿ ಸಮಾಂತರದಲ್ಲಿರುವ ಸರಳರೇಖೆಯನ್ನು ಗೊತ್ತುಮಾಡಿ.
9. (–4, –3) ಬಿಂದುವಿನ ಮೂಲಕ ಹಾದು ಹೋಗುವ ಸರಳರೇಖೆಯ ಬಾಗು 45°. ಇದರ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಗೊತ್ತುಮಾಡಿ.
10. ಕೆಳಗೆ ಸೂಚಿಸಿರುವ ಬಿಂದುಗಳ ಮೂಲಕ ಹಾದು ಹೋಗುವ ಸರಳರೇಖೆಗಳ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಗೊತ್ತುಮಾಡಿ.

    (i) (3, 6), (5, 9)

(ii) (0, 0), (1, 4)

(iii) $(at_1{}^2, 2at_1), (at_2{}^2, 2at_2)$

(iv) $\left(at_1, \frac{a}{t_1}\right), \left(at_2, \frac{a}{t_2}\right)$

(v) $\left(0, \frac{2}{3}\right), \left(\frac{4}{5}, 0\right)$

11. x - ಮತ್ತು y-ಛೇದಕಗಳು 5 ಮತ್ತು –6 ಇರುವ ಸರಳರೇಖೆಯ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಗೊತ್ತುಮಾಡಿ.

12. (–2, 3) ಬಿಂದುವಿನ ಮೂಲಕ ಹಾದುಹೋಗುವ, ಸಮಾನ ರೇಖಾಂತರಗಳುಳ್ಳ ಮತ್ತು ವಿರುದ್ಧ ಚಿಹ್ನೆಗಳುಳ್ಳ ಸರಳರೇಖೆಯ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಗೊತ್ತುಮಾಡಿ.

13. (5,2) ಬಿಂದುವಿನ ಮೂಲಕ ಹಾದುಹೋಗುವ ಮತ್ತು y-ಛೇಡಕವು x-ಛೇದಕದ ಎರಡರಷ್ಟಿರುವ ಸರಳರೇಖೆಯ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಗೊತ್ತುಮಾಡಿ.

14. (4, 10) ಬಿಂದುವಿನ ಮೂಲಕ ಹಾದುಹೋಗುವ ಮತ್ತು ಅಕ್ಷಗಳೊಂದಿಗೆ 10 ಚದರಮಾನಗಳಷ್ಟು ವಿಸ್ತೀರ್ಣವುಳ್ಳ ತ್ರಿಕೋನವನ್ನು ನಿರ್ಮಿಸುವ ಸರಳರೇಖೆಯ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಗೊತ್ತುಮಾಡಿ.

15. (4, –5) ಮತ್ತು (6, 3) ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸುವ ರೇಖೆಯ ದ್ವಿಭಾಜಕದ ಮೂಲಕ ಹಾದು ಹೋಗುವ ಮತ್ತು x– , y – ಛೇದಕಗಳು 3:4 ಪ್ರಮಾಣದಲ್ಲಿರುವ ಸರಳರೇಖೆಯ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಗೊತ್ತುಮಾಡಿ.

16. (–2, 3) ಬಿಂದುವಿನ ಮೂಲಕ ಹಾದು ಹೋಗುವ ಮತ್ತು ಅಕ್ಷಗಳ ನಡುವಿನ ರೇಖಾಭಾಗವು 3:4 ಪ್ರಮಾಣದಲ್ಲಿ ವಿಭಜಿತವಾಗುವ ಸರಳರೇಖೆಯ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಗೊತ್ತುಮಾಡಿ.

17. (4, 0) ಬಿಂದುವಿನ ಮೂಲಕ ಹಾದು ಹೋಗುವ ಮತ್ತು x –, y – ಛೇದಕಗಳ ಮೊತ್ತವು 6 ಆದರೆ, ಸರಳರೇಖೆಯ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಗೊತ್ತುಮಾಡಿ.

18. ಅಕ್ಷಗಳನ್ನು (3, 0) ಮತ್ತು (0, –4) ಬಿಂದುಗಳಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುವ ಸರಳರೇಖೆಯನ್ನು ಗೊತ್ತುಮಾಡಿ.

19. ಸರಳರೇಖೆಯೊಂದರ, ಅಕ್ಷಗಳ ನಡುವಿನ ರೇಖಾಭಾಗವು (x_1, y_1) ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ವಿಭಜಿತವಾಗಿ, ಅದರ ಸಮೀಕರಣವು $\frac{x}{2x_1} + \frac{y}{2y_1} = 1$ ಆದರೆ

(i) ಸರಳರೇಖೆಯ ಓಟವನ್ನು ಗೊತ್ತುಮಾಡಿ;

(ii) ಲಂಬರೂಪಾಂತರವನ್ನು ನಿರೂಪಿಸಿ;

(iii) ಮೂಲ ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ಲಂಬದ ಉದ್ದವನ್ನು ಗೊತ್ತುಮಾಡಿ.

20. ಮೂಲ ಬಿಂದುವಿನಿಂದ 5 ಮಾನಗಳಷ್ಟು ಉದ್ದವಿರುವ ಲಂಬದ ಬಾಗು 30° ಆಗಿರುವ ಸರಳರೇಖೆಯ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಗೊತ್ತುಮಾಡಿ.

21. ಕೆಳಗೆ ಸೂಚಿಸಿರುವ ಲಂಬದ ಉದ್ದ ಮತ್ತು ಬಾಗುವಿಗೆ ಅನುಗುಣವಾಗಿ ಸರಳರೇಖೆಯ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಗೊತ್ತುಮಾಡಿ.

(i) $p = -\frac{8}{3},\ \alpha = 135°$

(ii) $p = 3,\ \alpha = 45°$

(iii) $p = -5,\ \alpha = 60°$

22. ಕೆಳಗೆ ಸೂಚಿಸಿರುವ ನಿಯಮಕ್ಕನುಗುಣವಾಗಿ $3x - ay + 1 = 0$ ಸರಳರೇಖೆಯು

(i) $(-3, 4)$ ಬಿಂದುವಿನ ಮೂಲಕ ಹಾದು ಹೋದಾಗ

(ii) $(0,2)$ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ y - ಅಕ್ಷವನ್ನು ಛೇದಿಸಿದಾಗ

(iii) ಸರಳರೇಖೆಯ ಓಟ 2 ಆದಾಗ

aಯ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಗೊತ್ತುಮಾಡಿ.

23. $(2, 9)$ ಮತ್ತು $(4, -5)$ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸುವ ರೇಖೆಯನ್ನು $y = 3x - 2$ ಸರಳರೇಖೆಯು ಯಾವ ಪ್ರಮಾಣದಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುತ್ತದೆ.

24. $(-4, 1)$ ಮತ್ತು $(2,7)$ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸುವ ರೇಖೆಯನ್ನು $2x + 3y - 5 = 0$ ಸರಳರೇಖೆಯು ಯಾವ ಪ್ರಮಾಣದಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುತ್ತದೆ?

25. $(-1, 2)$ ಮತ್ತು $(-4, -3)$ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸುವ ರೇಖೆಯು $(2,2)$ ಮತ್ತು $(-5, 7)$ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸುವ ಸರಳರೇಖೆಯನ್ನು ಯಾವ ಪ್ರಮಾಣದಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುತ್ತದೆ.

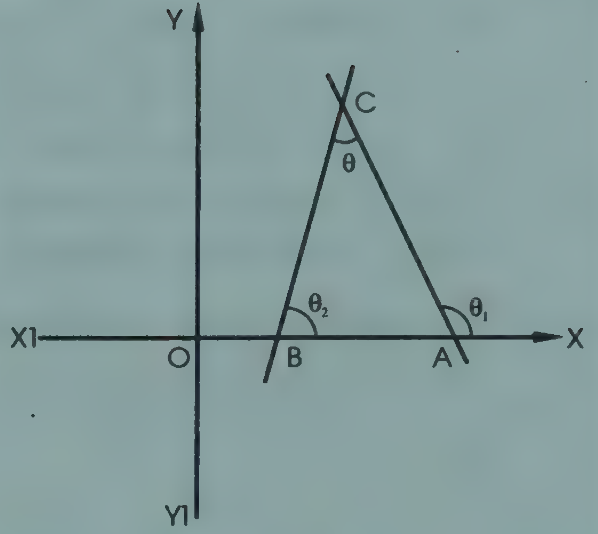
9.5 ಎರಡು ಸರಳರೇಖೆಗಳ ನಡುವಿನ ಕೋನ

ಸರಳರೇಖೆಗಳ ಸಮೀಕರಣಗಳು $y = m_1x + c_1$ ಮತ್ತು $y = m_2x + c_2$ ಎಂದಿರುವಾಗ, ಸರಳರೇಖೆಗಳ ನಡುವಿನ ಲಘುಕೋನವು

$$\theta = \tan^{-1}\left|\frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}\right|$$

ಎಂದು ತೋರಿಸೋಣ.

ದತ್ತ ಸರಳರೇಖೆಗಳು C ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸಲಿ. ಸರಳರೇಖೆಗಳ ಓಟವು ಕ್ರಮವಾಗಿ $\tan\theta_1$ ಮತ್ತು $\tan\theta_2$ ಆಗಿರಲಿ. ಸರಳರೇಖೆಗಳ ನಡುವಿನ ಕೋನವು θ ಆಗಿರಲಿ.



ಚಿತ್ರ 9.19

ಚಿತ್ರ 9.19ರಲ್ಲಿ, ABC ತ್ರಿಕೋನದಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿರುವಂತೆ

$\theta_1 = \theta_2 + \theta$ (θ_1 ಬಾಹ್ಯಕೋನವಾದ್ದರಿಂದ)

ಅಥವಾ $\theta = \theta_1 - \theta_2$ ... (1)

ಈಗ, $$\tan(\theta_1 - \theta_2) = \frac{\tan\theta_1 - \tan\theta_2}{1 + \tan\theta_1 \tan\theta_2}$$

[$\tan(A - B)$ ಸೂತ್ರವನ್ನು ಬಳಸುವುದರಿಂದ]

ಸರಳರೇಖೆಗಳ ಓಟಗಳು $\tan\theta_1 = m_1$ ಮತ್ತು $\tan\theta_2 = m_2$ ಆಗಿರುವುದರಿಂದ

$$\tan(\theta_1 - \theta_2) = \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}$$

ಆಗಿರುತ್ತದೆ. ಈಗ, θ ಲಘುಕೋನವಾಗಿರಬೇಕಾದರೆ, ಸಮೀಕರಣ (1) ರಿಂದ

$$\tan\theta = \left|\frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}\right|$$

ಅಥವಾ $$\theta = \tan^{-1}\left|\frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}\right|$$

ಸೂಚನೆ :

(1) ಸರಳರೇಖೆಗಳು **ಸಮಾಂತರ ರೇಖೆಗಳಾದಲ್ಲಿ** ರೇಖೆಗಳ ನಡುವಿನ ಕೋನವು ಶೂನ್ಯವಾಗಿರುತ್ತದೆ. ಅಂದರೆ, $\theta = 0 \Rightarrow \tan\theta = 0$ ಅಥವಾ $m_1 - m_2 = 0$, A{ãMÝ™{ã, $m_1 = m_2$ ಆಗಿರುತ್ತದೆ.

(2) ಸರಳರೇಖೆಗಳು **ಲಂಬರೇಖೆಗಳಾದರೆ,** $\theta = 90° \Rightarrow \tan\theta \to \infty$ ಅಂದರೆ $1 + m_1 m_2 = 0$ ಅಥವಾ $m_1 m_2 = -1$. ಆದ್ದರಿಂದ ಲಂಬರೇಖೆಗಳ ಓಟಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧವು -1 ಆಗಿರುತ್ತದೆ.

(3) ಮೇಲಿನ ಸೂಚನೆಗಳ ಆಧಾರದಮೇರೆಗೆ, $ax + by + c = 0$ ಸರಳರೇಖೆಗೆ ಸಮಾಂತರವಾಗಿರುವ ಸರಳರೇಖೆಯ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು $ax + by + c_1 = 0$ ಎಂದು ಪರಿಗಣಿಸುತ್ತೇವೆ. ಇದೇ ರೀತಿ, $ax + by + c = 0$ ಸರಳರೇಖೆಗೆ ಲಂಬವಾಗಿರುವ ಸರಳರೇಖೆಯ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು $bx - ay + k_2 = 0$ ಎಂದು ಪರಿಗಣಿಸುತ್ತೇವೆ.

ಉದಾಹರಣೆಗಳು

1. $y = \sqrt{3}\,x + 4$ ಮತ್ತು $\sqrt{3}\,y = x + 7$ ಸರಳರೇಖೆಗಳ ನಡುವಿನ ಕೋನವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಇಲ್ಲಿ, $m_1 = \sqrt{3}$ ಮತ್ತು $m_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}$

ಆದ್ದರಿಂದ, $\tan\theta = \left|\frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}\right|$

$$\tan\theta = \left|\frac{\sqrt{3} - 1/\sqrt{3}}{1+1}\right| = \frac{3-1}{\sqrt{3}.2} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

ಅಥವಾ $\theta = 30°$

2. $ax + by + c = 0$ ಮತ್ತು $(a + b)\,x - (a - b)\;y = 0$ ಸರಳರೇಖೆಗಳ ನಡುವಿನ ಕೋನವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಇಲ್ಲಿ, $m_1 = \frac{-a}{b}$ ಮತ್ತು $m_2 = \frac{a+b}{a-b}$

ಆದ್ದರಿಂದ, $\tan\theta = \left|\frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}\right| = \left|\frac{\frac{-a}{b} - \frac{a+b}{a-b}}{1 + \left(\frac{-a}{b}\right)\left(\frac{a+b}{a-b}\right)}\right|$

$$= \left|\frac{-[a(a-b)+b(a+b)]}{b(a-b) - a(a+b)}\right|$$

$$= \left|\frac{-(a^2+b^2)}{-(a^2+b^2)}\right| = 1$$

$\therefore$ $\tan\theta$ ಅಥವಾ $\theta = 45°$.

3. $2x+5y-6=0$ ಸರಳರೇಖೆಗೆ (i) ಸಮಾಂತರವಾಗಿಯೂ, (ii) ಲಂಬವಾಗಿಯೂ ಇರುವ ಮತ್ತು $(4,-7)$ ಬಿಂದುವಿನ ಮೂಲಕ ಹಾದುಹೋಗುವ ಸರಳರೇಖೆಗಳ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

(i) $2x + 5y - 6 = 0$ ಸರಳರೇಖೆಗೆ ಸಮಾಂತರವಾಗಿರುವ ಸರಳರೇಖೆಯ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು $2x+5y+k_1 = 0$ ಎಂದು ಪರಿಗಣಿಸುತ್ತೇವೆ. ಈ ಸರಳರೇಖೆಯು $(4,-7)$ ಬಿಂದುವಿನ ಮೂಲಕ ಹಾದುಹೋಗುವುದರಿಂದ

$$2(4)+5(-7)+k_1 = 0, \text{ ಅಥವಾ } k_1 = 35-8 = 27.$$

ಆದ್ದರಿಂದ ಸರಳರೇಖೆಯ ಸಮೀಕರಣವು $2x+5y+27=0$ ಎಂದಾಗುತ್ತದೆ.

(ii) ಇದೇ ರೀತಿ, $2x+5y-6=0$ ಸರಳರೇಖೆಗೆ ಲಂಬವಾಗಿರುವ ಸರಳರೇಖೆಯ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು $5x-2y+k_2 = 0$ ಎಂದು ಪರಿಗಣಿಸುತ್ತೇವೆ.

$(4,-7)$ ಬಿಂದುವಿನ ಮೂಲಕ ಹಾದುಹೋಗುವುದರಿಂದ

$$5(4)-2(-7)+k_2 = 0 \text{ ಅಥವಾ } k_2 = -34.$$

ಆದ್ದರಿಂದ ಸರಳರೇಖೆಯ ಸಮೀಕರಣವು $5x-2y-34=0$ ಎಂದಾಗುತ್ತದೆ.

4. $y-3px+4=0$ ಮತ್ತು $(2p-1)x-(8p-1)y-6=0$ ಸರಳರೇಖೆಗಳು ಒಂದಕ್ಕೊಂದು ಲಂಬವಾಗಿದ್ದಲ್ಲಿ p ನ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಸರಳರೇಖೆಗಳ ಓಟಗಳು

$$m_1 = 3p \text{ ಮತ್ತು } m_2 = \frac{2p-1}{8p-1}$$

ಲಂಬವಾಗಿರುವ ಸರಳರೇಖೆಗಳ ಓಟಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧವು -1 ಆಗಿರುತ್ತದೆ.

ಅಂದರೆ, $m_1m_2 = -1$

ಅಥವಾ $(3p)\left(\frac{2p-1}{8p-1}\right) = -1$

ಅಥವಾ $6p^2 - 3p = -8p + 1$

ಅಥವಾ $6p^2 + 5p - 1 = 0$

ಅಥವಾ $(6p-1)(p+1) = 0$ ಅಂದರೆ, $p = \frac{1}{6}, p = -1.$

5. $(2, -3)$ ಬಿಂದುವಿನ ಮೂಲಕ ಹಾದುಹೋಗುವ ಮತ್ತು $5x + 6y - 2 = 0$ ಸರಳರೇಖೆಯು $45°$ ಕೋನವನ್ನು ಉಂಟುಮಾಡುವ ಎರಡು ಸರಳರೇಖೆಗಳ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಸರಳರೇಖೆಯ ಓಟವು m ಆಗಿರಲಿ.

ದತ್ತ ನಿಯಮಕ್ಕನುಗುಣವಾಗಿ, $\tan 45° = \left|\frac{m + \frac{5}{6}}{1 - \frac{5}{6}m}\right|$

ಅಂದರೆ, $\frac{6m+5}{6-5m} = \pm 1$

ಆದ್ದರಿಂದ, m ನ ಬೆಲೆಗಳು $\frac{1}{11}$ ಅಥವಾ -11 ಆಗುತ್ತದೆ.

m ನ ಬೆಲೆಗಳಿಗೆ ಅನುಗುಣವಾಗಿ ಎರಡು ಸರಳರೇಖೆಗಳ ಸಮೀಕರಣಗಳು

$$11y = x + 11c_1 \text{ ಮತ್ತು } y = -11x + c_2.$$

ಈ ಸರಳರೇಖೆಗಳು $(2,-3)$ ಬಿಂದುವಿನ ಮೂಲಕ ಹಾದುಹೋಗುವುದರಿಂದ, $c_1 = -35/11$ ಮತ್ತು $c_2 = 19$ ಎಂಬ ಬೆಲೆಗಳು ಬರುತ್ತವೆ. ಆದ್ದರಿಂದ, ಸರಳರೇಖೆಗಳ ಸಮೀಕರಣಗಳು $x - 11y - 35 = 0$ ಮತ್ತು $11x + y - 19 = 0$ ಎಂದಾಗುತ್ತವೆ.

ಅಭ್ಯಾಸ - 9.6

1. ಕೆಳಗೆ ಸೂಚಿಸಿರುವ ಸರಳರೇಖೆಗಳು ಸಮಾಂತರ ರೇಖೆಗಳೆಂದು ತೋರಿಸಿ.
   (i) $3x - 4y + 1 = 0$ ಮತ್ತು $6x - 8y + 7 = 0$
   (ii) $3x + y = 0$ ಮತ್ತು $15x + 5y - 8 = 0$
2. ಕೆಳಗೆ ಸೂಚಿಸಿರುವ ಸರಳರೇಖೆಗಳು ಲಂಬಕೋನದಲ್ಲಿವೆ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.
   (i) $\frac{x}{7} + \frac{y}{3} = 0$ ಮತ್ತು $\frac{x}{9} - \frac{y}{21} = 1$
   (ii) $2x - 3y + 1 = 0$ ಮತ್ತು $6x + 4y - 5 = 0.$

3. $12y = 8x - 5$ ಸರಳರೇಖೆಗೆ ಸಮಾಂತರವಾಗಿರುವ ಮತ್ತು ಮೂಲಬಿಂದುವಿನ ಮೂಲಕ ಹಾದುಹೋಗುವ ಸರಳರೇಖೆಯ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

4. $4x - 7y = 2$ ಸರಳರೇಖೆಗೆ ಲಂಬವಾಗಿರುವ ಮತ್ತು (2, 3) ಬಿಂದುವಿನ ಮೂಲಕ ಹಾದುಹೋಗುವ ಸರಳರೇಖೆಯ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

5. (2,1), (–1, –3), (4,5) ಮತ್ತು (7,9) ಬಿಂದುಗಳು ಸಮಾನಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜದ ಶೃಂಗಗಳಾದರೆ ಕರ್ಣಗಳ ನಡುವಿನ ಕೋನವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

6. (–2, 5)ಮತ್ತು (3,8)ಬಿಂದುಗಳ ಮಧ್ಯಂತರ ಬಿಂದುವಿನ ಮೂಲಕ ಹಾದುಹೋಗುವ ಮತ್ತು ಈ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸುವ ಸರಳರೇಖೆಗೆ ಲಂಬವಾಗಿರುವ ಸರಳರೇಖೆಯ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಗೊತ್ತುಮಾಡಿ.

7. $2x + 5y - 6 = 0$ ಸರಳರೇಖೆಗೆ ಲಂಬವಾಗಿರುವ ಮತ್ತು 4 ಮಾನಗಳಷ್ಟು y –ಛೇದಕವುಳ್ಳ ಸರಳರೇಖೆಯ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

8. A (–5, 1), B (5,5) ಮತ್ತು C (10,7) ತ್ರಿಕೋನದ ಶೃಂಗಗಳಾದರೆ, A ಮೂಲಕ ಹಾದುಹೋಗುವ ಮತ್ತು BCಗೆ ಲಂಬವಾಗಿರುವ ಸರಳರೇಖೆಯ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

9. A (3,–2), B (–2,3) ಮತ್ತು C (–4,–4) ಶೃಂಗಗಳ ತ್ರಿಕೋನದ ಉನ್ನತಿಗಳ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

10. (2,3)ಬಿಂದುವಿನ ಮೂಲಕ ಹಾದುಹೋಗುವ ಮತ್ತು $3x - 5y + 31 = 0$ಸರಳರೇಖೆಗೆ (i) ಸಮಾಂತರವಾಗಿರುವ (ii) ಲಂಬವಾಗಿರುವ ಸರಳರೇಖೆಗಳ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

9.6.1 ಎರಡು ಸರಳರೇಖೆಗಳ ಛೇದನ ಬಿಂದು

$(x_1 y_1)$ ಬಿಂದುವು, $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ ಮತ್ತು $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ ಸರಳರೇಖೆಗಳ ಛೇದನ ಬಿಂದುವಾದರೆ ಈ ಬಿಂದುವು ಎರಡೂ ಸರಳರೇಖೆಗಳ ಸಾಮಾನ್ಯ ಬಿಂದುವೆನಿಸುತ್ತದೆ ಮತ್ತು ಎರಡು ಸರಳರೇಖೆಗಳಿಗೆ ತಾಳೆಯಾಗುತ್ತದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ,

$$a_1x_1 + b_1y_1 + c_1 = 0$$

ಮತ್ತು $a_2x_1 + b_2y_1 + c_2 = 0$

ಎಂದಾಗುತ್ತದೆ. ಈ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಬಿಡಿಸಿದಾಗ

$$\frac{x_1}{b_1c_2 - b_2c_1} = \frac{y_1}{a_2c_1 - a_1c_2} = \frac{1}{a_1b_2 - a_2b_1}$$

ಅಥವಾ $x_1 = \left(\dfrac{b_1c_2 - b_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1}\right)$, $y_1 = \left(\dfrac{c_1a_2 - c_2a_1}{a_1b_2 - a_2b_1}\right)$

ಇವು ಛೇದನ ಬಿಂದುವಿನ ನಿರ್ದೇಶಕಗಳು.

ಸೂಚನೆ : $a_1b_2 - a_2b_1 = 0$ ಆದಾಗ ಸರಳರೇಖೆಗಳು ಸಮಾಂತರವಾಗಿರುತ್ತವೆ.

9.6.2 ಮೂರು ಸರಳರೇಖೆಗಳು ಏಕಬಿಂದುಸ್ಥವಾಗಲು ನಿಯಮ

ಮೂರು ಸರಳರೇಖೆಗಳ ಸಮೀಕರಣಗಳು

$$a_1x + b_1y + c_1 = 0, \quad a_2x + b_2y + c_2 = 0, \quad a_3x + b_3y + c_3 = 0$$

ಎಂದಿರಲಿ. ಮೊದಲಿನ ಎರಡು ಸರಳರೇಖೆಗಳ ಛೇದನ ಬಿಂದು $\left[\dfrac{b_1c_2 - b_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1}, \dfrac{c_1a_2 - c_2a_1}{a_1b_2 - a_2b_1}\right]$. ಮೂರೂ ಸರಳರೇಖೆಗಳು ಒಂದೇ ಬಿಂದುವಿನ ಮೂಲಕ ಹಾದುಹೋಗುವುದಾದರೆ ಅಂತಹ ಬಿಂದುವನ್ನು ನಾವು ಏಕಬಿಂದುಸ್ಥವೆಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ಮೂರನೇ ಸರಳರೇಖೆಯೂ ಸಹ ಮೊದಲೆರಡು ಸರಳರೇಖೆಗಳ ಛೇದನ ಬಿಂದುವಿನ ಮೂಲಕ ಹಾದುಹೋಗುತ್ತದೆ. ಅಂದರೆ

$$a_3\left(\frac{b_1c_2 - b_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1}\right) + b_3\left(\frac{c_1a_2 - c_2a_1}{a_1b_2 - a_2b_1}\right) + c_3 = 0$$

ಅಥವಾ

$$a_3(b_1c_2 - b_2c_1) + b_3(c_1a_2 - c_2a_1) + c_3(a_1b_2 - a_2b_1) = 0.$$

ಮೂರು ಸರಳರೇಖೆಗಳು ಏಕಬಿಂದುಸ್ಥವಾಗಲು ಪೂರೈಸಬೇಕಾಗಿರಲು ಇದು ನಿಯಮ. ಇದೇ ನಿಯಮವನ್ನು ನಾವು ಇನ್ನೊಂದು ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಬರೆಯಬಹುದು. ಅದೇನೆಂದರೆ,

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0$$

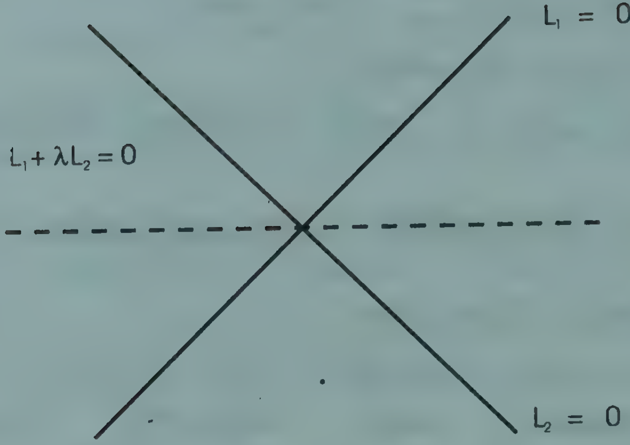
9.6.3 ದತ್ತ ಸರಳರೇಖೆಗಳ ಛೇದನ ಬಿಂದುವಿನ ಮೂಲಕ ಹಾದುಹೋಗುವ ಸರಳರೇಖೆಯ ಸಮೀಕರಣ

ದತ್ತ ಸರಳರೇಖೆಗಳ ಸಮೀಕರಣಗಳು

$$a_1x + b_1y + c_1 = 0$$

ಮತ್ತು $a_2x + b_2y + c_2 = 0$

ಆಗಿರಲಿ. ಆಗ, ಈ ಕೆಳಗಿನ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಪರಿಗಣಿಸಿ.



ಚಿತ್ರ 9.20

$$a_1x + b_1y + c_1 + \lambda(a_2x + b_2y + c_2) = 0 \qquad \dots (1)$$

ಸಮೀಕರಣ (1) ಸರಳರೇಖೆಯೊಂದನ್ನು ಪ್ರತಿನಿಧಿಸುತ್ತದೆ ಏಕೆಂದರೆ ಇದು x ಮತ್ತು y ನಲ್ಲಿರುವ ಏಕ ಪ್ರಮಾಣದ ಸಮೀಕರಣ. $P(x_1, y_1)$ ಬಿಂದುವು ದತ್ತ ಸರಳರೇಖೆಗಳ ಛೇದನ ಬಿಂದುವಾದರೆ, ಅದು ಸಮೀಕರಣ (1)ರೊಂದಿಗೆ ತಾಳೆ ಆಗುತ್ತದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ

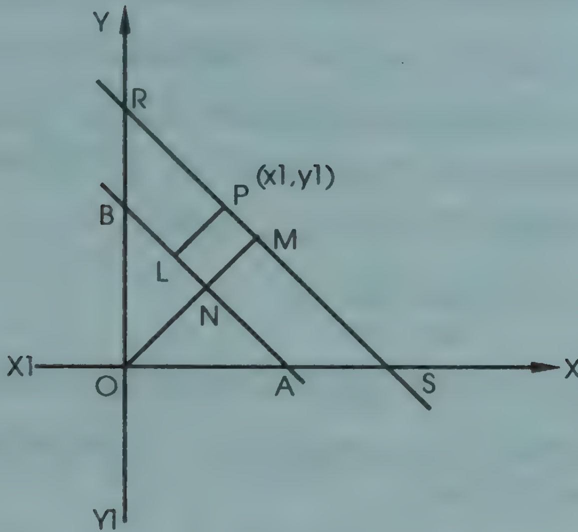
$$a_1x_1 + b_1y_1 + c_1 + \lambda(a_2x_1 + b_2y_1 + c_2) = 0 \qquad \dots (2)$$

ಎಂದಾಗುತ್ತದೆ. ಸಮೀಕರಣ(2)ದತ್ತ ಸರಳರೇಖೆಗಳ ನಡುವೆ ಹಾದುಹೋಗುವ ಯಾವುದೇ ಸರಳರೇಖೆಯನ್ನು ಪ್ರತಿನಿಧಿಸುತ್ತದೆ. λದ ವಿವಿಧ ಬೆಲೆಗಳಿಗೆ ಅನುಗುಣವಾಗಿ ನಾವು ಅನೇಕ ಸರಳರೇಖೆಗಳ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಪಡೆಯಬಹುದು.

ಸೂಚನೆ : $L_1 = 0$ ಮತ್ತು $L_2 = 0$ ದತ್ತ ಸರಳರೇಖೆಗಳಾದರೆ $L_1 + \lambda L_2 = 0$ ಎಂಬುದು ಸರಳರೇಖೆಗಳ ಛೇದನ ಬಿಂದುವಿನ ಮೂಲಕ ಹಾದುಹೋಗುವ ಸರಳರೇಖೆಯ ಸಮೀಕರಣವೆಂದು ಪರಿಗಣಿಸಲಾಗುವುದು.

9.6.4. ದತ್ತ ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ದತ್ತ ಸರಳರೇಖೆಯ ದೂರ

$ax + by + c = 0$ ದತ್ತ ಸರಳರೇಖೆ ಮತ್ತು $P(x_1, y_1)$ ದತ್ತ ಬಿಂದುವಾಗಿರಲಿ. ದತ್ತ ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ಸರಳರೇಖೆಯ ದೂರ d ಎಂದಿರಲಿ. ದತ್ತ ಸರಳರೇಖೆಗೆ ಸಮಾಂತರವಾಗಿಯೂ ಮತ್ತು $P(x_1, y_1)$ ಬಿಂದುವಿನ ಮೂಲಕ ಹಾದುಹೋಗುವಂತೆಯೂ RS ಎಂಬ ಸರಳರೇಖೆಯೊಂದನ್ನು ರಚಿಸಿ.



ಚಿತ್ರ 9.21

ಚಿತ್ರ 9.21ದಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿರುವಂತೆ $MN = PL = d$. RS ಸರಳರೇಖೆಯ ಸಮೀಕರಣವು

$$ax + by - (ax_1 + by_1) = 0.$$

ಈ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಲಂಬರೂಪದಲ್ಲಿ ಬರೆದಾಗ

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\,x + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\,y = \frac{ax_1+by_1}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

ಎಂದಾಗುತ್ತದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ

$$OM = \frac{ax_1+by_1}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

ದತ್ತ ಸರಳರೇಖೆ ಮತ್ತು ಮೂಲ ಬಿಂದುವಿನ ನಡುವಿನ ದೂರ $ON = \frac{-c}{\sqrt{a^2+b^2}}$

ಆದ್ದರಿಂದ, $d = PL = MN = OM - ON$

ಅಥವಾ $d = \frac{ax_1+by_1}{\sqrt{a^2+b^2}} - \frac{-c}{\sqrt{a^2+b^2}}$

ಅಥವಾ $d = \frac{ax_1+by_1+c}{\sqrt{a^2+b^2}}$

9.7 ದತ್ತ ಸರಳರೇಖೆಗಳ ನಡುವಿನ ಕೋನಗಳ ದ್ವಿಭಾಜಕಗಳು

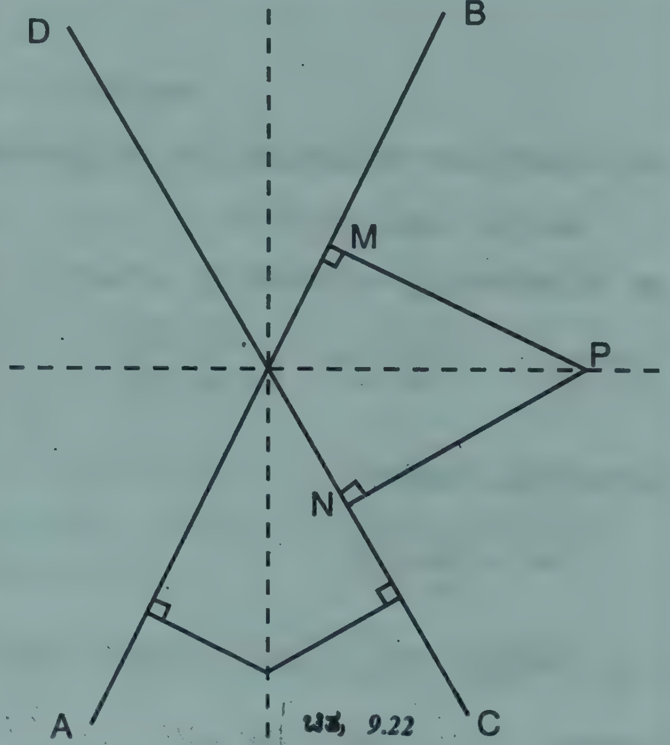
ದತ್ತ ಸರಳರೇಖೆಗಳು $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ ಮತ್ತು $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ ಆಗಿರಲಿ. $P(x_1, y_1)$ ಬಿಂದುವು ಸರಳರೇಖೆಗಳ ನಡುವಿನ ಕೋನಗಳ ದ್ವಿಭಾಜಕದ ಮೇಲಿರುವ ಬಿಂದುವಾದರೆ, ಆಗ Pಬಿಂದುವಿನಿಂದ ದತ್ತ ಸರಳ ರೇಖೆಗಳಿಗಿರುವ ಲಂಬಗಳ ಉದ್ದ ಸಮಾನವಾಗಿರುತ್ತದೆ ಚಿತ್ರ (9.22) . ಆದ್ದರಿಂದ

$$\frac{a_1x_1 + b_1y_1 + c_1}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}} = \pm \frac{a_2x_1 + b_2y_1 + c_2}{\sqrt{a_2^2 + b_2^2}} \quad ...(1)$$

ಸಮೀಕರಣ (1)ದತ್ತ ಸರಳರೇಖೆಗಳ ನಡುವಿನ ಕೋನಗಳ ದ್ವಿಭಾಜಕಗಳನ್ನು ಪ್ರತಿನಿಧಿಸುತ್ತದೆ.

ಸೂಚನೆ : (i)ಸಮೀಕರಣ (1)ರಲ್ಲಿ ಧನಾತ್ಮಕ ಚಿಹ್ನೆಯು ಮೂಲಬಿಂದುವನ್ನು ಹೊಂದಿರುವ ಕೋನದ ದ್ವಿಭಾಜಕವನ್ನು ಮತ್ತು ಋಣಾತ್ಮಕ ಚಿಹ್ನೆಯು ಮೂಲಬಿಂದುವನ್ನು ಹೊಂದಿರದ ಕೋನದ ದ್ವಿಭಾಜಕವನ್ನು ಪ್ರತಿನಿಧಿಸುತ್ತದೆ.

(ii) ಒಂದು ದ್ವಿಭಾಜಕ ಮತ್ತು ಸರಳರೇಖೆಯೊಂದರ ನಡುವಿನ ಕೋನವು 45° ಗಳಿಗಿಂತ ಕಡಿಮೆ ಇದ್ದಲ್ಲಿ, ಆ ದ್ವಿಭಾಜಕವನ್ನು ನಾವು **ಲಘು ಕೋನ ದ್ವಿಭಾಜಕ** ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ. ಉಳಿದ ಇನ್ನೊಂದು ದ್ವಿಭಾಜಕವನ್ನು **ಅಧಿಕ ಕೋನ ದ್ವಿಭಾಜಕ** ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ.



ಚಿತ್ರ 9.22

ಉದಾಹರಣೆಗಳು

1. ಕೆಳಗೆ ಸೂಚಿಸಿರುವ ಸಮಾಂತರ ರೇಖೆಗಳ ನಡುವಿನ ಅಂತರವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ:

   $2x - 3y = 0$ ಮತ್ತು $8x - 12y + 5 = 0.$

   ಸೂಚಿಸಿರುವ ಸರಳರೇಖೆಗಳ ಸಮೀಕರಣವೊಂದನ್ನು ಆಧರಿಸಿ, $x = 0$ ಆದಾಗ yನ ಬೆಲೆಯನ್ನು ತಿಳಿಯಬೇಕು. ಅಂದರೆ, ಉದಾಹರಣೆಗೆ

   $2x - 3y + 4 = 0$ ಸಮೀಕರಣದಲ್ಲಿ, $x = 0$ ಆದಾಗ $3y = 2(0) + 4$

ಅಥವಾ $y = 4/3$ ಎಂದಾಗುತ್ತದೆ.

ಈಗ, $(0, 4/3)$ ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ಇನ್ನೊಂದು ಸರಳರೇಖೆಗೆ ಇರುವ ದೂರವನ್ನು ಅದರ ಸೂತ್ರವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿಕೊಂಡು, ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬೇಕು. ಆದ್ದರಿಂದ, ಸಮಾಂತರ ರೇಖೆಗಳ ನಡುವಿನ ದೂರ

$$\frac{ax_1 + by_1 + c}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

ಅಂದರೆ, $$\frac{8(0) - 12\left(\frac{4}{3}\right) + 5}{\sqrt{64 + 144}} = \frac{-11}{\sqrt{208}}$$

ಋಣ ಚಿಹ್ನೆಯನ್ನು ಬಿಟ್ಟು, ಸರಳರೇಖೆಗಳ ನಡುವಿನ ದೂರ $\frac{11}{\sqrt{208}}$ ಮಾನಗಳು.

2. $A\ (3,5)$ ಮತ್ತು $B\ (-8, -6)$ ಬಿಂದುಗಳು $x - y - 8 = 0$ ಸರಳರೇಖೆಯಿಂದ ಸಮದೂರದಲ್ಲಿವೆಯೆಂದು ತೋರಿಸಿ.

$A\ (3,5)$ ಬಿಂದು ಮತ್ತು ಸರಳರೇಖೆಯ ನಡುವಿನ ದೂರ

$$\frac{ax_1 + by_1 + c}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{3 - 5 - 8}{\sqrt{1 + 1}} = \frac{-10}{\sqrt{2}}$$

ಅಂದರೆ, A ಬಿಂದು ಮತ್ತು ಸರಳರೇಖೆಯ ನಡುವಿನದೂರ $10/\sqrt{2}$

ಹಾಗೆಯೇ, $B\ (-8, -6)$ ಬಿಂದು ಮತ್ತು ಸರಳರೇಖೆಯ ನಡುವಿನ ದೂರ

$$\frac{-8 + 6 - 8}{\sqrt{1 + 1}} = \frac{-10}{\sqrt{2}}$$

ಅಂದರೆ, B ಬಿಂದು ಮತ್ತು ಸರಳರೇಖೆಯ ನಡುವಿನ ದೂರ $10/\sqrt{2}$

ಆದ್ದರಿಂದ, A ಮತ್ತು B ಬಿಂದುಗಳು ಸರಳರೇಖೆಯಿಂದ ಸಮದೂರದಲ್ಲಿರುವುದು ನಿರೂಪಿತವಾಗಿದೆ.

3. $x + y - 1 = 0$ ಮತ್ತು $2x + 3y - 8 = 0$ ಸರಳರೇಖೆಗಳಿಂದ ಸಮದೂರದಲ್ಲಿರುವ ಬಿಂದುವಿನ ಪಥ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಬಿಂದುವು $P(x_1, y_1)$ ಆಗಿರಲಿ.

P ಮತ್ತು $x + y - 1 = 0$ ಸರಳರೇಖೆಯ ನಡುವಿನ ದೂರ $= \frac{x_1 + y_1 - 1}{\sqrt{2}}$

P ಮತ್ತು $2x+3y - 8= 0$ ಸರಳರೇಖೆಯ ನಡುವಿನ ದೂರ $= \frac{2x_1 + 3y_1 - 8}{\sqrt{2}}$,

ಎರಡು ದೂರಗಳನ್ನೂ ಸಮೀಕರಿಸಿ (x_1, y_1) ನ್ನು (x, y) ಗೆ ಬದಲಿಸಿದಾಗ ಬಿಂದುವಿನ ಪಥ ಸಮೀಕರಣವು $x + 2y - 7 = 0$ ಎಂದಾಗುತ್ತದೆ.

4. $x + 2y + 1 = 0$ ಮತ್ತು $2x - y + 2 = 0$ ಸರಳರೇಖೆಗಳ ಛೇದನ ಬಿಂದು ಮತ್ತು (8,0) ಬಿಂದುವಿನ ಮೂಲಕ ಹಾದುಹೋಗುವ ಸರಳರೇಖೆಯ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಸರಳರೇಖೆಗಳ ಛೇದನ ಬಿಂದುವಿನ ಮೂಲಕ ಹಾದುಹೋಗುವ ಸರಳರೇಖೆಯ ಸಮೀಕರಣವು,

$$(x + 2y + 1) + \lambda(2x - y + 2) = 0 \quad \ldots (1)$$

ಈ ಸರಳರೇಖೆಯು (8, 0) ಬಿಂದುವಿನ ಮೂಲಕ ಹಾದು ಹೋಗುವುದರಿಂದ

$$[8 + 2(0) + 1] + \lambda[2(8) - 0 + 2] = 0$$

ಅಥವಾ $9 + \lambda(18) = 0$ ಅಥವಾ $\lambda = -\frac{9}{18} = -\frac{1}{2}.$

ಈಗ ಸಮೀಕರಣ (1) ರಿಂದ, $x + 2y + 1 + \left(-\frac{1}{2}\right)[2x - y + 2] = 0$

ಅಂದರೆ, $2x + 4y + 2 - 2x + y - 2 = 0$ ಅಥವಾ $5y - 1 = .0$

5. $3x - 4y + 1 = 0$ ಮತ್ತು $x - 4y + 8 = 0$ ಸರಳರೇಖೆಗಳ ಛೇದನ ಬಿಂದುವಿನ ಮೂಲಕ ಹಾದು ಹೋಗುವ ಮತ್ತು ಓಟ 3/2 ಇರುವ ಸರಳರೇಖೆಯ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಸರಳರೇಖೆಗಳ ಛೇದನ ಬಿಂದುವಿನ ಮೂಲಕ ಹಾದುಹೋಗುವ ಸರಳರೇಖೆಯ ಸಮೀಕರಣವು

$$(3x - 4y + 1) + \lambda(x - 4y + 8) = 0 \quad \ldots (1)$$

ಅಥವಾ $x(3 + \lambda) - 4y(1 + \lambda) + 1 + 8\lambda = 0$

ಅಥವಾ $y = \frac{(3 + \lambda)}{4(1 + \lambda)}x + \frac{(1 + 8\lambda)}{4(1 + \lambda)}$

ಈ ಸರಳರೇಖೆಯ ಓಟ $= \frac{3 + \lambda}{4(1 + \lambda)}$

ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಮಾಹಿತಿಯಿಂದ, $\frac{3 + \lambda}{4(1 + \lambda)} = \frac{3}{2}$

ಅಥವಾ $\lambda = -\frac{3}{5}$

ಸಮೀಕರಣ (1) ರಿಂದ, $3x-4y+1+\left(\frac{-3}{5}\right)(x-4y+8) = 0$

ಅಥವಾ $12x-8y-19=0$.

6. $x + y - 1 = 0$ ಮತ್ತು $2x - y + 4 = 0$ ಸರಳರೇಖೆಗಳ ಛೇದನ ಬಿಂದುವಿನ ಮೂಲಕ ಹಾದುಹೋಗುವ ಮತ್ತು $4x - y + 5 = 0$ ಸರಳರೇಖೆಗೆ ಲಂಬವಾಗಿರುವ ಸರಳರೇಖೆಯ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಸರಳರೇಖೆಗಳ ಛೇದನ ಬಿಂದುವಿನ ಮೂಲಕ ಹಾದುಹೋಗುವ ಸರಳರೇಖೆಯು

$$x+y-1+\lambda(2x-y+4) = 0 \quad \text{... (1)}$$

ಅಥವಾ $x(1+2\lambda)+y(1-\lambda)+4\lambda-1 = 0$

ಈ ಸರಳರೇಖೆಯು $4x - y + 5 = 0$ ಸರಳರೇಖೆಗೆ ಲಂಬವಾಗಿರುವುದರಿಂದ

$$m_1 m_2 = -1$$

ಆದ್ದರಿಂದ, $-\left(\frac{1+2\lambda}{1-\lambda}\right)(4) = -1$

ಅಂದರೆ, $4+8\lambda = 1-\lambda$ ಅಥವಾ $\lambda = \frac{-1}{3}$.

ಸಮೀಕರಣ (1) ರಲ್ಲಿ λದ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಬಳಸುವುದರಿಂದ

$$(x+y-1)+\left(\frac{-1}{3}\right)(2x-y+4) = 0$$

ಅಥವಾ $x+4y-7=0$ ಎಂದಾಗುತ್ತದೆ.

***ಸೂಚನೆ* :** ಮೇಲಿನ ಲೆಕ್ಕವನ್ನು ಇನ್ನೊಂದು ವಿಧದಲ್ಲೂ ಬಿಡಿಸಬಹುದು.

$4x - y + 5 = 0$ ಸರಳರೇಖೆಗೆ ಲಂಬವಾಗಿರುವ ಸರಳರೇಖೆಯ ಸಮೀಕರಣವು $x+4y+c=0$ ಎಂದಾಗುತ್ತದೆ. ಅವುಗಳನ್ನು ಬಿಡಿಸುವುದರಿಂದ ದತ್ತ ಸರಳರೇಖೆಗಳ ಛೇದನ ಬಿಂದುವು $(-1, 2)$ ಆಗಿರುತ್ತದೆ.

ಈಗ, $x + 4y + c = 0$ ಸರಳರೇಖೆಯು $(-1, 2)$ ಬಿಂದುವಿನ ಮೂಲಕ ಹಾದುಹೋಗುವುದರಿಂದ, $-1+8+c=0$ ಅಥವಾ $c=-7$ ಆಗಿರುತ್ತದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ಸರಳರೇಖೆಯ ಸಮೀಕರಣವು $x+4y-7=0$ ಎಂದಾಗುತ್ತದೆ.

7. $5x - 3y + 10 = 0$ ಮತ್ತು $x - 5y + 1 = 0$ ಸರಳರೇಖೆಗಳ ಛೇದನ ಬಿಂದುವಿನ ಮೂಲಕ ಹಾದುಹೋಗುವ ಮತ್ತು $2x-8y+5=0$ ಸರಳರೇಖೆಗೆ ಸಮಾಂತರವಾಗಿರುವ ಸರಳರೇಖೆಯ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

$2x-8y+5=0$ ಸರಳರೇಖೆಗೆ ಸಮಾಂತರವಾಗಿರುವ ಸರಳರೇಖೆಯ ಸಮೀಕರಣವು $2x - 8y + c = 0$ ಎಂದಾಗುತ್ತದೆ. ದತ್ತ ಸರಳರೇಖೆಗಳ

ಛೇದನ ಬಿಂದುವು $\equiv \left(-\frac{47}{22}, -\frac{5}{22}\right)$

ಈಗ, $2x - 8y + c = 0$ ಛೇದನ ಬಿಂದುವಿನ ಮೂಲಕ ಹಾದುಹೋಗುವುದರಿಂದ

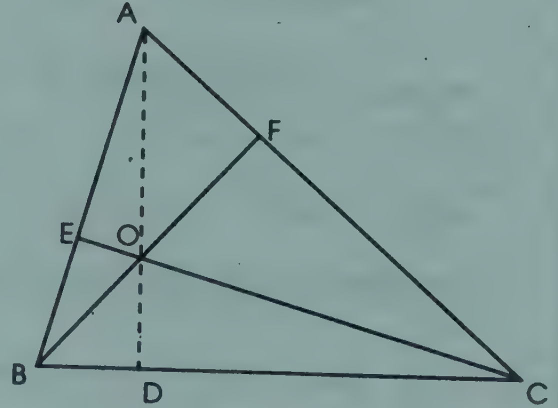
$$2\left(\frac{-47}{22}\right) + 8\left(\frac{5}{22}\right) + c = 0 \text{ ಅಥವಾ } c = \frac{54}{22} = \frac{27}{11}.$$

ಸಮೀಕರಣ (1) ರಿಂದ ಸರಳರೇಖೆಯ ಸಮೀಕರಣವು

$$22x - 88y + 27 = 0$$

ಎಂದಾಗುತ್ತದೆ.

8. $x - y + 1 = 0, x + 2y - 1 = 0$ ಮತ್ತು $x - 2y + 1 = 0$, ಇವು ತ್ರಿಕೋನದ ಭುಜಗಳಾದರೆ, ತ್ರಿಕೋನದ ಲಂಬಕೇಂದ್ರವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.



ಚಿತ್ರ 9.23

ದತ್ತ ಭುಜಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ AB, BC, CA ಆಗಿರಲಿ (ಚಿತ್ರ 9.23).

AD ಉನ್ನತಿಯ ಸಮೀಕರಣವು

$$x - y + 1 + \lambda(x - 2y + 1) = 0$$

ಅಥವಾ $x(1 + \lambda) - y(1 + 2\lambda) + 1 + \lambda = 0$

ADಯು BCಗೆ ಲಂಬವಾಗಿರುವುದರಿಂದ $m_1 m_2 = -1$

ಅಂದರೆ, $\left(\frac{1+\lambda}{1+2\lambda}\right)\left(-\frac{1}{2}\right) = -1$

ಅಥವಾ $1 + \lambda = 2 + 4\lambda$ ಅಥವಾ $\lambda = \frac{-1}{3}$

ಈಗ, ADಯ ಸಮೀಕರಣವು

$$x - y + 1 + \left(-\frac{1}{3}\right)(x - 2y + 1) = 0 \text{ ಅಥವಾ } 2x - y + 2 = 0.$$

ಇದೇ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ, CE ಉನ್ನತಿಯ ಸಮೀಕರಣವು

$$x + 2y + 1 + \lambda(x - 2y + 1) = 0$$

$$x(1+\lambda) + 2y(1-\lambda) + 1 + \lambda = 0$$

CE ಉನ್ನತಿಯು AB ಗೆ ಲಂಬವಾಗಿರುವುದರಿಂದ

$$-\frac{(1+\lambda)}{2(1-\lambda)}(1) = -1$$

ಅಥವಾ $1 + \lambda = 2 - 2\lambda$ ಅಥವಾ $\lambda = \frac{1}{3}$

CE ಉನ್ನತಿಯ ಸಮೀಕರಣವು

$$x + 2y + 1 + \frac{1}{3}(x - 2y + 1) = 0$$

ಅಥವಾ $x + y + 1 = 0.$

ಈಗ, AD ಮತ್ತು CE ಗಳ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಬಿಡಿಸುವುದರಿಂದ

ಲಂಬ ಕೇಂದ್ರ $\equiv \left(-\frac{1}{3}, \frac{4}{3}\right)$.

9. $2x + 3y + 6 = 0$, $3x + y - 5 = 0$ ಮತ್ತು $4x + 5y + 8 = 0$ ಸರಳರೇಖೆಗಳು ಏಕ ಬಿಂದುಸ್ಥವೆಂದು ತೋರಿಸಿ.

ಮೊದಲನೇ ಎರಡು ಸರಳರೇಖೆಗಳ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಬಿಡಿಸಿದಾಗ ಅವುಗಳ

ಭೇದನ ಬಿಂದು $\equiv (3, -4)$.

ಈಗ, ಮೂರನೇ ಸರಳರೇಖೆಯೂ ಇದೇ ಬಿಂದುವಿನ ಮೂಲಕ ಹಾದುಹೋಗುವುದೆ ಎಂದು ಪರಿಶೀಲಿಸೋಣ. ಅದರ ಸಮೀಕರಣದಲ್ಲಿ (x, y) ಜಾಗದಲ್ಲಿ $(3, -4)$ ಹಾಕಿದಾಗ

$$4x + 5y + 8 = 4(3) + 5(-4) + 8 = 20 - 20 = 0.$$

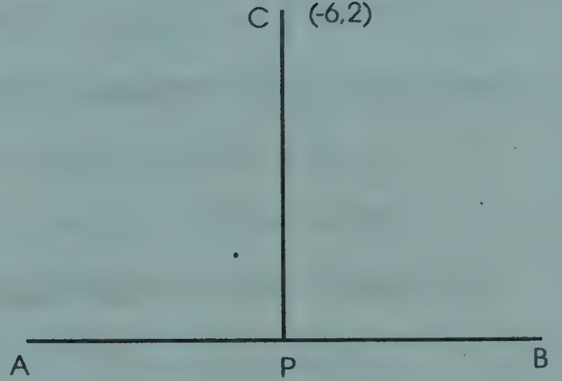
ಆದ್ದರಿಂದ, ಮೂರು ಸರಳರೇಖೆಗಳು ಏಕಬಿಂದುಸ್ಥವಾಗಿವೆ.

10. $3x - 4y + 1 = 0$ ಸರಳರೇಖೆಗೆ $(-6, 2)$ ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ಲಂಬವಾಗಿರುವ ಸರಳರೇಖೆಯ ಪಾದದ ನಿರ್ದೇಶಕಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

CP ಯು ABಗೆ ಲಂಬವಾಗಿರಲಿ (ಚಿತ್ರ 9.24).

CP ಯ ಓಟವು $= \dfrac{-1}{AB\text{ಯ ಓಟ}}$

$= \dfrac{-1}{(3/4)} = -\dfrac{4}{3}$



ಚಿತ್ರ 9.24

CPಯ ಸಮೀಕರಣವು,

$y - y_1 = m(x - x_1)$

ಸೂತ್ರದ ಆಧಾರದ ಮೇರೆಗೆ

$y - 2 = \dfrac{-4}{3}(x+6)$

ಅಥವಾ $3y - 6 = -4x - 24$

ಅಥವಾ $4x + 3y + 18 = 0$

ಎಂದಾಗುತ್ತದೆ. AB ಮತ್ತು CP ಸರಳರೇಖೆಗಳ ಛೇದನ ಬಿಂದುವು

$3x - 4y = -1$

ಮತ್ತು $4x + 3y = -18$

ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಬಿಡಿಸುವುದರಿಂದ $x = -3, y = -2$ ಅಂದರೆ $(-3, -2)$ ಎಂದಾಗುತ್ತದೆ.

11. $x = 2y - 3$ ಮತ್ತು $y = 2x + 5$ ಸರಳರೇಖೆಗಳ ನಡುವಿನ ಕೋನದ ದ್ವಿಭಾಜಕಗಳ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಸೂತ್ರದ ಆಧಾರದ ಮೇರೆಗೆ, ದ್ವಿಭಾಜಕಗಳ ಸಮೀಕರಣಗಳು

$$\frac{a_1x + b_1y + c_1}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}} = \pm \frac{a_2x + b_2y + c_2}{\sqrt{a_2^2 + b_2^2}}$$

ಅಂದರೆ, $\dfrac{x - 2y + 3}{\sqrt{5}} = \pm \dfrac{2x - y + 5}{\sqrt{5}}$

ಅಥವಾ $x - 2y + 3 - 2x + y - 5 = 0$

ಅಥವಾ $x + y + 2 = 0$ ... (1)

ಮತ್ತು $x - 2y + 3 + 2x - y + 5 = 0$

ಅಥವಾ $3x - 3y + 8 = 0$ ... (2)

(1) ಮತ್ತು (2) ದತ್ತ ಸರಳರೇಖೆಗಳ ನಡುವಿನ ಕೋನಗಳ ದ್ವಿಭಾಜಕಗಳನ್ನು ಪ್ರತಿನಿಧಿಸುತ್ತವೆ.

12. $3x - 4y + 2 = 0$ ಮತ್ತು $5x = 12y + 7$ ಸರಳರೇಖೆಗಳ ನಡುವಿನ ಲಘುಕೋನ ದ್ವಿಭಾಜಕದ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಸೂತ್ರದ ಮೇರೆಗೆ, ದ್ವಿಭಾಜಕಗಳ ಸಮೀಕರಣಗಳು

$$\frac{a_1x + b_1y + c_1}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}} = \frac{\pm\ (a_2x + b_2y + c_2)}{\sqrt{a_2^2 + b_2^2}}$$

ಅಂದರೆ, $$\frac{3x - 4y + 2}{\sqrt{9 + 16}} = \pm \frac{5x - 12y - 7}{\sqrt{25 + 144}}$$

$$\frac{3x - 4y + 2}{5} = \pm \frac{5x - 12y - 7}{13}$$

ದ್ವಿಭಾಜಕಗಳ ಪ್ರತ್ಯೇಕವಾದ ಸಮೀಕರಣಗಳು

$$14x + 8y + 61 = 0$$

ಮತ್ತು $$64x - 112y - 9 = 0.$$

ನಂತರ, ಒಂದು ದ್ವಿಭಾಜಕ ಮತ್ತು ದತ್ತ ಸರಳ ರೇಖೆಯೊಂದರ ನಡುವಿನ ಕೋನವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬೇಕು.

ಈಗ, ದತ್ತ ಸರಳರೇಖೆ $3x - 4y + 2 = 0$ ಮತ್ತು ದ್ವಿಭಾಜಕ $64x - 112y - 9 = 0$ ನಡುವಿನ ಲಘುಕೋನ

$$\tan\theta = \left|\frac{m_1 - m_2}{1 + m_1m_2}\right| = \frac{\frac{3}{4} - \frac{4}{7}}{1 + \left(\frac{3}{4}\right)\left(\frac{4}{7}\right)} = \frac{7}{8} < 1$$

ಎಂಬ ಬೆಲೆಯಿಂದ ದೊರೆಯುತ್ತದೆ.

ಈಗ, $\tan\theta < 1$ ಆಗಿರುವುದರಿಂದ (ಅಂದರೆ $\theta < 45°$) $64x - 112y - 9 = 0$ ವನ್ನು ಲಘುಕೋನ ದ್ವಿಭಾಜಕವೆಂದು ಪರಿಗಣಿಸಲಾಗುವುದು.

13. $3x - y - 5 = 0$ ಮತ್ತು $x - 3y + 2 = 0$ ಸರಳರೇಖೆಗಳ ನಡುವಿನ ಕೋನಗಳ ಅಧಿಕಕೋನ ದ್ವಿಭಾಜಕದ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಸೂತ್ರದ ಮೇರೆಗೆ, ದ್ವಿಭಾಜಕಗಳ ಸಮೀಕರಣಗಳು

$$\frac{a_1x+b_1y+c_1}{\sqrt{a_1^2+b_1^2}} = \frac{\pm\ a_2+\ b_2+\ c_2}{\sqrt{a_2^2+b_2^2}}$$

ಅಂದರೆ, $\frac{3x-y-5}{\sqrt{9}+1} = \pm\frac{x-3y+2}{\sqrt{1+9}}$

ದ್ವಿಭಾಜಕಗಳ ಪ್ರತ್ಯೇಕವಾದ ಸಮೀಕರಣಗಳು

$$2x+2y-7=0$$

ಮತ್ತು $4x-4y-3=0$

ಈಗ, ದ್ವಿಭಾಜಕ $2x+2y-7=0$ ಮತ್ತು ದತ್ತ ಸರಳರೇಖೆ $3x-y-5=0$ ಇವುಗಳ ನಡುವಿನ ಲಘುಕೋನವು θ ಆಗಿದ್ದರೆ

$$\tan\theta = \frac{m_1-m_2}{1+m_1m_2} = \frac{-1-3}{1-3} = \frac{-4}{-2} = 2 > 1 \quad (\therefore\ \theta > 45^\circ)$$

ಆದ್ದರಿಂದ, $2x+2y-7=0$ ವನ್ನು **ಅಧಿಕಕೋನ ದ್ವಿಭಾಜಕವೆಂದು** ಪರಿಗಣಿಸಲಾಗುವುದು.

ಅಭ್ಯಾಸ – 9.7

1. $3x-y-5=0$ ಮತ್ತು $4x+y-9=0$ ಸರಳರೇಖೆಗಳ ಛೇದನ ಬಿಂದು ಮತ್ತು $(4,5)$ ಬಿಂದುವಿನ ಮೂಲಕ ಹಾದು ಹೋಗುವ ಸರಳರೇಖೆಯ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

2. $x+2y+1=0$ ಮತ್ತು $4x+y-3=0$ ಸರಳರೇಖೆಗಳ ಛೇದನ ಬಿಂದುವಿನ ಮೂಲಕ ಹಾದುಹೋಗುವ ಮತ್ತು ಎರಡನೆಯ ಸರಳ ರೇಖೆಗೆ ಲಂಬವಾಗಿರುವ ಸರಳ ರೇಖೆಯ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

3. $x-6y+6=0$ ಮತ್ತು $3x+y+7=0$ ಸರಳರೇಖೆಗಳ ಛೇದನ ಬಿಂದುವಿನ ಮೂಲಕ ಹಾದುಹೋಗುವ ಮತ್ತು 45° ಬಾಗುವನ್ನು ಹೊಂದಿರುವ ಸರಳ ರೇಖೆಯ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

4. $7x - y + 6 = 0$ ಮತ್ತು $5x + y + 1 = 0$ ಸರಳರೇಖೆಗಳ ಛೇದನ ಬಿಂದುವಿನ ಮೂಲಕ ಹಾದು ಹೋಗುವ ಮತ್ತು $x+3y+4=0$ ಸರಳರೇಖೆಗೆ ಲಂಬವಾಗಿರುವ ಸರಳರೇಖೆಯ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

5. $3x+y + 6 = 0$ ಮತ್ತು $2x + 3y + 4 = 0$ ಸರಳರೇಖೆಗಳ ಛೇದನ ಬಿಂದುವಿನ ಮೂಲಕ ಹಾದುಹೋಗುವ ಮತ್ತು $5x +6y+1=0$ಸರಳರೇಖೆಗೆ ಸಮಾಂತರವಾಗಿರುವ ಸರಳರೇಖೆಯ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

6. $4x - 3y = 8$, $3x - 4y + 6 = 0$ ಮತ್ತು $x + y = 9$ ಸರಳರೇಖೆಗಳನ್ನು ಭುಜಗಳಾಗಿ ಉಳ್ಳ ತ್ರಿಕೋನದ ಗುರುತ್ವಕೇಂದ್ರವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

7. $A(1,1)$, $B(2,-2)$ ಮತ್ತು $C(-1,0)$ ಆಗಿರುವ ABC ತ್ರಿಕೋನದ ಲಂಬಕೇಂದ್ರವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

8. $A(1,1)$, $B(2,3)$ ಮತ್ತು $C(-3,-2)$ ಆಗಿರುವ ABC ತ್ರಿಕೋನದ ಲಂಬಕೇಂದ್ರವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

9. $x + 2y = 0$, $4x +3y = 5$ ಮತ್ತು $3x + y = 0$ ಸರಳರೇಖೆಗಳು ತ್ರಿಕೋನದ ಭುಜಗಳಾದರೆ, ABC ತ್ರಿಕೋನದ ಲಂಬಕೇಂದ್ರವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

10. $5x - 6y - 1 = 0$ ಮತ್ತು $3x + 2y + 5 = 0$ ಸರಳರೇಖೆಗಳ ಛೇದನ ಬಿಂದುವಿನ ಮೂಲಕ ಹಾದುಹೋಗುವ ಮತ್ತು ಸಮನಾದ ಛೇದಕಗಳನ್ನು ಳ್ಳ ಸರಳರೇಖೆಯ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

11. $8x + y + 12 = 0$ ಮತ್ತು $7x - 3y - 2 = 0$ ಸರಳರೇಖೆಗಳ ಛೇದನ ಬಿಂದುವಿನ ಮೂಲಕ ಹಾದುಹೋಗುವ ಮತ್ತು x–ಅಕ್ಷದ ಮೇಲೆ -3 ಛೇದಕವನ್ನು ಳ್ಳ ಸರಳರೇಖೆಯ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

12. $x - y = 6$, $4y - 3x +22 = 0$ ಮತ್ತು $6x + 5y + 8 = 0$ ಸರಳರೇಖೆಗಳು ಏಕಬಿಂದುಸ್ಥವೆಂದು ನಿರೂಪಿಸಿ.

13. $2x +5y - 8 = 0$, $2x + 3y - 4 = 0$ ಮತ್ತು $ax + by = 1$ ಸರಳರೇಖೆಗಳು ಸಂಧಿಸುವ ಬಿಂದುವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ ಮತ್ತು $-a + 2b = 1$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

14. ಕೆಳಗೆ ಸೂಚಿಸಿರುವ ಸರಳರೇಖೆಗಳು ಏಕಬಿಂದುಸ್ಥವಾದರೆ, k ನ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

   (i) $kx + 4y - 6 = 0$, $3x + 4y = 5$, $2x + 3y = 4$

   (ii) $x + y = 3$, $2x + y = 5$, $kx + 3y = 11$

15. $a+b+c=0$ ಆದಾಗ $ax+by+c=0$, $bx+cy+a=0$ ಮತ್ತು $cx+ay+b=0$ ಸರಳರೇಖೆಗಳು ಏಕಬಿಂದುಸ್ಥವಾಗುವುವೆಂದು ತೋರಿಸಿ.

16. $(2,1)$ ಬಿಂದುವಿನಿಂದ $3x-4y+3=0$ ಸರಳರೇಖೆಯ ದೂರವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

17. $(2,3)$ ಬಿಂದುವಿನಿಂದ $3x-y+5=0$ ಸರಳರೇಖೆಯ ದೂರವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

18. $x+y-5=0$ ಸರಳರೇಖೆಯ ಮೇಲಿನ A ಬಿಂದುವು $6x+8y+1=0$ ಸರಳರೇಖೆಯಿಂದ 3.5 ಮಾನಗಳಷ್ಟು ದೂರದಲ್ಲಿದ್ದರೆ, A ಬಿಂದುವಿನ ನಿರ್ದೇಶಕಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

19. $x+2y-1=0$ ಸರಳರೇಖೆಗೆ ಲಂಬವಾಗಿಯೂ ಮತ್ತು $(1, 3)$ ಬಿಂದುವಿನಿಂದ $2\sqrt{5}$ ಮಾನಗಳಷ್ಟು ದೂರದಲ್ಲಿರುವ ಸರಳರೇಖೆಯ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

20. ಕೆಳಗೆ ಸೂಚಿಸಿರುವ ಸಮಾಂತರ ಸರಳರೇಖೆಗಳ ನಡುವಿನ ಅಂತರವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

    (i) $x+3y+6=0$ ಮತ್ತು $x+3y-1=0$

    (ii) $4x+5y-4=0$ ಮತ್ತು $8x+10y+9=0$

21. $4x-3y+6=0$ ಸರಳರೇಖೆ ಮತ್ತು $(3, 4)$ ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ಸಮದೂರದಲ್ಲಿರುವ ಬಿಂದುವಿನ ಪಥ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

22. $2x+y+6=0$ ಮತ್ತು $x+2y+4=0$ ಸರಳರೇಖೆಗಳಿಂದ ಒಂದು ಬಿಂದುವಿನ ಅಂತರಗಳು 3:2 ಪ್ರಮಾಣದಲ್ಲಿದ್ದರೆ, ಅಂತಹ ಬಿಂದುವಿನ ಪಥ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

23. $x+2y-1=0$ ಮತ್ತು $4x+2y-3=0$ ಸರಳರೇಖೆಗಳ ನಡುವಿನ ಕೋನದ ದ್ವಿಭಾಜಕಗಳ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ; ಮತ್ತು ಅವುಗಳನ್ನು ಪ್ರತ್ಯೇಕಿಸಿ.

24. $3x+y+8=0$ ಮತ್ತು $x+3y+10=0$ ಸರಳರೇಖೆಗಳ ನಡುವಿನ ಕೋನದ ದ್ವಿಭಾಜಕಗಳು ಲಂಬಕೋನಗಳೆಂದು ತೋರಿಸಿ.

25. ಕೆಳಗೆ ಸೂಚಿಸಿರುವ ಸರಳರೇಖೆಗಳ ನಡುವಿನ ಲಘುಕೋನ ದ್ವಿಭಾಜಕದ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

    (i) $3x-4y+5=0$ ಮತ್ತು $5x+12y-13=0$

    (ii) $3x+4y-2=0$ ಮತ್ತು $12x-5y+8=0$

    (iii) $x=2y-3$ ಮತ್ತು $y=2x+5$

9.8 ಜೋಡಿ ಸರಳರೇಖೆಗಳು

ನಾವು ಇಲ್ಲಿಯವರೆಗೆ ಅಭ್ಯಾಸಮಾಡಿರುವ ಸರಳರೇಖೆಗಳ ವಿವಿಧ ರೂಪಗಳ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಆಧರಿಸಿ, x ಮತ್ತು y ನಲ್ಲಿರುವ ರೇಖೀಯ ಸಮೀಕರಣ $ax + by + c=0$ ಸರಳರೇಖೆಯನ್ನು ಪ್ರತಿನಿಧಿಸುತ್ತದೆ ಎಂಬುದನ್ನು ತಿಳಿದಿದ್ದೇವೆ. ಈ ಸಮೀಕರಣದಲ್ಲಿರುವ ಸ್ಥಿರಾಂಕವು ಶೂನ್ಯವಾದಾಗ, ಸಮೀಕರಣವು $ax + by = 0$ ಎಂದಾಗುತ್ತದೆ. ಈ ಸರಳ ರೇಖೆಯು ಮೂಲಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಹಾದುಹೋಗುವ ಸರಳರೇಖೆಯನ್ನು ಪ್ರತಿನಿಧಿಸುತ್ತದೆ. ಓಟ-ಛೇದಕ ರೂಪವನ್ನಾಧರಿಸಿ ಮೂಲಬಿಂದುವಿನ ಮೂಲಕ ಹಾದುಹೋಗುವ ಸರಳರೇಖೆಯನ್ನು $y = mx$ ಎಂದು ಪರಿಗಣಿಸುತ್ತೇವೆ. ಈ ವಿಭಾಗದಲ್ಲಿ ನಾವು ಜೊತೆ ಸರಳರೇಖೆಗಳ ಒಟ್ಟಾದ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಅಭ್ಯಾಸ ಮಾಡುವವರಿದ್ದೇವೆ.

9.8.1 ಮೂಲಬಿಂದುವಿನ ಮೂಲಕ ಹಾದು ಹೋಗುವ ಜೋಡಿ ಸರಳರೇಖೆಗಳ ಸಮೀಕರಣ

$y = m_1x$ ಮತ್ತು $y = m_2x$ ಎರಡು ಭಿನ್ನವಾದ ಹಾಗು ಮೂಲಬಿಂದುವಿನ ಮೂಲಕ ಹಾದುಹೋಗುವ ಸರಳರೇಖೆಗಳನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸೋಣ. ಈ ಎರಡು ಸರಳರೇಖೆಗಳ ಒಟ್ಟಾದ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು $(y - m_1x)\ (y - m_2x) = 0$ ಎಂದು ಪರಿಗಣಿಸಲಾಗುವುದು. ಇದನ್ನು ಬಿಡಿಸಿ ಬರೆದಾಗ

$$(m_1m_2)x^2 - (m_1+m_2)\,xy + y^2 = 0$$

ಅಥವಾ, (ಓಟಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧ) x^2 - (ಓಟಗಳ ಮೊತ್ತ) $xy + y^2 = 0$ ಎಂದಾಗುತ್ತದೆ. ಮೇಲಿನ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಸಾಮಾನ್ಯರೂಪದಲ್ಲಿ

$$ax^2 + 2hxy + by^2 = 0$$

ಎಂದು ಬರೆಯಬಹುದು.

$a = m_1m_2\,,\ h = -\left(\dfrac{m_1 + m_2}{2}\right)$ ಮತ್ತು $b = 1$ ಎಂದಾಗುತ್ತದೆ

$ax^2 + 2hxy + by^2 = 0$ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು x ಮತ್ತು y ನಲ್ಲಿರುವ **ಎರಡನೇ ಘಾತದ ಸಮಜಾತೀಯ** ಸಮೀಕರಣವೆಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ಸಮಜಾತೀಯ ಹಾಗೂ x ಮತ್ತು y ನಲ್ಲಿರುವ ಎರಡನೆಘಾತದ ಸಮೀಕರಣವು ಮೂಲಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಹಾದುಹೋಗುವ ಜೋಡಿ ಸರಳರೇಖೆಗಳ ಒಟ್ಟಾದ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಪ್ರತಿನಿಧಿಸುತ್ತದೆ. ಈ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಎರಡು ಸರಳ ಅಪವರ್ತನಗಳಾಗಿ ಮಾಡಲು ಸಾಧ್ಯವಿದೆ. ಈ ಅಪವರ್ತನಗಳು ಸರಳರೇಖೆಗಳ ಪ್ರತ್ಯೇಕ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಪ್ರತಿನಿಧಿಸುತ್ತವೆ.

$ax^2 + 2hxy + by^2 = 0$ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು y/x ನಲ್ಲಿರುವ ವರ್ಗಸಮೀಕರಣವೆಂದು ಪರಿಗಣಿಸಿದಾಗ

$$b\,(y/x)^2 + 2h\,(y/x) + a = 0$$

ಎಂದಾಗುತ್ತದೆ. ಆಗ

$$\frac{y}{x} = \frac{-2h \pm \sqrt{4h^2 - 4ab}}{2b} = \frac{-h \pm \sqrt{h^2 - ab}}{b}$$

ಅಥವಾ $y = \left(\frac{-h \pm \sqrt{h^2 - ab}}{b}\right)x$

ಎಂದಾಗುತ್ತದೆ. ಸರಳರೇಖೆಗಳ ಪ್ರತ್ಯೇಕ ಸಮೀಕರಣಗಳು

$$y = \left(\frac{-h + \sqrt{h^2 - ab}}{b}\right)x$$

ಮತ್ತು $y = \left(\frac{-h - \sqrt{h^2 - ab}}{b}\right)x$

ಎಂದಾಗುತ್ತವೆ. ಮೇಲಿನ ಸಮೀಕರಣಗಳಿಂದ, ಜೊತೆ ಸರಳರೇಖೆಗಳ ಓಟಗಳು

$$m_1 = \frac{-h + \sqrt{h^2 - ab}}{b}, \quad m_2 = \frac{-h - \sqrt{h^2 - ab}}{b}$$

ಎಂದಾಗುತ್ತದೆ. ಆಗ

$$m_1 + m_2 = -\frac{2h}{b}, \quad m_1 m_2 = \frac{a}{b}$$

ಎಂದಾಗುತ್ತದೆ.

ಸೂಚನೆ :

1. $h^2 - ab < 0$ ಆದಾಗ, $m_1\ m_2$ ಗಳು ನೈಜ ಮತ್ತು ಭಿನ್ನವಾಗಿವೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ಸರಳರೇಖೆಗಳೂ ಸಹ ನೈಜ ಮತ್ತು ಭಿನ್ನವಾದವುಗಳು;
2. $h^2 - ab = 0$ ಆದಾಗ, $m_1 = m_2$ ಆಗುವುದು. ಆದ್ದರಿಂದ ಸರಳರೇಖೆಗಳು ಐಕ್ಯವಾಗುವುವು;
3. $h^2 - ab < 0$ ಆದಾಗ, m_1 ಮತ್ತು m_2 ಮಿಶ್ರ ಊಹ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾಗಿರುತ್ತವೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ಸರಳರೇಖೆಗಳು ಊಹ್ಯವಾಗುವುವು.

9.8.2 ಜೋಡಿ ಸರಳರೇಖೆಗಳ ನಡುವಿನ ಕೋನ

ಮೇಲಿನ ವಿವರಣೆಯಿದ, $m_1 + m_2 = -\frac{2h}{b}$ ಮತ್ತು $m_1m_2 = \frac{a}{b}$ ಎಂದು ತಿಳಿದಿದ್ದೇವೆ. ಜೋಡಿ ಸರಳರೇಖೆಗಳ ನಡುವಿನ ಕೋನ θ ಆಗಿರಲಿ. ಆಗ

$$\tan\theta = \left|\frac{m_1 - m_2}{1 + m_1m_2}\right| \qquad \text{(ಸೂತ್ರದ ಆಧಾರದ ಮೇರೆಗೆ)}$$

ಈಗ, $m_1m_2 = \frac{a}{b}$ ಮತ್ತು $m_1 + m_2 = \frac{2h}{b}$

ಆಗಿರುವುದರಿಂದ

$$m_1 - m_2 = \sqrt{(m_1 + m_2)^2 - 4m_1m_2}$$

$$= \sqrt{\left(-\frac{2h}{b}\right)^2 - 4\left(\frac{a}{b}\right)}$$

$$= \frac{2\sqrt{h^2 - ab}}{b}$$

ಆದ್ದರಿಂದ, $$\tan\theta = \left|\frac{\frac{2\sqrt{h^2 - ab}}{b}}{1 + \frac{a}{b}}\right| = \left|\frac{2\sqrt{h^2 - ab}}{a + b}\right|$$

ಸೂಚನೆ :

(i) ಸರಳರೇಖೆಗಳು ಲಂಬವಾಗಿದ್ದಲ್ಲಿ, $\theta = 90°$ ಅಂದರೆ $\tan\theta \to \infty$ ಅಥವಾ $a + b = 0$

(ii) ಸರಳರೇಖೆಗಳು ಐಕ್ಯವಾದವುಗಳಾದಾಗ $\theta = 0$; ಆಗ $\tan\theta = 0$ ಅಥವಾ $h^2 - ab = 0$.

9.8.3 ಮೂಲ ಬಿಂದುವಿನ ಮೂಲಕ ಹಾದುಹೋಗುವ ಮತ್ತು $ax^2 + 2hxy + by^2 = 0$ ಸರಳರೇಖೆಗಳಿಗೆ ಲಂಬವಾಗಿರುವ ಸರಳರೇಖೆಗಳು

ಈಗ, $ax^2 + 2hxy + by^2 = 0$ ಸರಳರೇಖೆಗಳ ಪ್ರತ್ಯೇಕ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು $y - m_1x = 0$ ಮತ್ತು $y - m_2x = 0$ ಎಂದು ಪರಿಗಣಿಸೋಣ. ಈ ಸರಳರೇಖೆಗಳಿಗೆ

ಲಂಬವಾಗಿಯೂ ಮತ್ತು ಮೂಲಬಿಂದುವಿನ ಮೂಲಕವಾಗಿಯೂ ಹಾದುಹೋಗುವ ಸರಳರೇಖೆಗಳು $m_1y + x = 0$ ಮತ್ತು $m_2y + x = 0$ ಎಂದಾಗುತ್ತದೆ. ಇವುಗಳ ಒಟ್ಟಾರೆ ಸಮೀಕರಣವು $(m_1y + x)(m_2y + x) = 0$ ಅಥವಾ $x^2 + (m_1 + m_2)xy + (m_1m_2)y^2 = 0$.

ಆದರೆ $m_1 + m_2 = \frac{-2h}{b}$ ಮತ್ತು $m_1m_2 = \frac{a}{b}$

ಆಗಿರವುದರಿಂದ, ಮೇಲಿನ ಸಮೀಕರಣವು

$$x^2 + \left(\frac{-2h}{b}\right)xy + \left(\frac{a}{b}\right)y^2 = 0$$

ಅಥವಾ $bx^2 - 2hxy + ay^2 = 0$ ಆಗಿರುತ್ತದೆ.

9.8.4 ಎರಡನೇ ಘಾತದ ಸಾಮಾನ್ಯ ಸಮೀಕರಣವು ಜೋಡಿ ಸರಳರೇಖೆಗಳನ್ನು ಪ್ರತಿನಿಧಿಸಲು ಬೇಕಾಗುವ ನಿಯಮ

ಎರಡನೇ ಘಾತದ ಸಾಮಾನ್ಯ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು

$$ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0 \quad \dots (1)$$

ಎಂಬ ಮಾದರಿಯಲ್ಲಿ ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳುತ್ತೇವೆ.

ಸಮೀಕರಣ (1)ನ್ನು ನಾವು x - ನಲ್ಲಿರುವ ವರ್ಗಸಮೀಕರಣವೆಂದು ಪರಿಗಣಿಸಿದಾಗ

$$ax^2 + 2x(hy + g) + (by^2 + 2fy + c) = 0$$

ಅಥವಾ $x = \frac{-2(hy + g) \pm \sqrt{4(hy + g)^2 - 4a(by^2 + 2fy + c)}}{2a}$

ಅಥವಾ $ax = -(hy + g) \pm \sqrt{(hy + g)^2 - a(by^2 + 2fy + c)}$

$$ax + hy + g = \pm \sqrt{(hy + g)^2 - a(by^2 + 2fy + c)}$$

ಎಂದಾಗುತ್ತದೆ. ಸಮೀಕರಣ (1) ಜೋಡಿ ಸರಳರೇಖೆಗಳನ್ನು ಪ್ರತಿನಿಧಿಸಿದರೆ

$$(hy + g)^2 - a(by^2 + 2fy + c)$$

ಒಂದು ಶುದ್ಧ ವರ್ಗವಾಗಬೇಕು ಅಂದರೆ

$$y^2(h^2 - ab) + 2y\,(hg - af) + g^2 - ac$$

ವರ್ಗೋಕ್ತಿಯ **ಶೋಧಕವು** ಶೂನ್ಯವಾಗಿರಬೇಕು.

ಅಂದರೆ, $4[(gh - af)^2 - (h^2 - ab)(g^2 - ac)] = 0$

ಅಥವಾ $a\,[-abc - 2fgh + af^2 + bg^2 + ch^2] = 0\,,\ \ a \neq 0$

ಅಥವಾ $abc + 2fgh - af^2 - bg^2 - ch^2 = 0$

ಇದನ್ನು ಸಮೀಕರಣ (1)ರ ಜೊತೆ ಸರಳರೇಖೆಗಳನ್ನು ಪ್ರತಿನಿಧಿಸಲು ಪೂರೈಸಬೇಕಾದ ನಿಯಮವೆಂದು ಪರಿಗಣಿಸುತ್ತೇವೆ.

ಈ ನಿಯಮವನ್ನು ಇನ್ನೊಂದು ರೀತಿಯಲ್ಲೂ ಬರೆಯಬಹುದು. ಅದೇನೆಂದರೆ

$$\begin{vmatrix} a & h & g \\ h & b & f \\ g & f & c \end{vmatrix} = 0$$

ಉದಾಹರಣೆ : $ax^2 + 2hxy + by^2 = 0$ ಜೋಡಿ ಸರಳರೇಖೆಗಳು $ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ ಸರಳರೇಖೆಗಳಿಗೆ ಸಮಾಂತರವಾಗಿವೆಯೆಂದು ತೋರಿಸಿ.

$$ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$$

ಸಮೀಕರಣದ ಪ್ರತ್ಯೇಕ ಸಮೀಕರಣಗಳು

$$l_1x + m_1y + n_1 = 0 \text{ ಮತ್ತು } l_2x + m_2y + n_2 = 0$$

ಎಂದು ಪರಿಗಣಿಸೋಣ. ಆಗ

$$ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c \equiv (l_1x + m_1y + n_1)(l_2x + m_2y + n_2)$$

ಅಥವಾ

$$ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c$$

$$\equiv (l_1l_2)x^2 + (l_1m_2 + l_2m_1)$$

ಎಂದಾಗುತ್ತದೆ. ಎರಡು ಬದಿಯ ಅನುರೂಪವಾದ ಸಹಾಂಕಗಳನ್ನು ಹೋಲಿಸಿದಾಗ

$$l_1l_2 = a,\quad m_1m_2 = b,\quad n_1n_2 = c,\quad l_1m_2 + l_2m_1 = 2h$$

$$l_1n_2 + l_2n_1 = 2g \text{ ಮತ್ತು } m_1n_2 + m_2n_1 = 2f \qquad \dots (1)$$

ಈಗ, $l_1x+m_1y+n_1=0$ ಮತ್ತು $l_2x+m_2y+n_2=0$ ಸರಳರೇಖೆಗಳಿಗೆ ಸಮಾಂತರವಾಗಿರುವ ಮತ್ತು ಮೂಲ ಬಿಂದುವಿನ ಮೂಲಕ ಹಾದುಹೋಗುವ ಸರಳರೇಖೆಗಳು $l_1x+m_1y=0$ ಮತ್ತು $l_2x+m_2y=0$ ಎಂದಾಗುತ್ತದೆ.

ಇವುಗಳ ಒಟ್ಟಾದ ಸಮೀಕರಣ

$$(l_1x+m_1y)(l_2x+m_2y)=0$$

ಅಥವಾ $(l_1l_2)x^2+(l_1m_2+l_2m_1)xy+(m_1m_2)y^2=0$

ಸಮೀಕರಣ (1) ರಿಂದ

$$ax^2+2hxy+by^2=0$$

ಆದ್ದರಿಂದ, $ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c=0$ ಸರಳರೇಖೆಗಳು

$ax^2+2hxy+by^2=0$ ಸರಳರೇಖೆಗಳಿಗೆ ಸಮಾಂತರವಾಗಿವೆ.

ಮೇಲಿನ ನಿರೂಪಣೆಯ ಆಧಾರದ ಮೇರೆಗೆ

$$ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c=0$$

ಸರಳ ರೇಖೆಗಳ ನಡುವಿನ ಲಘು ಕೋನವು

$$\tan\theta=\left|\frac{2\sqrt{h^2-ab}}{a+b}\right|$$

ಎಂದು ಆಗುವುದು.

ಸೂಚನೆ : ಸಾಮಾನ್ಯ ಸಮೀಕರಣವು ಜೋಡಿ ಸರಳರೇಖೆಗಳನ್ನು ಪ್ರತಿನಿಧಿಸಿ

(1) $a+b=0$ ಆದಾಗ ಸರಳರೇಖೆಗಳು ಲಂಬವಾಗುವುವು;

(2) $h^2-ab=0$ ಆದಾಗ ಸರಳರೇಖೆಗಳು ಸಮಾಂತರವಾಗಿರುವುವು.

9.8.5 $ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c=0$ ರೇಖೆಗಳ ಛೇದನಬಿಂದು

ಎರಡನೇ ಘಾತದ ಸಾಮಾನ್ಯ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಪರಿಗಣಿಸಿ:

$$ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c=0 \qquad \dots (1)$$

ಈ ಸರಳರೇಖೆಗಳ ಛೇದನ ಬಿಂದು (x_1, y_1) ಆಗಿರಲಿ. ಮೂಲ ಬಿಂದುವನ್ನು (x_1, y_1)ಗೆ ಸ್ಥಾನಾಂತರಿಸಿದಾಗ ಹೊಸ ಅಕ್ಷಗಳು ಮೊದಲ ಅಕ್ಷಗಳಿಗೆ ಸಮಾಂತರವಾಗಿರಲಿ. ಆಗ ಸಮೀಕರಣ (1)

$$a(x+x_1)^2+2h(x+x_1)(y+y_1)+b(y+y_1)^2+2g(x+x_1)+2f(y+y_1)+c=0$$

ಅಥವಾ

$$ax^2 + 2hxy + by^2 + 2(ax_1 + hy_1 + g)x + 2(hx_1 + by_1 + f)y$$

$$+ ax_1^2 + 2hx_1y_1 + by_1^2 + 2gx_1 + 2fy_1 + c = 0 \quad \text{... (2)}$$

ಸಮೀಕರಣ (2)ರ ಸರಳರೇಖೆಗಳು ಹೊಸ ಮೂಲಬಿಂದುವಿನ ಮೂಲಕ ಹಾದು ಹೋಗುವುದರಿಂದ ಸಮೀಕರಣ (3)ರಲ್ಲಿನ ಸ್ಥಿರಸಂಖ್ಯೆ ಮತ್ತು x, y ನ ಸಹಾಂಕಗಳು ಪ್ರತ್ಯೇಕವಾಗಿ ಶೂನ್ಯವಾಗಬೇಕು.

ಅಂದರೆ, $ax_1 + hy_1 + g = 0 \quad \text{... (3)}$

$hx_1 + by_1 + f = 0 \quad \text{... (4)}$

ಮತ್ತು $ax_1^2 + 2hx_1y_1by_1^2 + 2gx_1 + 2fy_1 + c = 0 \quad \text{... (5)}$

ಸಮೀಕರಣ (3) ಮತ್ತು (4)ನ್ನು ಬಿಡಿಸಿದಾಗ ಸಮೀಕರಣ (1)ರ ಸರಳರೇಖೆಗಳ ಛೇದನ ಬಿಂದುವಿನ ನಿರ್ದೇಶಕಗಳು ದೊರೆಯುತ್ತವೆ. ಆದ್ದರಿಂದ

$$x_1 = \frac{hf - bg}{ab - h^2} \text{ ಮತ್ತು } y_1 = \frac{gh - af}{ab - h^2}$$

9.8.6 $ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ ಸಮಾಂತರ ಸರಳರೇಖೆಗಳನ್ನು ಪ್ರತಿನಿಧಿಸಲು ಬೇಕಾದ ನಿಯಮ

$$ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0 \quad \text{... (1)}$$

ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಪರಿಗಣಿಸಿ. ಇದನ್ನು

$$(ax + hy + g)^2 - [(hy + g)^2 - aby^2 - 2afy - ac] = 0$$

ಅಥವಾ $(ax + hy + g)^2 = (h^2 - ab)y^2 + 2y(gh - af) + (g^2 - ac)$

ಎಂದು ಬರೆಯಬಹುದು.

ಈ ಸಮೀಕರಣದಲ್ಲಿ y^2 ಮತ್ತು yಗಳ ಸಹಾಂಕಗಳು ಶೂನ್ಯವಾದಾಗ ಮತ್ತು $g^2 - ac > 0$ ಆದಾಗ ಸಮೀಕರಣ (1) ಸಮಾಂತರ ರೇಖೆಗಳನ್ನು ಪ್ರತಿನಿಧಿಸುತ್ತದೆ. ಅಂದರೆ

$$h^2 - ab = 0 \text{ ಮತ್ತು } gh - af = 0$$

ಇವುಗಳನ್ನೇ ಸಮಾಂತರ ರೇಖೆಗಳನ್ನು ಪ್ರತಿನಿಧಿಸಲು ಬೇಕಾದ ನಿಯಮವೆಂದು ಪರಿಗಣಿಸಲಾಗುತ್ತದೆ.

ಸಮಾಂತರ ಸರಳರೇಖೆಗಳ ಸಮೀಕರಣಗಳು

$(ax+hy+g)^2 = g^2-ac > 0$ ಆದಾಗ

$ax+hy+g = \pm\sqrt{g^2-ac}$

ಅಥವಾ $ax+hy+g-\sqrt{g^2-ac} = 0$ ... (2)

ಮತ್ತು $ax+hy+g+\sqrt{g^2-ac} = 0$ ... (3)

ಈಗ, (2) ಮತ್ತು (3) ಸಮಾಂತರ ಸರಳರೇಖೆಗಳ ನಡುವಿನ ದೂರ

$$d = \left|\frac{(g+\sqrt{g^2-ac})-(g-\sqrt{g^2-ac})}{\sqrt{a^2+h^2}}\right|$$

ಅಥವಾ $d = \left|\frac{2\sqrt{g^2-ac}}{\sqrt{a^2+ab}}\right|$ $(\because h_2 = ab)$

ಅಥವಾ $d = \left| 2\left[\frac{g^2-ac}{a(a+b)}\right]^{1/2} \right|$

[ಏಕೆಂದರೆ, $ax+by+c = 0$ ಮತ್ತು $ax+by+c_1 = 0$ ಸಮಾಂತರ ಸರಳರೇಖೆಗಳ ನಡುವಿನ ದೂರ

$$d = \left|\frac{c-c_1}{\sqrt{a^2+b^2}}\right|$$

ಎಂಬ ಸೂತ್ರದಿಂದ ಪಡೆಯಬಹುದು.]

ಉದಾಹರಣೆಗಳು

1. $4x^2-24xy+11y^2 = 0$ ಜೋಡಿ ಸರಳರೇಖೆಗಳ ಪ್ರತ್ಯೇಕ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. ಅವುಗಳ ಕೋನವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ದತ್ತ ಸಮೀಕರಣದ ಅಪವರ್ತನಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವುದರಿಂದ

$$4x^2-24xy+11y^2 = (2x-y)(2x-11y) = 0$$

ಎಂದಾಗುತ್ತದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ಪ್ರತ್ಯೇಕ ಸರಳರೇಖೆಗಳ ಸಮೀಕರಣಗಳು

$2x-y=0$ ಮತ್ತು $2x-11y=0$.

ಅವುಗಳ ನಡುವಿನ ಲಘುಕೋನ θ ಆಗಿದ್ದರೆ

$$\tan\theta = \frac{2\sqrt{h^2 - ab}}{a+b} = \frac{2\sqrt{144-44}}{4+11} = \frac{4}{3}$$

ಅಥವಾ $\theta = \tan^{-1}(4/3)$ ಆಗಿರುತ್ತದೆ.

2. $12x^2 + 7xy + by^2 + 13x - y + 3 = 0$ ಸಮೀಕರಣವು ಜೋಡಿ ಸರಳರೇಖೆಗಳನ್ನು ಪ್ರತಿನಿಧಿಸಿದರೆ, b ಯ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಇಲ್ಲಿ, $a = 12,\quad b = \text{b},\quad c = 3,$

$$h = \frac{7}{2},\quad g = \frac{13}{2},\quad f = -\frac{1}{2}$$

ಜೋಡಿ ಸರಳರೇಖೆಗಳನ್ನು ಪ್ರತಿನಿಧಿಸುವ ನಿಯಮದನುಸಾರ

$$\begin{vmatrix} a & h & g \\ h & b & f \\ g & f & c \end{vmatrix} = 0$$

ಆದ್ದರಿಂದ, $$\begin{vmatrix} 12 & 7/2 & 13/2 \\ 7/2 & b & -1/2 \\ 13/2 & -1/2 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

ಅಥವಾ $$12\left[3b - \frac{1}{4}\right] - \frac{7}{2}\left[\frac{21}{2} + \frac{13}{4}\right] + \frac{13}{2}\left[-\frac{7}{4} - \frac{13}{2}b\right] = 0$$

ಅಥವಾ $$\frac{144b - 169b}{4} = \frac{12 + 147 + 91}{4}$$

ಅಥವಾ $b = -10.$

3. $y^2 + xy - 2x^2 - 5x - y - 2 = 0$ ಜೋಡಿ ಸರಳರೇಖೆಗಳನ್ನು ಪ್ರತಿನಿಧಿಸುವುದೆಂದು ಸಾಧಿಸಿ ಮತ್ತು ಅವುಗಳ ಛೇದನ ಬಿಂದುವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಇಲ್ಲಿ, $a = -2,\ b = 1,\ c = -2,\ h = \frac{1}{2},\ g = \frac{-5}{2}$ ಮತ್ತು $f = \frac{-1}{2}$

ನಿಯಮದನುಸಾರ, $abc + 2fgh - af^2 - bg^2 - ch^2 = 0$ ಆಗಿರಬೇಕು.

ಸಮೀಕರಣದ ಎಡಭಾಗ

$$(-2)(1)(-2)+2\left(\frac{-1}{2}\right)\left(\frac{-5}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)-(-2)\left(\frac{1}{4}\right)-(1)\left(\frac{25}{4}\right)+2\left(\frac{1}{4}\right)$$

$$=4+\frac{5}{4}+\frac{1}{2}-\frac{25}{4}+\frac{1}{2}$$

$$=\frac{20+5-25}{4}=\frac{0}{4}=0,$$ ಸಮೀಕರಣದ ಬಲಭಾಗ

ಆದ್ದರಿಂದ ದತ್ತ ಸಮೀಕರಣವು ಜೋಡಿ ಸರಳರೇಖೆಗಳನ್ನು ಪ್ರತಿನಿಧಿಸುತ್ತದೆ.

ಛೇದನ ಬಿಂದು $\equiv\left(\frac{hf-bg}{ab-h^2}, \frac{hg-af}{ab-h^2}\right)$

$$\equiv\left(\frac{\left(\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)-(1)\left(\frac{-5}{2}\right)}{(-2)(1)-\frac{1}{4}}, \frac{\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{-5}{2}\right)-(-2)\left(\frac{-1}{2}\right)}{(-2)(1)-\frac{1}{4}}\right)$$

$\equiv (-1, 1).$

4. $x^2+2xy+y^2-8ax-8ay-9a^2=0$ ಸಮೀಕರಣವು ಸಮಾಂತರ ಸರಳರೇಖೆಗಳನ್ನು ಪ್ರತಿನಿಧಿಸುವುದೆಂದು ಸಾಧಿಸಿ ಮತ್ತು ಅವುಗಳ ನಡುವಿನ ಅಂತರವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ನಿಯಮದನುಸಾರ, $h^2 = ab$ ಮತ್ತು $af^2 = bg^2$ ಆಗಿರಬೇಕು.

ಇಲ್ಲಿ, $a=1$, $b=1$, $h=1$, $g=-4a$, $f=-4a$, $c=-9a^2$

$\therefore h^2 = 1, \; ab=(1)(1)=1$ ...(1)

$af^2 = (1)(16a^2)$ ಮತ್ತು $bg^2=(1)(16a^2)$ ...(2)

(1) ಮತ್ತು (2) ಸಮೀಕರಣಗಳಿಂದ ಸರಳರೇಖೆಗಳು ಸಮಾಂತರ ಸರಳರೇಖೆಗಳೆಂದು ನಿರೂಪಿತವಾಗುವುದು.

ಸಮಾಂತರ ಸರಳರೇಖೆಗಳ ನಡುವಿನ ದೂರ

$$2\left[\frac{g^2-ac}{a(a+b)}\right]^{1/2}=2\left[\frac{16a^2+(1)9a^2}{1+1}\right]^{1/2}=2\left[\frac{25a^2}{2}\right]^{1/2}=5\sqrt{2}a$$ ಮಾನಗಳು.

ಅಭ್ಯಾಸ - 9.8

1. ಕೆಳಗೆ ಸೂಚಿಸಿರುವ ಸಮೀಕರಣಗಳ ಪ್ರತ್ಯೇಕವಾದ ಸರಳರೇಖೆಗಳ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಮತ್ತು ಅವುಗಳ ನಡುವಿನ ಕೋನವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
   (a) $8x^2 - 2xy - 3y^2 = 0$
   (b) $6x^2 - 5xy + y^2 = 0$
   (c) $2x^2 - 3xy - 2y^2 = 0$
2. $ax^2 + 2hxy + by^2 = 0$ ಸಮೀಕರಣದಲ್ಲಿ ಒಂದು ಸರಳರೇಖೆಯ ಓಟವು ಇನ್ನೊಂದು ಸರಳರೇಖೆಯ ಓಟದ ಎರಡರಷ್ಟಿದ್ದರೆ $8h^2 = 9ab$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ.
3. ತ್ರಿಕೋನವೊಂದರ ಭುಜಗಳು $12x^2 - 20xy + 7y^2 = 0$ ಮತ್ತು $2x - 3y + 4 = 0$ ಆದರೆ, ತ್ರಿಕೋನದ ಗುರುತ್ವಕೇಂದ್ರವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
4. $ax^2 + 2hxy + by^2 = 0$ ಮತ್ತು $lx + my - 1 = 0$ ಸರಳರೇಖೆಗಳು ರಚಿಸುವ ತ್ರಿಭುಜದ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲವು

   $\dfrac{\sqrt{h^2 - ab}}{am^2 - 2hlm + bl^2}$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.
5. (x_1, y_1) ಬಿಂದುವಿನಿಂದ $ax^2 + 3hxy + by^2 = 0$ ಸರಳರೇಖೆಗಳಿಗೆ ಎಳೆದ ಲಂಬರೇಖೆಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧವು

   $\dfrac{ax_1^2 + 2hx_1y_1 + by_1^2}{\sqrt{(a-b)^2 + 4h^2}}$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.
6. ಕೆಳಗೆ ಸೂಚಿಸಿರುವ ಸಮೀಕರಣಗಳು ಜೋಡಿ ಸರಳರೇಖೆಗಳನ್ನು ಪ್ರತಿನಿಧಿಸುವುವೆಂದು ಸಾಧಿಸಿ.
   (a) $12x^2 - 10xy + 2y^2 + 11x - 5y + 2 = 0$
   (b) $2x^2 + xy - y^2 - 3x + 6y - 9 = 0$
   (c) $3x^2 - 17xy - 28y^2 + x + 18y - 2 = 0$
7. $x^2 + 5xy + 4y^2 + 3x + 2y + \lambda = 0$ ಸಮೀಕರಣವು ಜೋಡಿ ಸರಳರೇಖೆಗಳನ್ನು ಪ್ರತಿನಿಧಿಸಿದರೆ λದ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. ಸರಳರೇಖೆಗಳ ನಡುವಿನ ಕೋನವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
8. $x^2 + \lambda xy + y^2 - 5x - 7y + 6 = 0$ ಸಮೀಕರಣವು ಜೋಡಿ ಸರಳರೇಖೆಗಳನ್ನು ಪ್ರತಿನಿಧಿಸಿದರೆ λದ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

9. $3x^2 + 10xy + 8y^2 + 14x + 22y + 15 = 0$ ಸರಳರೇಖೆಗಳ ನಡುವಿನ ಕೋನವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

10. $x^2 + 2\sqrt{3}xy + 3y^2 - 3x - 3\sqrt{3}y - 4 = 0$ ಸರಳರೇಖೆಗಳು ಸಮಾಂತರವೆಂದು ತೋರಿಸಿ. ಅವುಗಳ ನಡುವಿನ ಅಂತರವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

11. $4x^2 + 4xy + y^2 - 6x - 3y - 4 = 0$ ಸಮೀಕರಣವು ಸಮಾಂತರ ಸರಳರೇಖೆಗಳನ್ನು ಪ್ರತಿನಿಧಿಸುವುದೆಂದು ಸಾಧಿಸಿ. ಅವುಗಳ ನಡುವಿನ ಅಂತರವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

12. $12x^2 + 7xy - 12y^2 - x + 7y - 1 = 0$ ಸಮೀಕರಣದ ಸರಳರೇಖೆಗಳ ಪ್ರತ್ಯೇಕವಾದ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ ಮತ್ತು ಅವುಗಳ ಛೇದನ ಬಿಂದುವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

13. $ax^2 + 3xy - 2y^2 - 5x + 5y + c = 0$ ಸಮೀಕರಣವು ಲಂಬ ಸರಳರೇಖೆಗಳನ್ನು ಪ್ರತಿನಿಧಿಸಿದರೆ, a ಮತ್ತು c ನ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

14. $2x^2 + 3xy - 2y^2 = 0$ ಮತ್ತು $2x^2 + 3xy - 2y^2 + 3x + y + 1 = 0$ ಸರಳರೇಖೆಗಳು ಒಂದು ಚೌಕವನ್ನು ಪ್ರತಿನಿಧಿಸುವುದೆಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

15. $ax + by + c = 0$ ಮತ್ತು $(ax + by)^2 - 3(ay - bx)^2 = 0$ ಸರಳರೇಖೆಗಳು ಒಂದು ಸಮಭುಜ ತ್ರಿಕೋನವನ್ನು ರಚಿಸುವುವು ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

16. $ax^2 + 2hxy + 2gx + 2fy + c = 0$ ಸರಳರೇಖೆಗಳು ಮೂಲಬಿಂದುವಿನಿಂದ ಸಮಾನ ದೂರದಲ್ಲಿದ್ದರೆ $f^4 - g^4 = c(bf^2 - ag^2)$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

ಅಧ್ಯಾಯ 10

ಕಲನಶಾಸ್ತ್ರ

10.1 ಪೀಠಿಕೆ

ಕಲನಶಾಸ್ತ್ರವು ಗಣಿತ ಶಾಸ್ತ್ರದ ಅತ್ಯಂತ ಪ್ರಭಾವಶಾಲಿ ಮತ್ತು ಪ್ರಮುಖ ವಿಭಾಗಗಳಲ್ಲಿ ಒಂದು. ಇದನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿದ ಕೀರ್ತಿಯು ಇಂಗ್ಲೆಂಡಿನ ಸರ್ ಐಸಾಕ್ ನ್ಯೂಟನ್ ಮತ್ತು ಜರ್ಮನಿಯ ಲೈಬ್ನಿಟ್ಸ್ (Leibnitz) ಅವರಿಗೆ ಸಲ್ಲುತ್ತದೆ. ಬಹಳ ವರ್ಷಗಳ ತನಕ ಇವರಿಬ್ಬರಲ್ಲಿ ಯಾರು ಮೊದಲು ಈ ಕಲನಶಾಸ್ತ್ರವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿದಿದ್ದು ಎಂಬ ಬಗ್ಗೆ ಭಿನ್ನಾಭಿಪ್ರಾಯವಿತ್ತು. ಆನಂತರ ಒಂದು ಸಾಮಾನ್ಯ ನಿರ್ಣಯಕ್ಕೆ ಬಂದು ಇವರಿಬ್ಬರೂ ಸ್ವತಂತ್ರವಾಗಿ ಬೇರೆ ಬೇರೆ ದೇಶಗಳಲ್ಲಿ (1684 ಮತ್ತು 1693ರಲ್ಲಿ) ಕಂಡುಹಿಡಿದರು ಎಂದು ಅಭಿಪ್ರಾಯಪಡಲಾಗಿದೆ.

ಕಲನಶಾಸ್ತ್ರವು ಯಾವ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಉಪಯೋಗವಾಗುತ್ತದೆ ಎಂಬುದನ್ನು ಈ ಉದಾಹರಣೆಯ ಮೂಲಕ ತಿಳಿದುಕೊಳ್ಳಬಹುದು. ಒಂದು ಸಣ್ಣ ಗಿಡದ ಬೆಳವಣಿಗೆಯನ್ನು ಪರೀಕ್ಷಿಸಿರಿ. ಕೆಲವು ದಿವಸದ ಬಳಿಕ ಅದರ ಬೆಳವಣಿಗೆಯನ್ನು ಸರಿಯಾಗಿ ತಿಳಿಯಬಹುದು ಅಥವಾ ಅಳತೆ ಮಾಡಬಹುದು. ಆದರೆ ಇದರ ಬೆಳವಣಿಗೆಯನ್ನು ಒಂದು ಅಲ್ಪಕಾಲದ ನಂತರ ಅಳೆಯಬೇಕೆಂದರೆ ಅದು ಬಹಳ ಸಣ್ಣ ಪ್ರಮಾಣವಾಗಿದ್ದು ಅದನ್ನು ಅಳೆಯಲು ಕಷ್ಟವಾಗುತ್ತದೆ. ಇದನ್ನು ಅತಿ ಸಣ್ಣ ಪ್ರಮಾಣ (**ಅನಂತಾಲ್ಪ** ಅಥವಾ **ಶೂನ್ಯಗಾಮೀ**) ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ. ಇದರಲ್ಲಿ ಗಮನಿಸಬೇಕಾದ ಅಂಶವೆಂದರೆ, ಗಿಡದಲ್ಲಿ ಎಷ್ಟು ಉದ್ದದ ಬೆಳವಣಿಗೆ ಆಗಿದೆ ಎಂಬುವುದು ಮುಖ್ಯವಲ್ಲ, ಆದರೆ ಯಾವ '**ತಾತ್ಕಾಲಿಕ ವೇಗ**'ದಲ್ಲಿ ಬೆಳವಣಿಗೆ ಆಗಿದೆ ಎಂಬುದು ಮುಖ್ಯ. ಈ ರೀತಿಯ ಸಮಸ್ಯೆಗಳು ಅನಂತಾಲ್ಪ (ಅಥವಾ ಶೂನ್ಯಗಾಮೀ) ಕಲನಶಾಸ್ತ್ರದ ಬುನಾದಿ.

10.1.1 ಉತ್ಪನ್ನಗಳು

ಗಣಿತ ಶಾಸ್ತ್ರದಲ್ಲಿ ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ **ಸ್ಥಿರಗಳು** ಮತ್ತು **ಚರಗಳು** ಎಂಬ ಎರಡು ಪರಿಮಾಣಗಳಿವೆ. ಉದಾಹರಣೆಗೆ, ಒಂದು ತ್ರಿಕೋನದ ಮೂರು ಕೋನಗಳ ಮೊತ್ತ ಎರಡು ಲಂಬಕೋನಗಳು. ಇದು ಸ್ಥಿರ ಸಂಖ್ಯೆ. ಒಂದು ನಿಯತ ಬೆಲೆಗಳ ಗಣದ ಯಾವುದೇ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಪಡೆಯಬಹುದಾದ ಪರಿಮಾಣವನ್ನು ಚರವೆಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ. ಈ ಬೆಲೆಗಳು ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾದರೆ ಅದನ್ನು **ವಾಸ್ತವ ಚರ** ಸಂಖ್ಯೆ ಅಥವಾ ವಾಸ್ತವ ಚರವೆಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ.

ಉತ್ಪನ್ನ : ನಮಗೆ ಈ ಕೆಳಗಿನ ಸೂತ್ರಗಳು ತಿಳಿದಿವೆ

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3$$

$s = \frac{1}{2} gt^2$

ಒಂದು ಗೋಳದ ಗಾತ್ರವು (V) ತ್ರಿಜ್ಯದ (r) ಮೇಲೆ ಅವಲಂಬಿಸಿದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ V ಯು r ನ ಉತ್ಪನ್ನವೆಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ. ಹಾಗೆಯೇ s ಎಂಬುದು t ಯ ಉತ್ಪನ್ನ.

x ಮತ್ತು y ಎಂಬುವು ಎರಡು ವಾಸ್ತವ ಚರಗಳಾಗಿರಲಿ. ಇವುಗಳನ್ನು ಸಂಬಂಧಿಸುವ ನಿಯಮವಿದೆ ಎಂದು ತಿಳಿಯೋಣ. ಈ ನಿಯಮದ ಪ್ರಕಾರ x ತನ್ನ ಅವಕಾಶದ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಬೆಲೆಯನ್ನು ಪಡೆದಾಗ y ಯು ಒಂದೇ ಒಂದು ಸಹಗಾಮಿ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಪಡೆದರೆ ಆಗ y ಯು x ನ ಉತ್ಪನ್ನವಾಗಿದೆ ಎಂದು ಹೇಳುತ್ತೇವೆ. ಇಲ್ಲಿ x ಅನ್ನು **ಸ್ವತಂತ್ರ ಚರವೆಂದೂ**, y ಯನ್ನು **ಅಧೀನ ಚರವೆಂದು** ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ. ಮೇಲಿನ ಉದಾಹರಣೆಯಲ್ಲಿ r ಸ್ವತಂತ್ರ ಚರ ಮತ್ತು V ಯು ಅಧೀನ ಚರ.

1. **ಉದಾಹರಣೆಗಳು**

$$f(x) = y = \sqrt{x^3+5}$$

ಮತ್ತು $f(x) = y = \sin x + \cos x$ ಉತ್ಪನ್ನಗಳು.

2. $f(x) = x^2 - 4x + 3$ ಆದರೆ, $x = 1, -2, 3$ ಆದಾಗ ಇದರ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

$x = 1$ ಆದಾಗ $f(x)$ನ ಬೆಲೆಯನ್ನು $f(1)$ ಎಂದು ಸೂಚಿಸುತ್ತೇವೆ.

$\therefore f(1) = 1^2 - 4 + 3 = 0$

ಹಾಗೆಯೇ, $f(-2) = 4 + 8 + 3 = 15$ ಮತ್ತು $f(3) = 9 - 12 + 3 = 0$

3. $g(x) = \sin^2 x - \cos 2x$ ಆದರೆ $g(\pi)$, $g\left(\frac{\pi}{6}\right)$ಗಳ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

$$g(\pi) = \sin^2\pi - \cos 2\pi = 0 - 1 = -1$$

$$g\left(\frac{\pi}{6}\right) = \sin^2\frac{\pi}{6} - \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} = \frac{-1}{4}.$$

10.1.2 ವಿವಿಧ ರೀತಿಯ ಉತ್ಪನ್ನಗಳು

(i) **ಸ್ಥಿರ ಉತ್ಪನ್ನ** : ಸ್ವತಂತ್ರ ಚರ x ಯಾವುದೇ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಹೊಂದಿದಾಗಲೂ ಅಧೀನ ಚರ y ಯು ಒಂದೇ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಪಡೆದರೆ ಅದನ್ನು ಸ್ಥಿರ ಉತ್ಪನ್ನ ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ.

(ii) ಸಮ ಉತ್ಪನ್ನ : ಒಂದು ಉತ್ಪನ್ನ $f(x)$ನ ಗುಣವು

$$f(-x) = f(x)$$

ಆದರೆ ಆಗ $f(x)$ನ್ನು ಸಮ ಉತ್ಪನ್ನ ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ.

ಉದಾ : (1) $f(x) = x^4 + 2x^2 + 4$ ಆಗಿರಲಿ.

ಆಗ, $f(-x) = (-x)^4 + 2(-x)^2 + 4$

$$= x^4 + 2x^2 + 4$$

ಅಂದರೆ, $f(-x) = f(x)$

ಆದ್ದರಿಂದ, $f(x)$ ಸಮ ಉತ್ಪನ್ನ.

(2) $f(x) = \cos 3x + x^2 - 4$ ಆಗಿರಲಿ.

$f(-x) = \cos 3(-x) + (-x)^2 - 4$

$$= \cos 3x + x^2 - 4$$

ಅಂದರೆ, $f(-x) = f(x)$. ಆದ್ದರಿಂದ, $f(x)$ ಸಮ ಉತ್ಪನ್ನ.

ಬೆಸ ಉತ್ಪನ್ನ : ಒಂದು ಉತ್ಪನ್ನ $f(x)$ನ ಗುಣವು

$$f(-x) = -f(x)$$

ಆದರೆ, ಆಗ $f(x)$ನ್ನು ಬೆಸ ಉತ್ಪನ್ನವೆನ್ನುತ್ತೇವೆ.

ಉದಾ : (1) $f(x) = x^3 + x$ ಆಗಿರಲಿ.

ಆಗ, $f(-x) = (-x)^3 + (-x)$

$$= -x^3 - x = -(x^3 + x)$$

ಅಂದರೆ, $f(-x) = -f(x)$.

ಆದ್ದರಿಂದ, $f(x)$ ಬೆಸ ಉತ್ಪನ್ನ.

(2) $f(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ ಆಗಿರಲಿ.

ಆಗ, $f(-x) = \dfrac{e^{-x} - e^x}{e^{-x} + e^x}$

$$= -\frac{(e^x - e^{-x})}{e^x + e^{-x}}$$

ಅಂದರೆ, $f(-x) = -f(x)$

ಆದ್ದರಿಂದ, $f(x)$ ಬೆಸ ಉತ್ಪನ್ನ.

(3) $f(\sqrt{x}) = x^2 + 2x - 3$ ಆಗಿದ್ದರೆ $f(x)$ನ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಈಗ, $f(\sqrt{x}) = (\sqrt{x})^4 + 2(\sqrt{x})^2 - 3$ ಎಂಬ ವ್ಯಾಖ್ಯೆಯಲ್ಲಿ $\sqrt{x}$ ಬದಲಿಗೆ xನ್ನು ಆದೇಶಿಸಿದಾಗ

$f(x) = x^4 + 2x^2 - 3$ ಎಂದಾಗುವುದು.

(iv) ಅವಧಿಯುತ ಉತ್ಪನ್ನ

n ಯಾವುದೇ ಧನಾತ್ಮಕ ಪೂರ್ಣಾಂಕ ಆದಾಗ

$f(x) = f(x + T) = f(x + 2T) = f(x + nT)$

ಆಗಿದ್ದರೆ, $f(x)$ನ್ನು ಅವಧಿಯುತ ಉತ್ಪನ್ನ ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ ಮತ್ತು ಅದರ ಅವಧಿ T.

ಉದಾ : (1) $f(x) = \sin x$ ಆಗಿರಲಿ.

ಆಗ, $f(x + 2\pi) = \sin(x + 2\pi)$

$= \sin x = f(x)$

ಆದ್ದರಿಂದ, $\sin x$ ಒಂದು ಅವಧಿಯುತ ಉತ್ಪನ್ನ. ಇದರ ಅವಧಿ 2π.

(2) $f(x) = \cos 4x$ ಆಗಿರಲಿ.

ಆಗ, $f\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos 4\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$

$= \cos(4x + 2\pi)$

$= \cos 4x$

ಅಂದರೆ, $f\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = f(x)$.

ಆದ್ದರಿಂದ, $\cos 4x$ ಒಂದು ಅವಧಿಯುತ ಉತ್ಪನ್ನ. ಇದರ ಅವಧಿ $\frac{\pi}{2}$.

10.2 ಉತ್ಪನ್ನದ ಮಿತಿ

$y = f(x)$ ಉತ್ಪನ್ನದ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು x ಬೆಲೆಯನ್ನು $f(x)$ನಲ್ಲಿ ಆದೇಶಿಸಬೇಕು. ಆದರೆ ಕೆಲವು ಸಲ xಗೆ ಒಂದು ವಿಶಿಷ್ಟ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಆದೇಶಿಸಿದಾಗ $f(x)$ಗೆ ಅಥವಾ yಗೆ ಯಾವ ನಿರ್ದಿಷ್ಟ (ವ್ಯಾಖ್ಯಾತ) ಬೆಲೆಯೂ ಸಿಗದಿರಬಹುದು.

ಉದಾ : $y = \frac{x^2-4}{x-2}$ ನಲ್ಲಿ $x = 2$ ನ್ನು ಆದೇಶಿಸಿದಾಗ

$y = \frac{0}{0}$ ಎಂದಾಗುವುದು. ಆದರೆ $\frac{0}{0}$ ಎಂಬುದಕ್ಕೆ **ಅರ್ಥವಿಲ್ಲ**, ಆದ್ದರಿಂದ x ನ ಬೆಲೆಯು 2 ಕ್ಕೆ ಸಮೀಪಿಸಿದಂತೆಲ್ಲ y ಯ ಬೆಲೆಯು ಹೇಗೆ ಬದಲಾಗುತ್ತದೆ ಎಂದು ತಿಳಿಯೋಣ.

x	1.9	1.99	1.999	2.001	2.01	2.1	
y	3.9	3.99	3.999	4.001	4.01	4.1	

ಮೇಲಿನ ಕೋಷ್ಟಕದಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿದಂತೆ x ನ ಬೆಲೆಯು 2ನ್ನು ಸಮೀಪಿಸಿದಂತೆಲ್ಲಾ y ಯು 4ನ್ನು ಸಮೀಪಸುವುದು ಎಂದು ತಿಳಿಯುತ್ತದೆ. ಇದನ್ನು **ಉತ್ಪನ್ನದ ಮಿತಿ** ಎಂದು ಹೇಳುತ್ತೇವೆ ಮತ್ತು ಈ ರೀತಿ ಬರೆಯುತ್ತೇವೆ :

$$\underset{x \to 2}{Lt} \frac{x^2-4}{x-2} = 4$$

ವ್ಯಾಖ್ಯೆ : $|x-a|$ ವ್ಯತ್ಯಾಸವು ಸಾಕಷ್ಟು ಅಲ್ಪವಾಗುವಂತೆ x ನ್ನು ಆರಿಸುವುದರಿಂದ $y=f(x)$ ಉತ್ಪನ್ನದಲ್ಲಿ $|y-l|$ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಎಷ್ಟು ಅಲ್ಪವನ್ನಾಗಿ ಬೇಕಾದರೂ ಮಾಡುವುದು ಸಾಧ್ಯವಾದರೆ x ಚರವು a ಯನ್ನು ಸಮೀಪಿಸಿದಂತೆ $y=f(x)$ ಬೆಲೆಯು l ನ್ನು ಸಮೀಪಿಸಿದೆ ಅಥವಾ l ಎಂಬುದು $f(x)$ನ ಮಿತಿ ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ.

ಇದನ್ನು $\underset{x \to a}{Lt} f(x) = l$

ಎಂದು ಬರೆಯುತ್ತೇವೆ.

ಸೂಚನೆ : ಇದನ್ನು ಓದುವ ಕ್ರಮ - "a ಗೆ x ಸಮೀಪಿಸಿದಾಗ, $f(x)$ ಬೆಲೆಯು l ನ್ನು ಸಮೀಪಿಸುತ್ತದೆ."

ಉದಾಹರಣೆಗಳು

ಈ ಕೆಳಗಿನ ಮಿತಿಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

1. $\underset{x \to 1}{Lt} \frac{x^3+7x^2+x+2}{2x^2+3x-4}$

ದತ್ತ ಉತ್ಪನ್ನದ ಉಕ್ತಿಯಲ್ಲಿ $x = 1$ ಆದೇಶಿಸಿದಾಗ ಇದರ ಬೆಲೆಯು.

$\frac{1+7+1+2}{2+3-4} = 11.$ ಇದೇ ಇದರ ಮಿತಿ.

2. $\underset{x \to 2}{Lt} \dfrac{x^2+x-6}{x^2-x-2}$

$x=2$ ಎಂಬ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಅಂಶ ಮತ್ತು ಛೇದಗಳಲ್ಲಿ ಆದೇಶಿಸಿದಾಗ ನಮಗೆ 0/0 ಎಂಬ ಅನಿರ್ದಿಷ್ಟ ರೂಪ ಸಿಗುತ್ತದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ $(x-2)$ ಅಂಶ ಮತ್ತು ಛೇದದ ಅಪವರ್ತನವಾಗಿದೆ.

$$\therefore \underset{x \to 2}{Lt} \frac{x^2+x-6}{x^2-x-2} = \underset{x \to 2}{Lt} \frac{(x+3)\ (x-2)}{(x+1)\ (x-2)}$$

$$= \underset{x \to 2}{Lt} \frac{x+3}{x+1} = \frac{5}{3} \quad (x \neq 2).$$

3. $\underset{x \to 1}{Lt} \dfrac{x^3-1}{x-1}$

$$= \underset{x \to 1}{Lt} \frac{(x-1)(x^2+x+1)}{x-1}$$

$$= \underset{x \to 1}{Lt} (x^2+x+1) = 3 \quad (x \neq 1).$$

4. $\underset{x \to \infty}{Lt} \dfrac{2x+3}{x+1}$

$x \to \infty$ ಎಂದು ಆದೇಶಿಸಿದಾಗ ನಮಗೆ $\frac{\infty}{\infty}$ ಎಂಬ **ಅನಿರ್ದಿಷ್ಟ ರೂಪ** ಸಿಗುತ್ತದೆ.

ಆದರೆ, $\underset{x \to \infty}{Lt} \dfrac{2x+3}{x+1} = \underset{x \to \infty}{Lt} \dfrac{x\left(2+\frac{3}{x}\right)}{x\left(1+\frac{1}{x}\right)} = \underset{x \to \infty}{Lt} \dfrac{2+\frac{3}{x}}{1+\frac{1}{x}}, \quad (x \neq 0)$

ಎಂದು ಬರೆಯಬಹುದು.

ಈಗ $x \to \infty$ ಅಂದರೆ, x ಬೆಲೆಯು ಅಪರಿಮಿತವಾಗಿ ಏರುತ್ತಾ ಹೋದಾಗ ಉತ್ಪನ್ನದ ಬೆಲೆಯು 2 ನ್ನು ಸಮೀಪಿಸುತ್ತದೆ.

ಆದ್ದರಿಂದ, $\underset{x \to \infty}{Lt} \dfrac{2x+3}{x+1} = 2.$

5. $\underset{x \to \infty}{Lt} \dfrac{x^2 - 3x + 1}{2x^3 - 4x + 5}$

$$= \underset{x \to \infty}{Lt} \frac{x^2\left(1 - \frac{3}{x} + \frac{1}{x^2}\right)}{x^3\left(2 - \frac{4}{x^2} + \frac{5}{x^3}\right)}$$

$$= \underset{x \to \infty}{Lt} \frac{\left(1 - \frac{3}{x} + \frac{1}{x^2}\right)}{x\left(2 - \frac{4}{x^2} + \frac{5}{x^3}\right)} = \frac{1}{\infty} = 0$$

(ಕಾರಣ, ಛೇದದಲ್ಲಿ x ನ ಪೂರ್ಣಧನಾಂಕ ಘಾತಗಳಿದ್ದ ಪರಿಮಾಣಗಳ ಮಿತಿ 0.
ಸೂಚನೆ : ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ $1/\infty$, $2/\infty$ ಮುಂತಾದ ಪರಿಮಾಣಗಳನ್ನು ಬಳಸುವ ವಾಡಿಕೆಯಿಲ್ಲವಾದರೂ, ಇಲ್ಲಿ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಅನುಕೂಲಕ್ಕಾಗಿ ಬಳಸಲಾಗಿದೆ.)

6. $\underset{x \to +1}{Lt} \left[\dfrac{x^2 - 1}{\sqrt{3+x} - \sqrt{5-x}}\right]$

$x = +1$ ಎಂದು ಆದೇಶಿಸಿದಾಗ $\dfrac{0}{0}$ ಎಂದು ಅನಿರ್ದಿಷ್ಟ ರೂಪವನ್ನು ಹೊಂದುತ್ತವೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ನಾವು ಈ ರೀತಿ ಮುಂದುವರಿಸುತ್ತೇವೆ : ಅಂಶವನ್ನು ಮತ್ತು ಛೇದವನ್ನು $(\sqrt{3+x} + \sqrt{5-x})$ ನಿಂದ ಗುಣಿಸಿ. ಆಗ, ಮಿತಿಯು

$$\underset{x \to +1}{Lt} \left[\frac{x^2 - 1}{\sqrt{3+x} - \sqrt{5-x}} \times \frac{\sqrt{3+x} + \sqrt{5-x}}{\sqrt{3+x} + \sqrt{5-x}}\right]$$

$$= \underset{x \to +1}{Lt} \left[\frac{(x^2-1)(\sqrt{3+x}+\sqrt{5-x})}{(3+x)-(5-x)} \right]$$

$$= \underset{x \to +1}{Lt} \frac{(x^2-1)\ (\sqrt{3+x}\,) + (\sqrt{5-x}\,)}{2x-2}$$

$$= \underset{x \to +1}{Lt} \frac{(x+1)\,(x-1)\,(\sqrt{3+x}+\sqrt{5-x})}{2(x-1)}$$

$$= \underset{x \to +1}{Lt} \frac{(x+1)\ (\sqrt{3+x}+\sqrt{5-x})}{2}$$

$$= \frac{2(\sqrt{3+1}+\sqrt{5-1})}{2} = 4.$$

7. $$\underset{x \to -1}{Lt} \frac{\sqrt{3-x}-\sqrt{5+x}}{x^3+1}$$

$$\underset{x \to -1}{Lt} \frac{(\sqrt{3-x}-\sqrt{5+x}\,) \times (\sqrt{3-x}+\sqrt{5+x}\,)}{(x^3+1)\ (\sqrt{3-x}+\sqrt{5+x}\,)}$$

$$= \underset{x \to -1}{Lt} \frac{(3-x)-(5+x)}{(x^3+1)\ (\sqrt{3-x}+\sqrt{5+x}\,)}$$

$$= \underset{x \to -1}{Lt} \frac{-2(x+1)}{(x+1)\,(x^2-x+1)\,(\sqrt{3-x}+\sqrt{5+x})}$$

$$= \underset{x \to -1}{Lt} \frac{-2}{(x^2-x+1)\ (\sqrt{3-x}+\sqrt{5+x}\,)}$$

$$= \frac{-2}{3(\sqrt{4}+\sqrt{4}\,)} = \frac{-1}{6}.$$

8. $$\underset{x\to 1}{Lt}\left[\frac{1}{1-x} - \frac{3}{1-x^3}\right]$$

$$= \underset{x\to 1}{Lt}\left[\frac{1}{1-x} - \frac{3}{(1-x)(1+x+x^2)}\right]$$

$$= \underset{x\to 1}{Lt}\left[\frac{1+x+x^2-3}{(1-x)(1+x+x^2)}\right]$$

$$= \underset{x\to 1}{Lt}\left[\frac{x^2+x-2}{(1-x)(1+x+x^2)}\right]$$

$$= \underset{x\to 1}{Lt}\frac{(x+2)(x-1)}{(1-x)(1+x+x^2)}$$

$$= \underset{x\to 1}{Lt}\frac{-(x+2)}{1+x+x^2} = \frac{-3}{3} = -1.$$

9. $$\underset{n\to\infty}{Lt}\left[\frac{1^3+2^3+\ldots+n^3}{(n+2)^4}\right]$$

$$= \underset{n\to\infty}{Lt}\frac{n^2(n+1)^2}{4(n+2)^4} \qquad \left[\because 1^3+2^3+\ldots+n^3 = n^2\frac{(n+1)^2}{4}\right]$$

$$= \underset{n\to\infty}{Lt}\frac{n^2 n^2\left(1+\frac{1}{n}\right)}{4n^4\left(1+\frac{2}{n}\right)^4}$$

$$= \underset{n\to\infty}{Lt}\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)}{4\left(1+\frac{2}{n}\right)^4} = \frac{1}{4}.$$

10. $\underset{n\to\infty}{Lt}\ (\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$

$$= \underset{n\to\infty}{Lt}\ (\sqrt{n+1}-\sqrt{n}) \times \frac{(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$$

$$= \underset{n\to\infty}{Lt}\ \frac{(n+1)-n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$$

$$= \underset{n\to\infty}{Lt}\ \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \frac{1}{\infty} = 0.$$

11. $\underset{n\to\infty}{Lt}\left[1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ \ldots\ldots n \text{ ಪದಗಳ ತನಕ}\right]$

$$= \underset{n\to\infty}{Lt}\left[\frac{1\left(1-\frac{1}{2^n}\right)}{1-\frac{1}{2}}\right] \quad \left[\because \text{ಈ ಶ್ರೇಣಿಯ ಮೊತ್ತ } S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r}\right]$$

$$= \frac{1-0}{\frac{1}{2}} = 2.$$

10.3 ಕೆಲವು ಮುಖ್ಯವಾದ ಮಿತಿಗಳು

I. n ಯಾವುದೇ ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಯಾದಲ್ಲಿ,

$$\underset{x\to a}{Lt}\left(\frac{x^n-a^n}{x-a}\right) = na^{n-1}$$

(i) n ಧನಾತ್ಮಕ ಪೂರ್ಣಾಂಕವಾಗಿರಲಿ.

ನಮಗೆ ಈಗಾಗಲೇ ತಿಳಿದಿರುವಂತೆ

$$x^n - a^n = (x-a)\ (x^{n-1} + ax^{n-2} + a^2x^{n-3} + \ \ldots . + a^{n-1})$$

$$\therefore \underset{x\to a}{Lt}\left(\frac{x^n-a^n}{x-a}\right)=\underset{x\to a}{Lt}\left[\frac{(x-a)\ (x^{n-1}+ax^{n-2}+a^2x^{n-3}+\ldots+a^{n-1})}{x-a}\right]$$

$$=\underset{x\to a}{Lt}\left[x^{n-1}+ax^{n-2}+a^2x^{n-3}+\ldots.+a^{n-1}\right]$$

$$=a^{n-1}+a\,a^{n-2}+a^2x^{n-3}+\ldots.+a^{n-1}$$

$$=a^{n-1}+a^{n-1}+a^{n-1}+\ldots.+a^{n-1}$$

$=na^{n-1}$ [$\because$ n ಪದಗಳಿವೆ]

$$\therefore \underset{x\to a}{Lt}\left(\frac{x^n-a^n}{x-a}\right)=na^{n-1}$$

(n ಧನಾತ್ಮಕ ಪೂರ್ಣಾಂಕವಾಗಿದ್ದಾಗ).

(ii) n ಋಣಾತ್ಮಕ ಪೂರ್ಣಾಂಕವಾಗಿರಲಿ.

$n=-m$ ಆಗಿರಲಿ. ಇಲ್ಲಿ, m ಧನಾತ್ಮಕ ಪೂರ್ಣಾಂಕವಾಗಿದೆ.

$$\therefore \quad \underset{x\to a}{Lt}\frac{x^n-a^n}{x-a}=\underset{x\to a}{Lt}\frac{x^{-m}-a^{-m}}{x-a}$$

$$=\underset{x\to a}{Lt}\frac{\frac{1}{x^m}-\frac{1}{a^m}}{x-a}$$

$$=\underset{x\to a}{Lt}\frac{\left(\frac{a^m-x^m}{x^ma^m}\right)}{x-a}$$

$$= \underset{x \to a}{Lt}\left[-\left(\frac{x^m - a^m}{x - a}\right)\frac{1}{x^m a^m}\right]$$

$$= -ma^{m-1} \cdot \frac{1}{a^m . a^m} \quad [\text{ (i) ರಿಂದ }]$$

$$= -ma^{-m-1}$$

$$= na^{n-1}.$$

$$\therefore \underset{x \to a}{Lt} \frac{x^n - a^n}{x - a} = na^{n-1}$$

(n ಋಣಾತ್ಮಕ ಪೂರ್ಣಾಂಕವಾಗಿದ್ದಾಗ).

(iii) n ಭಿನ್ನರಾಶಿಯಾಗಿದ್ದಾಗ (ಧನಾತ್ಮಕ ಅಥವಾ ಋಣಾತ್ಮಕ)
ಈಗ, $n = \frac{p}{q}$ ಆಗಿರಲಿ; p. ಮತ್ತು q ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳಾಗಿವೆ, $q \neq 0$.

$$\therefore \underset{x \to a}{Lt} \frac{x^n - a^n}{x - a} = \underset{x \to a}{Lt} \frac{x^{p/q} - a^{p/q}}{x - a}$$

ಈಗ, $x^{p/q} = \left(x^{1/q}\right)^p = X^p$ [$x^{1/q} = X$ AÅpãÑ]

ಮತ್ತು $a^{p/q} = \left(a^{1/q}\right)^p = A^p$ [$a^{1/q} = A$ AÅpãÑ]

ಆದ್ದರಿಂದ, $x^{1/q} = X$ ಆದರೆ $x = X^q$

ಮತ್ತು $a^{1/q} = A$ ಆದರೆ $a = A^q$.

ಅಲ್ಲದೆ, $x \to a$ ಆದಾಗ $X \to A$

$$\therefore \underset{x \to a}{Lt} \frac{x^{p/q} - a^{p/q}}{x - a} = \underset{X \to A}{Lt} \frac{X^p - A^p}{X^q - A^q}$$

ಅಂಶವನ್ನು ಮತ್ತು ಛೇದವನ್ನು $X - A$ ಇಂದ ಭಾಗಿಸಿ.

(i) ಅಥವಾ (ii) ಸಂದರ್ಭಗಳಿಂದಾಗಿ

$$\underset{X \to A}{Lt} \frac{\left(\frac{X^p - A^p}{X - A}\right)}{\left(\frac{X^q - A^q}{X - A}\right)} = \frac{p\, A^{p-1}}{q\, A^{q-1}}$$

$$= \left(\frac{p}{q}\right) A^{p-q}$$

$$= \left(\frac{p}{q}\right) \left(a^{1/q}\right)^{p-q} \qquad \left[\because A = a^{1/q}\right]$$

$$= \frac{p}{q}\, a^{(p/q)-1}$$

$$= na^{n-1}$$

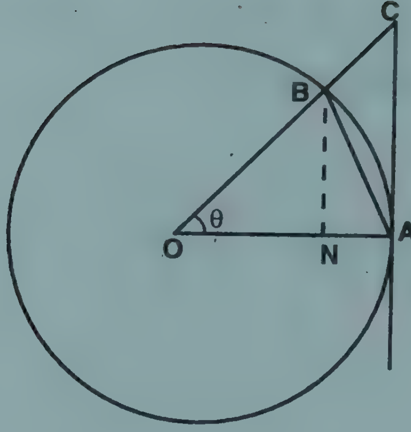
$$\therefore \underset{x \to a}{Lt} \left(\frac{x^n - a^n}{x - a}\right) = na^{n-1}$$

(n ಭಿನ್ನರಾಶಿಯಾಗಿದ್ದಾಗ)

ಆದ್ದರಿಂದ, ಎಲ್ಲಾ ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆ n ಗೆ

$$\underset{x \to a}{Lt} \frac{x^n - a^n}{x - a} = na^{n-1}$$

2. $\underset{\theta \to 0}{Lt} \left(\frac{\sin \theta}{\theta}\right) = 1$ (θ ಕೋನವು ರೇಡಿಯನ್ ಅಳತೆಯಲ್ಲಿದ್ದಾಗ)



ಚಿತ್ರ *10.1*

ವೃತ್ತದ ಕೇಂದ್ರ ಬಿಂದು O ಆಗಿರಲಿ ಮತ್ತು ತ್ರಿಜ್ಯ r ಆಗಿರಲಿ. B ಯು ವೃತ್ತದ ಮೇಲಿರುವ ಒಂದು ಬಿಂದು. $\angle AOB = \theta^c$ ಮತ್ತು AC ಯು ವೃತ್ತಕ್ಕೆ A ಯಲ್ಲಿ ಸ್ಪರ್ಶಕವಾಗಿರಲಿ. ಅದು ವರ್ಧಿಸಿದ OB ಯನ್ನು C ಯಲ್ಲಿ ಸೇರಲಿ. ಚಿತ್ರ 10.1ರಿಂದ,

$\Delta^{le} OAB$ಯ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ < ವೃತ್ತಖಂಡ OAB ಯ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ < $\Delta^{le} OAC$ ಯ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ ... (1)

ಈಗ, $\Delta^{le} OAB$ಯ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ $= \frac{1}{2} \times OA \times BN$

$= \frac{1}{2} \times r \times r \sin\theta$ [$\therefore \Delta^{le} OBN$ನಲ್ಲಿ $\sin\theta = \frac{BN}{OB}$]

$= \frac{1}{2} r^2 \sin\theta$ .... (2)

ವೃತ್ತಖಂಡ OAB ಯ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ $= \frac{1}{2} r^2 \theta$ ... (3)

$\Delta^{le} OAC$ಯ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ $= \frac{1}{2} \times OA \times AC$

$= \frac{1}{2} \times r \times r \tan\theta$ [$\because \Delta^{le} OAC$ಯಲ್ಲಿ $\tan\theta = \frac{AC}{OA}$]

$= \frac{1}{2} r^2 \tan\theta$ ... (4)

ಫಲಿತಾಂಶ (2) (3) ಮತ್ತು (4)ಗಳನ್ನು (1)ರಲ್ಲಿ ಆದೇಶಿಸಿದಾಗ

$$\frac{1}{2} r^2 \sin \theta < \frac{1}{2} r^2\theta < \frac{1}{2} r^2 \tan \theta$$

ಅಥವಾ, $\frac{1}{2}r^2$ ನಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದಾಗ

$$\sin \theta < \theta < \tan \theta \qquad \text{... (5)}$$

ಎಂದಾಗುತ್ತದೆ. ಮತ್ತು $\sin\theta(>0)$ ದಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದಾಗ

$$1 < \frac{\theta}{\sin \theta} < \frac{\tan \theta}{\sin \theta}$$

ಅಥವಾ $$1 < \frac{\theta}{\sin \theta} < \frac{1}{\cos \theta}$$

ಎಂದಾಗುತ್ತದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ, ವಿಲೋಮಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡಾಗ

$$1 > \frac{\sin \theta}{\theta} > \cos \theta \quad \left[\because x < y \Rightarrow \frac{1}{x} > \frac{1}{y}\right]$$

ಈಗ, ಮಿತಿಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡಾಗ $\theta \to 0$ ಆದಾಗ, $\cos \theta \to 1$ ಆಗುತ್ತದೆ.

ಆದ್ದರಿಂದ, $1 \geq \underset{\theta\to 0}{Lt} \frac{\sin \theta}{\theta} \geq 1$

$$\therefore \underset{\theta\to 0}{Lt} \frac{\sin \theta}{\theta} = 1$$ (θ ರೇಡಿಯನ್ ಮಾನದಲ್ಲಿದ್ದಾಗ).

ಗಮನಿಸಿ : $0 < \theta < \pi/2$ ಆದಾಗ (5)ರಿಂದ, $\sin\theta < \theta < \tan\theta$.

3. $\underset{\theta\to 0}{Lt} \frac{\tan\theta}{\theta} = \underset{\theta\to 0}{Lt} \frac{\sin\theta}{\theta} \frac{1}{\cos\theta} = (1)\ (1) = 1$ (θ ರೇಡಿಯನ್ನಲ್ಲಿದ್ದಾಗ)

ಅಂದರೆ, $\underset{\theta \to 0}{Lt} \frac{\tan\theta}{\theta} = 1$

4. (i) $\underset{n\to\infty}{Lt}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$

ಇದನ್ನು ನೇಪಿಯರ್‌ನ ಸ್ಥಿರ ಸಂಖ್ಯೆ ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತಾರೆ.

(ii) $\underset{x\to 0}{Lt}\ (1+x)^{1/x} = e$

ಈಗ, $\frac{1}{x} = n$ ಎಂದು ಆದೇಶಿಸಿದಾಗ

$x = \frac{1}{n}$ ಆಗುತ್ತದೆ.

$x \to 0$ ಆದಾಗ $n \to \infty$

$\therefore \underset{x\to 0}{Lt}\ (1+x)^{1/x} = \underset{n\to\infty}{Lt}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e.$

ಫಲಿತಾಂಶ 4(i) ರಿಂದ.

(iii) $\underset{x\to 0}{Lt}\ \frac{\log_e(1+x)}{x} = 1$

ತೋರಿಸಬೇಕಾಗಿರುವ ಫಲಿತಾಂಶದ ಎಡಭಾಗ

$$\underset{x\to 0}{Lt}\ \frac{1}{x}\log_e(1+x)$$

$$= \underset{x\to 0}{Lt}\ \log_e(1+x)^{1/x}$$

$$= \log_e e \quad \text{[(ii) ರಿಂದ]}$$

$$= 1.$$

(iv) $\underset{x\to 0}{Lt} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1$

ಈಗ, $e^x - 1 = y$ ಎಂದು ಬರೆದಾಗ

$e^x = 1 + y$ ಮತ್ತು $x \to 0$ ಆದಾಗ $y \to 0$

ಆಗುತ್ತದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ

$$x = \log_e (1 + y)$$

$$\therefore \underset{x\to 0}{Lt} \frac{e^x - 1}{x} = \underset{y\to 0}{Lt} \frac{y}{\log_e (1 + y)}$$

$$= \underset{y\to 0}{Lt} \frac{1}{\frac{1}{y} \log_e (1 + y)}$$

$$= \underset{y\to 0}{Lt} \frac{1}{\log_e (1 + y)^{1/y}} = \frac{1}{\log_e e} = 1.$$

(v) $\underset{x\to 0}{Lt} \dfrac{a^x - 1}{x} = \log_e a$

$a^x - 1 = y$ ಎಂದು ಬರೆದಾಗ

$a^x = 1 + y$ ಮತ್ತು $x \to 0$ ಆದಾಗ $y \to 0$

ಆಗುತ್ತದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ

$x = \log_a (1 + y)$

$\therefore \underset{x\to 0}{Lt} \dfrac{a^x - 1}{x}$

$$= \underset{y\to 0}{Lt} \frac{y}{\log_a (1+y)} = \underset{y\to 0}{Lt} \frac{1}{\frac{1}{y} \log_a (1+y)}$$

$$= \underset{y\to 0}{Lt} \frac{1}{\frac{1}{y} \frac{\log_e (1+y)}{\log_e a}}$$

$$= \underset{y\to 0}{Lt} \frac{\log_e a}{\frac{1}{y} \log_e (1+y)} = \frac{\log_e a}{\log_e e}$$

$$= \log_e a \; (\because \log_e e = 1)$$

ಉದಾಹರಣೆಗಳು

1. $\underset{x\to 5}{Lt} \frac{x^4 - 625}{x-5}$

$$= \underset{x\to 5}{Lt} \frac{x^4 - 5^4}{x-5} = 4(5)^{4-1} = 4(5)^3 = 500.$$

2. $\underset{x\to 2/3}{Lt} \frac{9x^2 - 4}{243x^5 - 32}$

$$= \underset{x\to 2/3}{Lt} \frac{9\left(x^2 - \frac{4}{9}\right)}{243\left(x^5 - \frac{32}{243}\right)} = \underset{x\to 2/3}{Lt} \frac{1}{27} \left[\frac{x^2 - \left(\frac{2}{3}\right)^2}{x^5 - \left(\frac{2}{3}\right)^5}\right]$$

$$= \frac{1}{27} \underset{x\to 2/3}{Lt} \left[\frac{\left(\frac{x^2 - \left(\frac{2}{3}\right)^2}{x - \frac{2}{3}}\right)}{\left(\frac{x^5 - \left(\frac{2}{3}\right)^5}{x - \frac{2}{3}}\right)}\right] = \frac{1}{27} \frac{2\left(\frac{2}{3}\right)^{2-1}}{5\left(\frac{2}{3}\right)^{5-1}}$$

$$= \frac{1}{27} \times \frac{2}{5} \times \frac{\frac{2}{3}}{\left(\frac{2}{3}\right)^4}$$

$$= \frac{1}{27} \times \frac{2}{5} \times \frac{3^3}{2^3} = \frac{1}{20}.$$

3. $\underset{x \to -2}{Lt} \frac{x^5 + 32}{x + 2}$

$$\underset{x \to -2}{Lt} \frac{x^5 - (-32)}{x - (-2)}$$

$$\underset{x \to -2}{Lt} \frac{x^5 - (-2)^5}{x - (-2)}$$

$$= 5\,(-2)^{5-1}$$

$$= 5 \times (-2)^4 = 5 \times 16 = 80.$$

4. $\underset{x \to 0}{Lt} \frac{\sin 7x}{\sin 2x}$

$$= \underset{x \to 0}{Lt} \frac{\frac{\sin 7x}{7x} \times 7x}{\frac{\sin 2x}{2x} \times 2x}$$

$$= \underset{x \to 0}{Lt} \frac{\left(\frac{\sin 7x}{7x}\right)}{\left(\frac{\sin 2x}{2x}\right)} \times \frac{7}{2} = \frac{1}{1} \times \frac{7}{2} = \frac{7}{2}.$$

5. $\underset{x \to 0}{Lt} \dfrac{\tan x - \sin x}{x^3}$

$$= \underset{x \to 0}{Lt} \frac{\dfrac{\sin x}{\cos x} - \sin x}{x^3} = \underset{x \to 0}{Lt} \frac{\sin x(1 - \cos x)}{(\cos x)\ x^3}$$

$$= \underset{x \to 0}{Lt} \frac{\sin x \ .\ 2 \sin^2\left(\dfrac{x}{2}\right)}{\cos x \ .\ x^3} = \underset{x \to 0}{Lt} \frac{\left(\dfrac{\sin x}{x}\right) 2\left(\dfrac{\sin \dfrac{x}{2}}{\dfrac{x}{2}}\right)^2 \times \dfrac{1}{4}}{\cos x}$$

$$= \frac{1}{2}.$$

6. $\underset{\theta \to 0}{Lt} \dfrac{\sin 2\theta \ \sin 3\theta}{3\ \theta \tan 4\ \theta}$

$$= \underset{\theta \to 0}{Lt} \left[\frac{\sin 2\theta}{2\theta} \times 2\ \theta \times \frac{\sin 3\theta}{3\theta} \ \frac{1}{\dfrac{\tan 4\theta}{4\theta} \times 4\theta}\right]$$

$$= 1 \times 2 \times 1 \ .\ \frac{1}{1 \times 4} = \frac{1}{2}\ .$$

7. $\underset{x \to \pi}{Lt} \dfrac{\sqrt{2 + \cos x} - 1}{(\pi - x)^2}$

ಈಗ, $x = \pi - \theta$ ಎಂದು ಸೂಚಿಸೋಣ: ಆಗ

$x \to \pi$ ಆದಾಗ $\theta \to 0$

$$\therefore \underset{\theta \to 0}{Lt} \frac{\sqrt{2 + \cos(\pi - \theta)} - 1}{\theta^2}$$

$$= \underset{\theta \to 0}{Lt} \frac{\sqrt{2 - \cos\theta} - 1}{\theta^2}$$

$$= \underset{\theta \to 0}{Lt} \frac{\sqrt{2 - \cos\theta} - 1}{\theta^2} \times \frac{\sqrt{2 - \cos\theta} + 1}{\sqrt{2 - \cos\theta} + 1}$$

$$= \underset{\theta \to 0}{Lt} \frac{2 - \cos\theta - 1}{\theta^2(\sqrt{2 - \cos\theta} + 1)}$$

$$= \underset{\theta \to 0}{Lt} \frac{1 - \cos\theta}{\theta^2 [\sqrt{2 - \cos\theta} + 1]}$$

$$= \underset{\theta \to 0}{Lt} \frac{2\sin^2 \frac{\theta}{2}}{\theta^2 [\sqrt{2 - \cos\theta} + 1]}$$

$$= \underset{\theta \to 0}{Lt}\ 2\left(\frac{\sin\frac{\theta}{2}}{\frac{\theta}{2}}\right)^2 \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{\sqrt{2 - \cos\theta} + 1}$$

$$= 2(1)^2 \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{1 + 1} = \frac{1}{4}.$$

8. $\underset{x \to 0}{Lt} \frac{4^x - 3^x}{x}$

$$= \underset{x \to 0}{Lt} \frac{(4^x - 1) - (3^x - 1)}{x}$$

$$= \underset{x \to 0}{Lt} \left(\frac{4^x - 1}{x}\right) - \underset{x \to 0}{Lt} \left(\frac{3^x - 1}{x}\right)$$

$$= \log_e 4 - \log_e 3$$

$$= \log_e \frac{4}{3}.$$

ಅಭ್ಯಾಸ - 10

1. (i) $y = f(x) = \dfrac{3x-1}{4x-3}$ ಆದರೆ $f(2)$ ಮತ್ತು $f(-1)$ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

   (ii) $f(x) = 2x\sqrt{1-x^2}$ ಆದರೆ $f\left(\sin\frac{x}{2}\right) = \sin x$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

   (iii) $f(x) = 3^x$ ಆದರೆ $f(x) \cdot f(y) = f(x+y)$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

   (iv) ಈ ಕೆಳಗಿನ ಉತ್ಪನ್ನಗಳನ್ನು ಬೆಸ ಮತ್ತು ಸರಿ ಉತ್ಪನ್ನಗಳೆಂದು ವಿಂಗಡಿಸಿ

   (a) $3x^7 + 4x^5 + x$ (b) $e^x - e^{-x}$

   (c) $8x^2 + \cos 2x + 3$ (d) $x^2 - 5x$

2. ಈ ಕೆಳಗಿನ ಉತ್ಪನ್ನಗಳ ಮಿತಿಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

   (i) $\underset{x \to 2}{Lt} (x^2 - 2x + 3)(x^2 + 3x + 1)$

   (ii) $\underset{x \to 3}{Lt} \left(x + \frac{1}{x}\right)$

   (iii) $\underset{x \to 1}{Lt} \dfrac{(x-1)}{(x-1)^2}$

(iv) $\underset{x \to 3}{Lt} \dfrac{(x^2 - 7x + 12)}{x + 3}$

(v) $\underset{x \to 0}{Lt} \dfrac{(2x^2 - 4x + 1)}{(2x^2 + 6x - 5)}$

3. (i) $\underset{x \to 1}{Lt} \left(\dfrac{8}{x^2 - 1} - \dfrac{4}{x - 1}\right)$

(ii) $\underset{x \to 2}{Lt} \dfrac{2x^2 - 5x + 2}{x^2 - 3x + 2}$

(iii) $\underset{x \to 4}{Lt} \dfrac{x^3 - 64}{x^2 - 7x + 12}$

(iv) $\underset{x \to -\frac{3}{2}}{Lt} \dfrac{4x^2 + 4x - 3}{4x^2 + 16x + 15}$

(v) $\underset{x \to 0}{Lt} \dfrac{4x^3 - 2x^2 + x}{3x^2 + x}$

(vi) $\underset{x \to \frac{1}{2}}{Lt} \left[\dfrac{2x^2 + 5x - 3}{6x^2 + 7x - 5}\right]$

4. (i) $\underset{x \to 0}{Lt} \dfrac{x}{\sqrt{4 - x} - \sqrt{4 + x}}$

(ii) $\underset{x \to 2}{Lt} \dfrac{(x - 2)}{\sqrt{3x + 4} - \sqrt{x + 8}}$

(iii) $\underset{x \to 0}{Lt} \dfrac{\sqrt{x^2 + p^2} - p}{\sqrt{x^2 + q^2} - q}$

(iv) $\underset{x \to -1}{Lt} \dfrac{x^2 - 1}{\sqrt{3 + x} - \sqrt{5 - x}}$

(v) $\underset{x \to 0}{Lt} \dfrac{\sqrt{1 + x + x^2} - 1}{x}$

5. (i) $\underset{n \to \infty}{Lt} \left(2 + \dfrac{1}{n} - \dfrac{4}{n^3}\right)$

(ii) $\underset{x \to \infty}{Lt} \dfrac{2x^2 - 4x + 7}{3x^2 - 2x + 1}$

(iii) $\underset{n \to \infty}{Lt} \dfrac{\sqrt{n^2 + 1}}{n + 1}$

(iv) $\underset{n \to \infty}{Lt} \left(\sqrt{n^2 + 1} - \sqrt{n^2 - 1}\right)$

(v) $\underset{n \to \infty}{Lt} \left(\dfrac{5}{2} + \dfrac{5}{4} + \dfrac{5}{8} \ldots\ldots n \text{ ಪದಗಳ ತನಕ}\right)$.

(vi) $\underset{x \to \infty}{Lt} \dfrac{12x^3 - 7x^2 + 12x - 8}{36x^3 - x^2 + x - 1}$

(vii) $\underset{x \to \infty}{Lt} \left[\sqrt{x + x - 1} - \sqrt{x^2 - 1}\right]$

(viii) $\underset{n \to \infty}{Lt} \dfrac{1 + 2 + 3 + \ldots + n}{(n + 2)(2n + 3)}$

(ix) $\underset{n \to \infty}{Lt} \left[1 - \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{9} - \dfrac{1}{27} + \ldots n \text{ ಪದಗಳ ತನಕ}\right]$

6. (i) $\underset{x \to 1}{Lt} \dfrac{x^{18} - 1}{x^9 - 1}$

(ii) $\underset{x \to 4}{Lt} \dfrac{x^{3/2} - 8}{x - 4}$

(iii) $\underset{x \to 2}{Lt} \dfrac{\sqrt{x} - \sqrt{2}}{x - 2}$

(iv) $\underset{x \to 1}{Lt} \dfrac{x^{1/3} - 1}{x^{1/2} - 1}$

(v) $\underset{x \to 0}{Lt} \dfrac{(1 + x)^5 - 1}{(1 + x)^3 - 1}$

(vi) $\underset{x \to \frac{1}{3}}{Lt} \dfrac{27x^3 - 1}{81x^4 - 1}$

(vii) $\underset{x \to a}{Lt} \dfrac{x^{-4/3} - a^{-4/3}}{x^{-2/5} - a^{-2/5}}$

(viii) $\underset{x \to 2}{Lt} \dfrac{x^2 - 4}{x\sqrt{x} - 2\sqrt{2}}$

(ix) $\underset{h \to 0}{Lt} \dfrac{h}{(4 + h)^4 - 4^4}$

(x) $\underset{x \to 3}{Lt} \dfrac{x - 3}{\dfrac{1}{x^4} - \dfrac{1}{81}}$

7. (i) $\underset{x \to 0}{Lt} \dfrac{1 - \cos 6x}{1 - \cos 2x}$

(ii) $\underset{\theta \to 0}{Lt} \dfrac{\sin 2\theta \sin 3\theta}{3\theta \tan\theta \; 4\theta}$

(iii) $\underset{x \to 0}{Lt} \sin 3x \cot 4x$

(iv) $\underset{x \to 1}{Lt} \dfrac{\sqrt{x} - 1}{x^2 - 1} \sin (x - 1)$

(v) $\underset{x \to 0}{Lt} \dfrac{\sin (a + x) - \sin (a - x)}{x}$

(vi) $\underset{x \to 0}{Lt} \dfrac{1 - \cos^3 x}{\sin^2 x}$

(vii) $\underset{x \to 0}{Lt} \dfrac{\sin x^\circ}{x}$

(viii) $\underset{x \to \pi}{Lt} \dfrac{1 + \cos^3 x}{\tan^2 x}$

(ix) $\underset{x \to \pi}{Lt} \dfrac{1 + \cos 2x}{1 - \sin x}$

(x) $\underset{x \to 0}{Lt} \dfrac{\tan 3x - x}{3x - \sin x}$

(xi) $\underset{x \to 1}{Lt} \dfrac{1 - x}{\cos \frac{\pi}{2} x}$

(xii) $\underset{\theta \to \frac{\pi}{2}}{Lt} \dfrac{(\sec \theta - \tan \theta)}{\frac{\pi}{2} - \theta}$

(xiii) $\underset{x \to \frac{\pi}{4}}{Lt} \dfrac{1 - \tan x}{\frac{\pi}{4} - x}$

(xiv) $\underset{x \to \frac{\pi}{2}}{Lt} \dfrac{\cos 3x + 3 \cos x}{\left(\frac{\pi}{2} - x\right)^3}$

(xv) $\underset{x \to \alpha}{Lt} \dfrac{\sin x - \sin \alpha}{\sqrt{x} - \sqrt{\alpha}}$

8. (i) $\underset{x \to \infty}{Lt} \left(1 + \dfrac{3}{x}\right)^x$

(ii) $\underset{n \to \infty}{Lt} \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^{2n + 6}$

(iii) $\underset{x \to 0}{Lt} \dfrac{e^{px} - 1}{qx}$

(iv) $\underset{x \to 0}{Lt} \dfrac{2^x - 1}{3x}$

(v) $\underset{x \to 0}{Lt} \dfrac{4^x - 5^x}{x}$

ಅಧ್ಯಾಯ 11

ತ್ರಿಕೋನಮಿತಿ

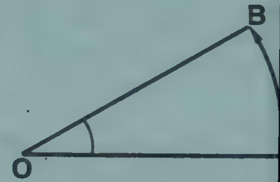
11.1 ಪೀಠಿಕೆ

'ತ್ರಿಕೋನಮಿತಿ' ಪದದ ಅರ್ಥ ತ್ರಿಕೋನದ ಅಳತೆ. ತ್ರಿಕೋನವನ್ನು ಬಿಡಿಸುವುದು ಅಂದರೆ ಅದರ 6 ಮೂಲಾಂಶಗಳನ್ನು (3 ಭುಜಗಳು, 3 ಕೋನಗಳು) ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವ ಬಗೆ. ಖಗೋಳ ಶಾಸ್ತ್ರ ಮತ್ತು ಜ್ಯಾಮಿತಿಗಳಲ್ಲಿ ಬರುವ ಅನೇಕ ಸಮಸ್ಯೆಗಳನ್ನು ಬಗೆಹರಿಸಲು ತ್ರಿಕೋನಮಿತಿಯನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಲಾಗಿದೆ. ಗಣಿತಜ್ಞರಾದ ಜಾನ್ ಬರ್ನೌಲಿ, ಲಿಯೊನ್ಹಾರ್ಡ್ ಆಯ್ಲರ್, ಫುರಿಯರ್, ಗೌಸ್, ಡಿಮೋವರ್ ಮುಂತಾದವರು ಈ ಶಾಖೆಯ ಬೆಳವಣಿಗೆಗೆ ಕಾರಣಕರ್ತೃಗಳಾಗಿದ್ದಾರೆ. ಜ್ಯಾಮಿತಿಯಲ್ಲಿ ಒಂದು ಕೋನವನ್ನು ಲಂಬಕೋನದ ಸಹಾಯದಿಂದ ಅಳೆಯುತ್ತಿದ್ದರು. ಆದರೆ ಇದು ಅಷ್ಟು ಅನುಕೂಲವಾದ ಅಳತೆಯ ಮಾನವಲ್ಲ, ಆದುದರಿಂದ ಕೋನವನ್ನು ಅಳೆಯಲು ಕೆಲವು ಸಮರ್ಪಕವಾದ ಮಾನ ಪದ್ಧತಿಗಳು ಜಾರಿಗೆ ಬಂದವು.

11.1.1 ಕೋನ ಮತ್ತು ಕೋನಮಾನ

ಒಂದು ಸರಳರೇಖೆಯು ತನ್ನ ಸ್ಥಿರ ಸ್ಥಾನ OA ಯಿಂದ ಅಪ್ರದಕ್ಷಿಣೆ ದಿಶೆಯಲ್ಲಿ O ಬಿಂದುವಿನ ಸುತ್ತಲೂ ಪರಿಭ್ರಮಿಸಿ OB ಸ್ಥಾನವನ್ನು ಹೊಂದಲಿ. ಹೀಗೆ ಸರಳರೇಖೆ OA ಯಿಂದ OB ಗೆ Oನ ಸುತ್ತಲೂ ಪರಿಭ್ರಮಿಸಿದಾಗ ಅದು $A\hat{O}B$ ಎಂಬ ಕೋನವನ್ನು ರಚಿಸುತ್ತದೆ (ಚಿತ್ರ 11.1).

ಹೀಗೆ ಈ ಸರಳರೇಖೆಯು ಪರಿಭ್ರಮಣೆಯನ್ನು ಮುಂದುವರಿಸಿ ಪುನಃ OA ಗೆ ಮರಳುವಾಗ ಅದು ಒಂದು ಪೂರ್ಣ ಪರಿಭ್ರಮಣೆಯನ್ನು ಮಾಡಿರುತ್ತದೆ. ಇನ್ನು ಕೋನಮಾನದ ಮೂರು ಪದ್ಧತಿಗಳನ್ನು ತಿಳಿಯೋಣ.



ಚಿತ್ರ 11.1

11.1.2 ಷಷ್ಟ್ಯಂಶ ಪದ್ಧತಿ

ಈ ಪದ್ಧತಿಯಲ್ಲಿ ಒಂದು ಲಂಬಕೋನವನ್ನು 90 ಸಮಭಾಗಗಳಾಗಿ ವಿಭಾಗಿಸಿ, ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಭಾಗವನ್ನು ಒಂದು "**ಡಿಗ್ರಿ**" ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ. ಒಂದು ಡಿಗ್ರಿಯನ್ನು 60 ಸಮಭಾಗಗಳಾಗಿ ವಿಭಾಗಿಸಿ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಇಂಥ ಭಾಗವನ್ನು ಒಂದು "**ಮಿನಿಟು**" ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ. ಮತ್ತೆ ಕೊನೆಯದಾಗಿ ಒಂದು ಮಿನಿಟನ್ನು 60 ಸಮಭಾಗಗಳಾಗಿ ವಿಭಾಗಿಸಿ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಇಂಥ ಭಾಗವನ್ನು ಒಂದು "**ಸೆಕೆಂಡ್**" ಎಂದೂ ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ.

x ಡಿಗ್ರಿಗಳನ್ನು x° ಎಂದು ಬರೆಯುತ್ತೇವೆ; y ಮಿನಿಟುಗಳನ್ನು y' ಎಂದು ಬರೆಯುತ್ತೇವೆ; ಮತ್ತು z ಸೆಕೆಂಡುಗಳನ್ನು z'' ಎಂದು ಬರೆಯುತ್ತೇವೆ.

ಈ ಪದ್ಧತಿಯು ಬಹಳ ಕಾಲದಿಂದ ಪ್ರಚಲಿತವಾಗಿದೆ. ಆದರೆ 60 ಮತ್ತು 90ರ ಗುಣಾಂಶಗಳನ್ನು ಬಳಸಬೇಕಾಗುವುದು. ಆದುದರಿಂದ ಇವು ಅಷ್ಟು ಲೆಕ್ಕಾಚಾರಗಳ ದೃಷ್ಟಿಯಿಂದ ಅನುಕೂಲಕರವಾಗಿಲ್ಲ, ಪ್ರಾಚೀನ ಭಾರತೀಯ ತ್ರಿಕೋನಮಿತಿಯಲ್ಲಿ ಡಿಗ್ರಿ ಮಿನೀಟ್ ಮತ್ತು ಸೆಕೆಂಡುಗಳನ್ನು ಕ್ರಮವಾಗಿ **ಅಂಶ, ಕಲಾ** ಮತ್ತು **ವಿಕಲಾ** ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತಿದ್ದರು.

11.1.3 ಶತಮಾಂಶ ಪದ್ಧತಿ

ಈ ಪದ್ಧತಿಯು ಫ್ರೆಂಚ್ ಗಣಿತಜ್ಞರ ಕೊಡುಗೆ. ಇದರಲ್ಲಿ, ಒಂದು ಲಂಬಕೋನವನ್ನು 100 ಸಮಭಾಗಗಳಾಗಿ ವಿಭಾಗಿಸಿ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಭಾಗವನ್ನು ಒಂದು **"ಗ್ರೇಡ್"** ಎಂದು ಕರೆಯಲಾಗುವುದು. ಒಂದು ಗ್ರೇಡ್‌ನ್ನು ಪುನಃ 100 ಸಮಭಾಗಗಳಾಗಿ ವಿಂಗಡಿಸಿ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಭಾಗವನ್ನು ಒಂದು "ಮಿನಿಟು" ಮತ್ತು ಕೊನೆಯದಾಗಿ ಒಂದು ಮಿನಿಟನ್ನು 100 ಭಾಗಗಳಾಗಿ ವಿಭಾಗಿಸಿ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಭಾಗವನ್ನು ಒಂದು "ಸೆಕೆಂಡ್' ಎಂದು ಕರೆಯಲಾಗುವುದು.

1^{g}, $1'$, $1''$ ಎಂಬ ಚಿಹ್ನೆಗಳನ್ನು ಕ್ರಮವಾಗಿ ಒಂದು ಗ್ರೇಡ್, ಒಂದು ಮಿನಿಟು ಮತ್ತು ಒಂದು ಸೆಕೆಂಡ್‌ನ್ನು ಸೂಚಿಸಲು ಉಪಯೋಗಿಸಲಾಗುತ್ತದೆ. ಆದರೆ ವಾಸ್ತವದಲ್ಲಿ ಈ ಪದ್ಧತಿ ಬಳಕೆಯಲ್ಲಿಲ್ಲ,

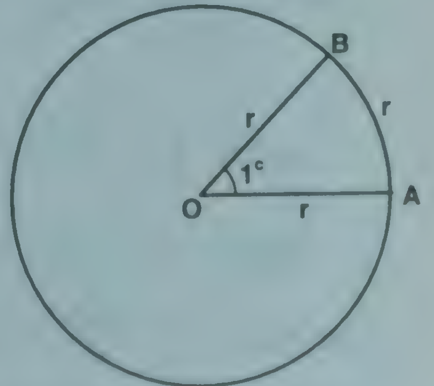
ಸೂಚನೆ : $90^{\circ} = 100^{g}$ ಎಂಬ ಸಮೀಕರಣದಿಂದ ಒಂದು ಮಾನ ಪದ್ಧತಿಯಿಂದ ಇನ್ನೊಂದು ಪದ್ಧತಿಗೆ ಪರಿವರ್ತಿಸಬಹುದು. ಉದಾ : $60^{\circ} = 66\frac{2}{3}^{g}$.

11.1.4 ರೇಡಿಯನ್ ಪದ್ಧತಿ :

ಈ ಮೂರನೇ ಪದ್ಧತಿಯು ಗಣಿತ ಶಾಸ್ತ್ರದ ಎಲ್ಲಾ ಶಾಖೆಗಳಲ್ಲಿ ಉಪಯೋಗಗೊಳ್ಳುತ್ತದೆ. ಅಷ್ಟೇ ಅಲ್ಲದೆ, ಈ ಕೋನಮಾನ ಪದ್ಧತಿಯು ಹೆಚ್ಚು ಸ್ವಾಭಾವಿಕವಾಗಿದೆ.

ರೇಡಿಯನ್‌ನ ವ್ಯಾಖ್ಯೆ : r ಎಂಬ ಯಾವುದೇ ಒಂದು ತ್ರಿಜ್ಯವಿರುವ ಒಂದು ವೃತ್ತವನ್ನು ಬಿಡಿಸಿರಿ. ವೃತ್ತದ ಪರಿಧಿಯಲ್ಲಿ AB ಕಂಸವನ್ನು ಗುರುತಿಸಿ. ಈ AB ಕಂಸವು ತ್ರಿಜ್ಯ r ಗೆ ಸಮಾನವಾಗಿದ್ದರೆ AOB ಕೋನದ ಮಾನವನ್ನು ಒಂದು **ರೇಡಿಯನ್** ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ ಮತ್ತು ಅದನ್ನು 1^{c} ಎಂದು ಸೂಚಿಸುತ್ತೇವೆ.

$\angle AOB = 1$ ರೇಡಿಯನ್ $= 1^{c}$

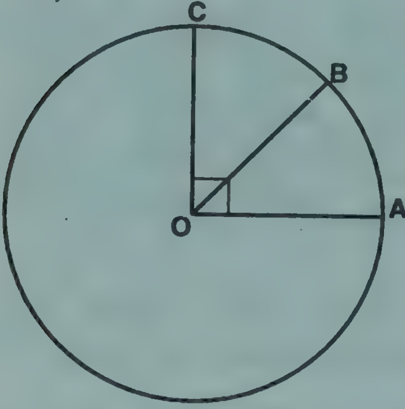


ಚಿತ್ರ 11.2

ಒಂದು ವೃತ್ತದ ತ್ರಿಜ್ಯದಷ್ಟೇ ಉದ್ದವಿರುವ ಅದರ ಕಂಸವು ಆ ವೃತ್ತದ ಕೇಂದ್ರದಲ್ಲಿ ರಚಿಸುವ ಕೋನವನ್ನು ಒಂದು ರೇಡಿಯನ್ ಎನ್ನುತ್ತಾರೆ. ಯಾವುದೇ ಒಂದು ಅಳತೆಯ ಪದ್ಧತಿಯನ್ನು ಅನುಸರಿಸುವಾಗ ಆ ಅಳತೆಯು ಸ್ಥಿರವಾಗಿದೆ ಎಂದು ತಿಳಿಯಬೇಕು. ಮುಂದಿನ ಪ್ರಮೇಯದಲ್ಲಿ ರೇಡಿಯನ್ ಒಂದು ಸ್ಥಿರಕೋನ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಲಾಗುವುದು.

11.1.5 ಪ್ರಮೇಯ 1 : ರೇಡಿಯನ್ ಒಂದು ಸ್ಥಿರಕೋನ

ಸಾಧನೆ : ಒಂದು ವೃತ್ತದ ಕೇಂದ್ರವು O ಆಗಿದ್ದು ತ್ರಿಜ್ಯವು r ಎಂಬುದಿರಲಿ. ಆ ವೃತ್ತದಲ್ಲಿ ಕಂಸ AB ಯನ್ನು ಗುರುತಿಸಿ. ಈ ಕಂಸದ ಉದ್ದವು ತ್ರಿಜ್ಯಕ್ಕೆ ಸಮಾನವಾಗಿರಲಿ (ಚಿತ್ರ 11.3).



ಚಿತ್ರ 11.3

ಆದ್ದರಿಂದ, ರೇಡಿಯನ್ ವ್ಯಾಖ್ಯೆಯಿಂದ $\angle AOB = 1^c$.

$\angle AOC$ ಒಂದು ಲಂಬಕೋನರಾಗಿರುವಂತೆ ಇನ್ನೊಂದು ಬಿಂದು C ಯನ್ನು ವೃತ್ತದಲ್ಲಿ ಗುರುತಿಸಿ. ಆದ್ದರಿಂದ

$$\text{ಕಂಸ } AC = \frac{1}{4} \text{ [ವೃತ್ತದ ಪರಿಧಿ]}$$

$$= \frac{1}{4} [2\pi r]$$

ಒಂದು ವೃತ್ತದಲ್ಲಿನ ಕಂಸಗಳು ಅವು ಕೇಂದ್ರದಲ್ಲಿ ರಚಿಸುವ ಕೋನಗಳ ಪ್ರಮಾಣದಲ್ಲಿ ಇವೆ ಎಂದು ನಮಗೆ ತಿಳಿದಿದೆ.

$$\therefore \quad \frac{\text{ಕಂಸ } AB}{\text{ಕಂಸ } AC} = \frac{\angle AOB}{\angle AOC}$$

ಅಂದರೆ, $\dfrac{r}{\left(\frac{1}{4}\right)2\pi r} = \dfrac{1^c}{90^\circ}$

ಅಥವಾ $\dfrac{2}{\pi} = \dfrac{1^c}{90^\circ}$

ಅಥವಾ $\pi^c = 180^\circ$

ಆದ್ದರಿಂದ, $1^c = \dfrac{180^\circ}{\pi}$ = ಸ್ಥಿರ ಸಂಖ್ಯೆ

ಅಂದರೆ, ರೇಡಿಯನ್ ಒಂದು ಸ್ಥಿರಕೋನವಾಗಿದೆ.

ಸೂಚನೆ :

(i) $1^c = \frac{180^\circ}{\pi} = \frac{180^\circ}{3.1416} = 57^\circ\, 17'\, 45''$ (ಸ್ಥೂಲವಾಗಿ)

(ii) π ರೇಡಿಯನ್‌ಗಳು 180°ಗೆ ಸಮಾನವಾಗಿವೆ.

ಈ ಸೂತ್ರವು ರೇಡಿಯನ್ ಮತ್ತು ಷಷ್ಟ್ಯಂಶ ಮಾನಗಳಿಗೆ ಇರುವ ಸಂಬಂಧವನ್ನು ನಿರೂಪಿಸುತ್ತದೆ.

11.1.6 ವೃತ್ತದ ಕಂಸ

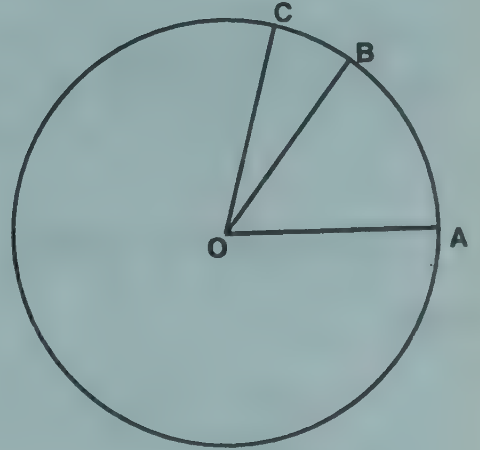
ಪ್ರಮೇಯ 2 : ಒಂದು ವೃತ್ತದ ಕಂಸವು s ಉದ್ದವನ್ನು ಹೊಂದಿದ್ದು, ಅದು θ ರೇಡಿಯನ್ ಕೋನವನ್ನು r ತ್ರಿಜ್ಯವಿರುವ ವೃತ್ತದ ಕೇಂದ್ರ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ರಚಿಸಿದರೆ, ಆಗ $s = r\theta$ ಆಗಿರುತ್ತದೆ.

ಸಾಧನೆ :

ವೃತ್ತಕೇಂದ್ರ ಬಿಂದುವು O ಆಗಿರಲಿ. ಹಾಗೂ, $A\hat{O}B = \theta^c$ ಮತ್ತು ಕಂಸ $AB = s$ ಆಗಿರಲಿ.

AC ಎಂಬ ಕಂಸವು ತ್ರಿಜ್ಯಕ್ಕೆ ಸಮಾನವಾಗಿರುವಂತೆ C ಎಂಬ ಬಿಂದುವನ್ನು ವೃತ್ತದಲ್ಲಿ ಗುರುತಿಸಿ (ಚಿತ್ರ 11.4). ಈಗ $AC=r$ ಆಗಿರುವುದರಿಂದ $A\hat{O}C = 1^c$. ಕಂಸಗಳು ಕೇಂದ್ರದಲ್ಲಿ ಅವುಗಳಿಂದ ರಚಿತವಾದ ಕೋನಗಳ ಪ್ರಮಾಣದಲ್ಲಿರುವುದರಿಂದ

$$\frac{\text{ಕಂಸ } AB}{\text{ಕಂಸ } AC} = \frac{A\hat{O}B}{A\hat{O}C}$$



ಚಿತ್ರ 11.4

ಅಥವಾ $\frac{s}{r} = \frac{\theta^c}{1^c}$ $\quad \therefore\ s = r\theta$

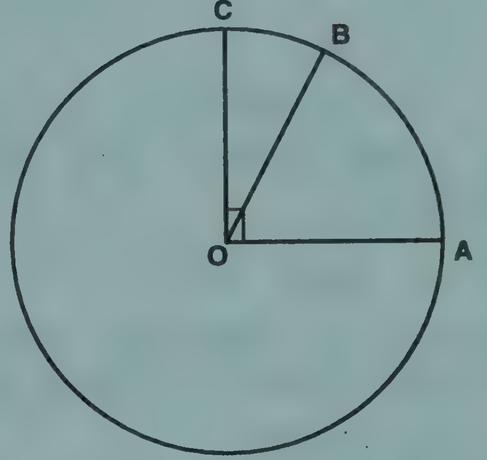
11.1.7 ವೃತ್ತಖಂಡದ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲ

ಪ್ರಮೇಯ 3 : ಒಂದು ವೃತ್ತಖಂಡವು θ^c ಎಂಬ ಕೋನವನ್ನು ವೃತ್ತದ ಕೇಂದ್ರ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಮಾಡಿದರೆ ಅದರ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲವು $\frac{1}{2}r^2\theta$ ಆಗಿರುತ್ತದೆ (ಇಲ್ಲಿ r ವೃತ್ತದ ತ್ರಿಜ್ಯ.)

ಸಾಧನೆ : ವೃತ್ತದ ಕೇಂದ್ರವು O ಹಾಗೂ ತ್ರಿಜ್ಯವು r ಆಗಿರಲಿ.

$A\hat{O}B = \theta^c$ ಮತ್ತು $A\hat{O}C = 90^\circ = \frac{\pi^c}{2}$

ಆಗಿರುವಂತೆ B ಮತ್ತು C ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ವೃತ್ತದಲ್ಲಿ ಗುರುತಿಸಿ (ಚಿತ್ರ 11.5).



ಚಿತ್ರ 11.5

ಇಲ್ಲಿ AB ಕಂಸವು θ^c ಕೋನವನ್ನು ಕೇಂದ್ರದಲ್ಲಿ ರಚಿಸಿರುತ್ತದೆ.

ವೃತ್ತಖಂಡದ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲವು ಅದು ಕೇಂದ್ರದಲ್ಲಿ ಮಾಡುವ ಕೋನದ ಪ್ರಮಾಣದಲ್ಲಿ ಇರುತದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ

$$\frac{AOB\text{ಯ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲ}}{AOC\text{ಯ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲ}} = \frac{\theta^c}{\left(\frac{\pi}{2}\right)^c}$$

ಅಥವಾ $$\frac{AOB\text{ಯ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲ}}{\frac{1}{4}(\pi r^2)} = \left(\frac{\theta}{\pi/2}\right)$$

$\therefore$ AOB **ವೃತ್ತಖಂಡದ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲ** $= \frac{1}{2}r^2\theta$

ಸೂಚನೆ :

$s = r\theta$ ಮತ್ತು $A = \frac{1}{2}r^2\theta$ ಎಂಬ ಸೂತ್ರಗಳಲ್ಲಿ $\dot{\theta}$ ರೇಡಿಯನ್ಸ್‌ನಲ್ಲಿರಬೇಕು ಎಂಬುದನ್ನು ಗಮನಿಸಿ.

ಉದಾಹರಣೆಗಳು

1. ಈ ಕೆಳಗಿನ ಕೋನಗಳನ್ನು ರೇಡಿಯನ್‌ಗೆ ಪರಿವರ್ತಿಸಿ :

(i) 135° (ii) 270° (iii) 315° (iv) 80°

(i) $\pi^c = 180^\circ \quad \therefore\ 135^\circ = \frac{135}{180}\times\pi = \frac{3\pi^c}{4}$

(ii) $270^\circ = \frac{\pi\times 270}{180} = \frac{3\pi^c}{2}$

(iii) $315° = \frac{\pi \times 315}{180} = \frac{7\pi^c}{4}$

(iv) $80° = \frac{80 \times \pi}{180} = \frac{4\pi^c}{9}$

2. ಈ ಕೆಳಗಿನ ರೇಡಿಯನ್‌ಗಳನ್ನು ಷಷ್ಟ್ಯಂಶ ಪದ್ಧತಿಗೆ ಪರಿವರ್ತಿಸಿ :

(i) $\frac{2\pi}{3}$ (ii) $\frac{7\pi}{12}$ (iii) $\frac{4\pi}{3}$

(i) $\frac{2\pi^c}{3} = \frac{180° \times 2\frac{\pi}{3}}{\pi} = 120°$ (ii) $\frac{7\pi^c}{12} = \frac{180° \times 7\frac{\pi}{12}}{\pi} = 105°$

(iii) $\frac{4\pi^c}{3} = \frac{180° \times 4\frac{\pi}{3}}{\pi} = 240°$

3. 6ಸೆ.ಮೀ. ತ್ರಿಜ್ಯವಿರುವ ವೃತ್ತಾಕಾರದ ತಂತಿಯನ್ನು ಇನ್ನೊಂದು ವೃತ್ತದ ಕಂಸವನ್ನಾಗಿ ಪರಿವರ್ತಿಸಲಾಯಿತು. ಈ ವೃತ್ತದ ತ್ರಿಜ್ಯ 48 ಸೆ.ಮೀ. ಕಂಸವು ರಚಿಸಿರುವ ಕೋನವನ್ನು ಷಷ್ಟ್ಯಂಶ ಪದ್ಧತಿಯಲ್ಲಿ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ವೃತ್ತಾಕಾರದ ತಂತಿಯ ಉದ್ದ = ಪರಿಧಿ $= 2\pi r$

$= 2\pi \times 6 = 12\pi$ ಸೆ.ಮೀ.

ಇದನ್ನು ಕಂಸವನ್ನಾಗಿ ಪರಿವರ್ತಿಸಿದಾಗ ಕಂಸದ ಉದ್ದವು $s = 12\pi$ ಸೆ.ಮೀ. ಹಾಗೂ ವೃತ್ತದ ತ್ರಿಜ್ಯ $r = 48$ ಸೆ.ಮೀ.

ಈಗ, $s = r\theta$ ಎಂಬ ಸೂತ್ರದಿಂದಾಗಿ

$12\pi = 48(\theta)$

ಅಥವಾ $\theta = \frac{12\pi}{48}$ $\therefore \theta = \frac{\pi^c}{4} = 45°$.

4. ಒಂದು ಕಂಸವು 50° ಕೋನವನ್ನು 36 ಸೆ.ಮೀ. ತ್ರಿಜ್ಯವಿರುವ ವೃತ್ತದ ಕೇಂದ್ರದಲ್ಲಿ ರಚಿಸುತ್ತದೆ. ಈ ವೃತ್ತದ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಇಲ್ಲಿ, $A = \frac{1}{2} r^2 \theta$ ಎಂಬ ಸೂತ್ರವನ್ನು ಬಳಸುತ್ತೇವೆ.

ಮೊದಲು, ಕೋನ θವನ್ನು ರೇಡಿಯನ್ ಅಳತೆಯಲ್ಲಿ ಪರಿವರ್ತಿಸಬೇಕು

ದತ್ತ ಕೋನ, $50° = \frac{5\pi^c}{18}$

$$\therefore\ A = \frac{1}{2}\ (36)^2\ \left(\frac{5\pi}{18}\right)$$

$A = 180\pi$ ಚದರ ಸೆ.ಮೀ.

5. ಒಂದು ರೈಲು ವೃತ್ತಾಕಾರದ ಕಂಸದಲ್ಲಿ ಚಲಿಸುತ್ತದೆ. ವೃತ್ತದ ತ್ರಿಜ್ಯವು 1/2 ಕಿ.ಮೀ. ಅದು ಘಂಟೆಗೆ 20 ಕಿ.ಮೀ. ವೇಗದಲ್ಲಿ ಚಲಿಸುತ್ತದೆ. 10 ಸೆಕೆಂಡಿನಲ್ಲಿ ರೈಲು ಎಷ್ಟು ಕೋನದಲ್ಲಿ ತಿರುಗಿದೆ ಎಂದು ತಿಳಿಸಿ.

ಇಲ್ಲಿ, $r = \frac{1}{2}$ ಕಿ.ಮೀ ; 1 ಘಂಟೆ (ಅಂದರೆ 3600 ಸೆಕೆಂಡುಗಳಲ್ಲಿ) ಚಲಿಸಿರುವ ದೂರ 20 ಕಿ.ಮೀ.

ಆದ್ದರಿಂದ, 10 ಸೆಕೆಂಡುಗಳ ಚಲಿಸಿರುವ ದೂರ $= \frac{20 \times 10}{3600} = \frac{1}{18}$ ಕಿ.ಮೀ.

$\therefore\ s = \frac{1}{18}$ ಕಿ.ಮೀ.

ಈಗ, $s = r\theta$ ಎಂಬ ಸೂತ್ರವನ್ನು ಬಳಸಿಕೊಂಡಾಗ

$$\frac{1}{18} = \frac{1}{2}\theta$$

ಅಥವಾ $\theta = \frac{1^c}{9}$ ಎಂದಾಗುತ್ತದೆ.

ಇದನ್ನು ಡಿಗ್ರಿಗಳಿಗೆ ಪರಿವರ್ತಿಸಿದಾಗ

$$\theta = \frac{1}{9} \times \frac{180}{\pi} = \frac{20^\circ}{\pi} \approx \frac{20}{3.1416} = 6^\circ\, 21'\, 58''$$ (ಸ್ಥೂಲವಾಗಿ)

ಅಭ್ಯಾಸ - 11.1

1. ಈ ಕೆಳಗಿನ ಕೋನಗಳನ್ನು ರೇಡಿಯನ್‌ಗೆ ಪರಿವರ್ತಿಸಿ :

   (i) 140° (ii) 175° (iii) 245° (iv) -335° (v) 3540°

2. ಈ ಕೆಳಗಿನ ಕೋನಗಳನ್ನು ಷಷ್ಟ್ಯಂಶ ಪದ್ಧತಿಗೆ ಪರಿವರ್ತಿಸಿ :

   (i) $\frac{3\pi^c}{4}$ (ii) $10\pi^c$ (iii) 8^c (iv) $\frac{7\pi^c}{6}$ (v) $\frac{17\pi^c}{12}$

3. ಒಂದು ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಕೋನದ ಎರಡು ಲಘುಕೋನಗಳ ನಡುವಿನ ವ್ಯತ್ಯಾಸವು $\frac{2}{5}\pi^c$ ತ್ರಿಕೋನದ ಎಲ್ಲಾ ಕೋನಗಳನ್ನು ಡಿಗ್ರಿಯಲ್ಲಿ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

4. ಒಂದು ಚತುರ್ಭುಜದ ಕೋನಗಳು *A.P.*ಯಲ್ಲಿವೆ. ಅತಿ ಹೆಚ್ಚಿನ ಕೋನವು ಅತಿ ಕಡಿಮೆ ಕೋನದ ಎರಡರಷ್ಟಿದೆ. ಅತಿ ಕಡಿಮೆ ಕೋನವನ್ನು ರೇಡಿಯನ್‌ನಲ್ಲಿ ತಿಳಿಸಿರಿ.

5. 3 ಸೆ.ಮೀ. ತ್ರಿಜ್ಯದ ವೃತ್ತಾಕಾರವಾದ ತಂತಿಯನ್ನು ತುಂಡು ಮಾಡಿ ಬಗ್ಗಿಸಿ, ಒಂದು ವೃತ್ತದ ಕಂಸವನ್ನಾಗಿ ಪರಿವರ್ತಿಸಲಾಗಿದೆ. ಅದರ ತ್ರಿಜ್ಯವು 4 ಸೆ.ಮೀ. ಈ ಕಂಸವು ಕೇಂದ್ರದಲ್ಲಿ ರಚಿಸಿರುವ ಕೋನವನ್ನು ರೇಡಿಯನ್ ಅಳತೆಯಲ್ಲಿ ತಿಳಿಸಿರಿ.

6. ಮುಲ್ಕಿಯು ಮಂಗಳೂರಿನಿಂದ 64 ಕಿ.ಮೀ. ದೂರದಲ್ಲಿದೆ. ಈ ಎರಡು ಪಟ್ಟಣಗಳನ್ನು ಕಂಸಾಕಾರದಲ್ಲಿ ಜೋಡಿಸಿದಾಗ ಭೂಮಿಯ ಕೇಂದ್ರ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ರಚಿತವಾಗುವ ಕೋನವನ್ನು ಷಷ್ಟ್ಯಂಶ ಮಾನದಲ್ಲಿ (ಸೆಕೆಂಡಿಗೆ ಸ್ಥೂಲವಾಗಿ) ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. ಭೂಮಿಯು ಗೋಲಾಕಾರವಾಗಿದ್ದು ಅದರ ತ್ರಿಜ್ಯವು 6371 ಕಿ.ಮೀ. ಎಂದು ಪರಿಗಣಿಸಿ.

7. 50 ಸೆ.ಮೀ ಉದ್ದದ ಒಂದು ಲೋಲಕವು 15° ಯಷ್ಟು ದೂರಕ್ಕೆ ತೂಗಾಡುವುದು. ಅದರ ಕೊನೆಯು ರಚಿಸುವ ಕಂಸದ ಉದ್ದವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. ಲೋಲಕವು ರಚಿಸುವ ವೃತ್ತಖಂಡದ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

8. ಒಂದು ಕುದುರೆಯನ್ನು 8.23 ಮೀ. ಉದ್ದದ ಹಗ್ಗದಲ್ಲಿ ಒಂದು ಕಂಬಕ್ಕೆ ಕಟ್ಟಿ ಹಾಕಿದ್ದಾರೆ. ಕುದುರೆಯು ಚಲನೆಯಲ್ಲಿರುವಾಗ ಹಗ್ಗವು ಯಾವಾಗಲೂ ಬಿಗುವಾಗಿ ಇರುವುದು ಎಂದು ಭಾವಿಸಿದರೆ ಹಗ್ಗವು 70° ಕೋನವನ್ನು ರಚಿಸಿದಾಗ ಕುದುರೆಯು ಎಷ್ಟು ದೂರ ಚಲಿಸಿರುತ್ತದೆ?

9. ಒಂದು ಚಕ್ರವು ಒಂದು ನಿಮಿಷದಲ್ಲಿ 45 ಸಲ ಪರಿಭ್ರಮಿಸುತ್ತದೆ. ಈ ಚಕ್ರದ ಕಂಸವು 5 ರೇಡಿಯನ್ ಕೋನವನ್ನು ಮಾಡಲು ಎಷ್ಟು ಸಮಯವನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳುತ್ತದೆ?

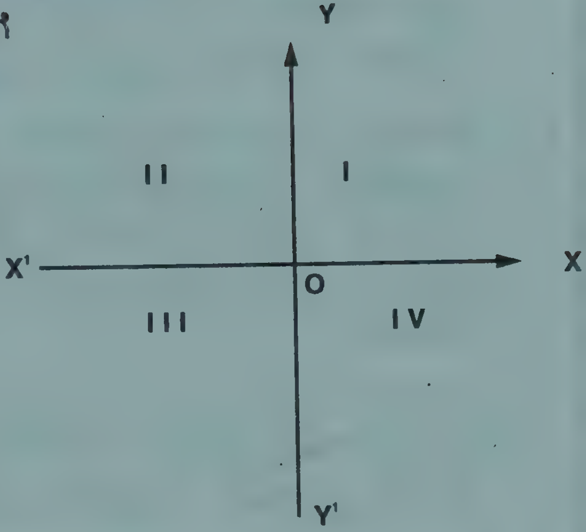
10. 3 ಮೀ. ತ್ರಿಜ್ಯವಿರುವ ಒಂದು ಚಕ್ರವು ಸೆಕೆಂಡಿಗೆ 10 ಸಲ ಪರಿಭ್ರಮಿಸುತ್ತದೆ. ಅದರ ಪರಿಧಿಯ ಮೇಲಿರುವ ಒಂದು ಬಿಂದು 5 ಸೆಕೆಂಡುಗಳಲ್ಲಿ ರಚಿಸಿದ ಕಂಸದ ಉದ್ದವೆಷ್ಟು?

11.2.1 ಪಾದಗಳು

ಒಂದು ಸಮತಲವನ್ನು ನಾಲ್ಕು ಭಾಗಗಳಾಗಿ ವಿಭಾಗಿಸಿ, ಅದರಲ್ಲಿ $X'OX$ ಒಂದು ಮಧ್ಯ ಸರಳರೇಖೆಯಾಗಿರಲಿ. O ಅದರ ಮೇಲಿನ ಒಂದು ಮಧ್ಯ ಬಿಂದುವಾಗಿರಲಿ. $Y'OY$ ಯು $X'OX$ಗೆ ಲಂಬರೇಖೆಯಾಗಿರಲಿ. ಹೀಗೆ ಸಮತಲವನ್ನು ನಾಲ್ಕು ಭಾಗಗಳಾಗಿ ವಿಂಗಡಿಸಲಾಗಿದೆ (ಚಿತ್ರ 11.6).

ಸಮತಲದ ಭಾಗಗಳಾದ XOY' YOX', $X'OY'$ ಮತ್ತು $Y'OX$ ಗಳನ್ನು ಒಂದನೇ (I-) ಪಾದ, ಎರಡನೇ (II -) ಪಾದ, ಮೂರನೇ (III-) ಪಾದ ಮತ್ತು ನಾಲ್ಕನೇ (IV-) ಪಾದ ಎಂದು ಅನುಕ್ರಮವಾಗಿ ಕರೆಯಲಾಗುವುದು. $X'OX$ ಮತ್ತು $Y'OY$ ಗಳನ್ನು ಕ್ರಮವಾಗಿ x - ಅಕ್ಷ ಮತ್ತು y - ಅಕ್ಷ ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ.

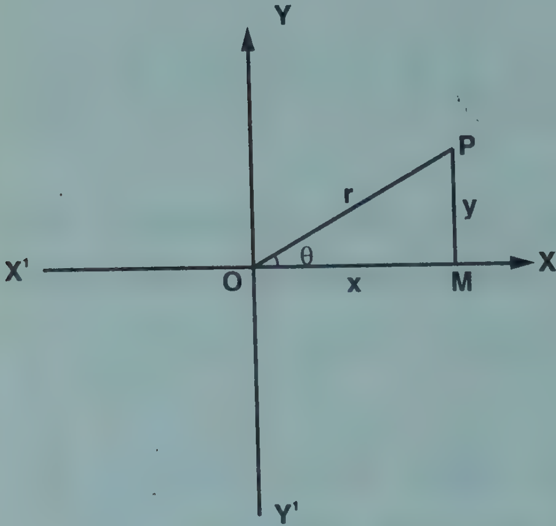
ಒಂದನೇ ಪಾದದಲ್ಲಿ (I - ಪಾದದಲ್ಲಿ) ಯಾವುದೇ ಕೋನವು 0°ಯಿಂದ 90°ವರೆಗೆ ಇರುತ್ತದೆ; II - ಪಾದದಲ್ಲಿ 90°ಯಿಂದ 180°ವರೆಗೆ ಇರುತ್ತದೆ; III-ಪಾದದಲ್ಲಿ ಕೋನವು 180°ಯಿಂದ 270°ವರೆಗೆ ಮತ್ತು IV– ಪಾದದಲ್ಲಿ 270°ಯಿಂದ 360°ವರೆಗೆ ಇರುತ್ತದೆ.



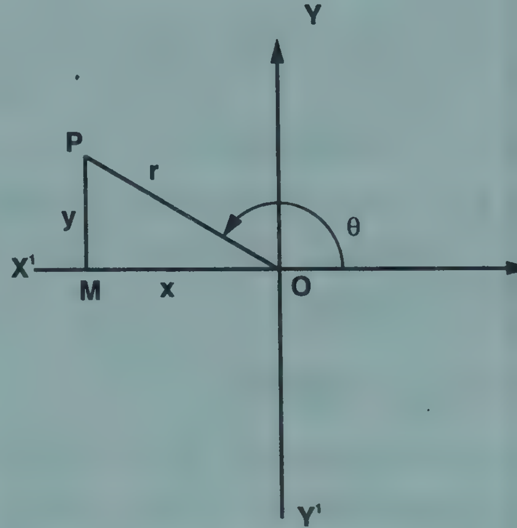
ಚಿತ್ರ 11.6

11.2.2 ತ್ರಿಕೋನಮಿತೀಯ ಪ್ರಮಾಣಗಳು

ಈ ಕೆಳಗೆ ತೋರಿಸಿದಂತೆ ಪರಿಭ್ರಮಿಸುವ OP ಎಂಬ ಸರಳರೇಖೆಯು θ ಕೋನವನ್ನು ರಚಿಸಿ ಯಾವುದೇ ಪಾದದಲ್ಲಿ ನಿಲ್ಲಬಹುದು.

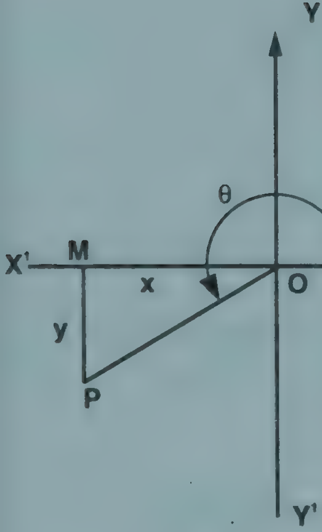


ಚಿತ್ರ 11.7

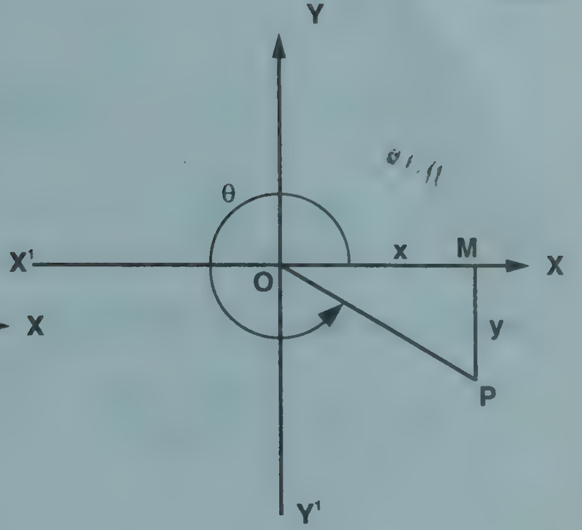


ಚಿತ್ರ 11.8

OPಯು ಪರಿಭ್ರಮಿಸುವ ಸರಳರೇಖೆ. $OP = r$ ಎಂದಿರಲಿ. OPಯು ಸದಾ ಧನಾತ್ಮಕವಾಗಿರುವುದು. Pಯ ನಿರ್ದೇಶಕಗಳು (x, y) ಆಗಿರಲಿ. PMನ್ನು x - ಅಕ್ಷಕ್ಕೆ ಲಂಬವಾಗಿ ಎಳೆಯಿರಿ. ವಿಶೇಷವಾಗಿ I-ಪಾದದಲ್ಲಿ θ $(0 < \theta < 90°)$ ಎಂಬ ಕೋನಕ್ಕೆ PM (y - ನಿರ್ದೇಶಕ) ಎದುರು ಭುಜವೆಂದೂ ಮತ್ತು OM (x - ನಿರ್ದೇಶಕ) ಪಕ್ಕದ ಭುಜವೆಂದೂ ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ. OPಯು ಕರ್ಣವಾಗಿರುತ್ತದೆ.



ಚಿತ್ರ 11.9



ಚಿತ್ರ 11.10

ತ್ರಿಕೋನಮಿತೀಯ ಪ್ರಮಾಣಗಳನ್ನು ಕೆಳಗೆ ತೋರಿಸಿದ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಹೆಸರಿಸುತ್ತೇವೆ. ಇಲ್ಲಿ θ ಕೋನವು ಯಾವುದೇ ಪಾದದಲ್ಲಿರಬಹುದು.

$$\frac{MP}{OP} = \frac{y}{r} = \text{sine } \theta \text{ ಅಥವಾ } \sin\theta$$

$$\frac{OM}{OP} = \frac{x}{r} = \text{cosine } \theta \text{ ಅಥವಾ } \cos\theta$$

$$\frac{MP}{OM} = \frac{y}{x} = \text{tangent } \theta \text{ ಅಥವಾ } \tan\theta$$

$$\frac{OP}{MP} = \frac{r}{y} = \text{cosecant } \theta \text{ ಅಥವಾ } \operatorname{cosec}\theta$$

$$\frac{OP}{OM} = \frac{r}{x} = \text{secant } \theta \text{ ಅಥವಾ } \sec\theta$$

$$\text{ಮತ್ತು } \frac{OM}{MP} = \frac{x}{y} = \text{cotangent } \theta \text{ ಅಥವಾ } \cot\theta$$

ತ್ರಿಕೋನಮಿತೀಯ ಪ್ರಮಾಣಗಳ ವ್ಯಾಖ್ಯೆಯಿಂದಾಗಿ ಈ ಕೆಳಗಿನ ಗುಣಗಳನ್ನು ತಿಳಿಯುತ್ತೇವೆ.

(i) $\sin\theta \operatorname{cosec}\theta = 1$ ಅಥವಾ $\operatorname{cosec}\theta = \frac{1}{\sin\theta}$

(ii) $\cos\theta \sec\theta = 1$ ಅಥವಾ $\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta}$

(iii) $\tan\theta \ \cot\theta = 1$ ಅಥವಾ $\cot\theta = \dfrac{1}{\tan\theta}$

ಮತ್ತು (iv) $\tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$

ವಿಶೇಷವಾಗಿ, θ ಕೋನ I Ë ಪಾದದಲ್ಲಿದ್ದರೆ, ಅಂದರೆ θ ಒಂದು ಲಘುಕೋನವಾಗಿದ್ದರೆ

(i) $\sin\theta = \dfrac{\text{ಎದುರು ಭುಜ}}{\text{ಕರ್ಣ}}$ (ii) $\cos\theta = \dfrac{\text{ಪಕ್ಕದ ಭುಜ}}{\text{ಕರ್ಣ}}$

(iii) $\tan\theta = \dfrac{\text{ಎದುರು ಭುಜ}}{\text{ಪಕ್ಕದ ಭುಜ}}$ (iv) $\cot\theta = \dfrac{\text{ಪಕ್ಕದ ಭುಜ}}{\text{ಎದುರು ಭುಜ}}$

(v) $\sec\theta = \dfrac{\text{ಕರ್ಣ}}{\text{ಪಕ್ಕದ ಭುಜ}}$ (vi) $\operatorname{cosec}\theta = \dfrac{\text{ಕರ್ಣ}}{\text{ಎದುರು ಭುಜ}}$

ಎಂದಾಗುತ್ತದೆ.

ಸೂಚನೆ : (i) $P(x, y)$ ಬಿಂದುವು x - ಅಕ್ಷದಲ್ಲಿದ್ದರೆ, ಆಗ $PM = 0$ ಆಗಿರುತ್ತದೆ; ಅಂದರೆ $y = 0$ ಮತ್ತು $\theta = 0°$. ಆದ್ದರಿಂದ, $\cot\theta$ ಮತ್ತು $\operatorname{cosec}\theta$ ಗಳ ವ್ಯಾಖ್ಯೆಗಳಲ್ಲಿ ಛೇದವು ಶೂನ್ಯವಾಗುವುದರಿಂದ ಈ ಎರಡು ತ್ರಿಕೋನಮಿತೀಯ ಪ್ರಮಾಣಗಳು "ಅವ್ಯಾಖ್ಯಾತ" ವಾಗಿರುತ್ತವೆ.

(ii) ಅಂತೆಯೇ, $P(x, y)$ ಬಿಂದುವು y - ಅಕ್ಷದಲ್ಲಿದ್ದರೆ, ಆಗ $OM = x = 0$ ಆಗಿರುತ್ತದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ $\theta = 90°$ ಆಗಿದ್ದು, $\tan\theta$ ಮತ್ತು $\sec\theta$ ಗಳ ಬೆಲೆಗಳಲ್ಲಿ ಛೇದವು ಶೂನ್ಯವಾಗುತ್ತದೆ. ಹೀಗಾಗಿ, $\tan 90°$ ಮತ್ತು $\sec 90°$ ಅವ್ಯಾಖ್ಯಾತವಾಗಿರುತ್ತವೆ. ಈ ಮೇಲಿನ ಸಂದರ್ಭಗಳಲ್ಲಿ, "ಮಿತಿ"ಯ ಅರ್ಥದಲ್ಲಿ

$$\lim_{\theta \to 0} \cot\theta = \infty, \qquad \lim_{\theta \to 0} \operatorname{cosec}\theta = \infty$$

$$\lim_{\theta \to \pi/2} \tan\theta = \infty, \qquad \lim_{\theta \to \pi/2} \sec\theta = \infty$$

ಎಂದು ಸೂಚಿಸುತ್ತೇವೆ. (ಇಲ್ಲಿ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳಿಗೆ ಗೊಂದಲ ಉಂಟಾಗಬಾರದೆಂಬ ಕಾರಣದಿಂದ "ಎಡಮಿತಿ" ಮತ್ತು "ಬಲಮಿತಿ"ಗಳ ವ್ಯತ್ಯಾಸವನ್ನು ಉದ್ದೇಶಪೂರ್ವಕವಾಗಿಯೇ ಪರಿಗಣಿಸಿಲ್ಲ!)

11.2.3 ಕೆಲವು ನಿತ್ಯ ಸಮೀಕರಣಗಳು

1. $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$

ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಕೋನ OPM (ಚಿತ್ರ 11.7)ನಲ್ಲಿ

$$MP^2 + OM^2 = OP^2 \qquad \ldots (1)$$

(1)ನ್ನು OP^2ನಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದಾಗ

$$\frac{MP^2}{OP^2} + \frac{OM^2}{OP^2} = 1$$

ಅಥವಾ $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1.$

2. $1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta$

(1)ನ್ನು OM^2ನಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದಾಗ

$$\frac{MP^2}{OM^2} + 1 = \frac{OP^2}{OM^2}$$

ಅಥವಾ $\tan^2\theta + 1 = \sec^2\theta$

$\therefore\ 1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta$

3. $1 + \cot^2\theta = \mathrm{cosec}^2\theta$

(1)ನ್ನು MP^2ನಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದಾಗ

$$1 + \frac{OM^2}{MP^2} = \frac{OP^2}{MP^2}$$

ಅಥವಾ $1 + \cot^2\theta = \mathrm{cosec}^2\theta$

ಗಮನಿಸಿ : (i) $\sin^2\theta \equiv (\sin\theta)^2$; (iii) $(\sin\theta)^{-1} \neq \sin^{-1}\theta$

(iii) $\sin^3\theta \equiv (\sin\theta)^3$; (iv) $\sin^{-1}\theta \neq \frac{1}{\sin\theta}$

11.2.4 ತ್ರಿಕೋನಮಿತೀಯ ಪ್ರಮಾಣಗಳ ಚಿಹ್ನೆಗಳು

I - ಪಾದ : ಒಂದನೇ ಪಾದದಲ್ಲಿ (ಚಿತ್ರ 11.7) OM, PM, OP ಅಥವಾ x, y, r ಧನಾತ್ಮಕವಾಗಿವೆ. ಆದ್ದುದರಿಂದ ***ಎಲ್ಲಾ ತ್ರಿಕೋನಮಿತೀಯ ಪ್ರಮಾಣಗಳು ಧನಾತ್ಮಕವಾಗಿವೆ.***

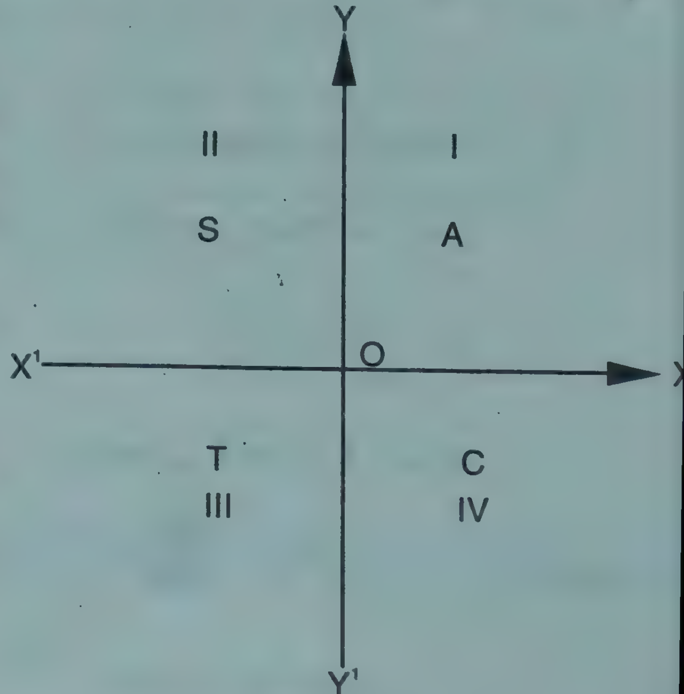
II - ಪಾದ : ಎರಡನೇ ಪಾದದಲ್ಲಿ (ಚಿತ್ರ 11.8) x - ಋಣಾತ್ಮಕವಾಗಿದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ $\cos\theta$, $\tan\theta$, $\cot\theta$, $\sec\theta$ ಋಣಾತ್ಮಕವಾಗಿವೆ. $\sin\theta$ ಮತ್ತು $\operatorname{cosec}\theta$ ಮಾತ್ರ ಧನಾತ್ಮಕವಾಗಿವೆ.

III - ಪಾದ : ಮೂರನೇ ಪಾದದಲ್ಲಿ (ಚಿತ್ರ 11.9) x ಮತ್ತು y ಎರಡೂ ಋಣಾತ್ಮಕವಾಗಿವೆ. ಆದ್ದರಿಂದ $\sin\theta$, $\cos\theta$, $\operatorname{cosec}\theta$, $\sec\theta$ ಋಣಾತ್ಮಕವಾಗಿವೆ. $\tan\theta$ ಮತ್ತು $\cot\theta$ ಧನಾತ್ಮಕವಾಗಿವೆ.

IV - ಪಾದ : ನಾಲ್ಕನೇ ಪಾದದಲ್ಲಿ (ಚಿತ್ರ 11.10) y ಋಣಾತ್ಮಕವಾಗಿದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ $\sin\theta$, $\tan\theta$, $\operatorname{cosec}\theta$, $\cot\theta$ ಋಣಾತ್ಮಕವಾಗಿವೆ ಮತ್ತು $\cos\theta$ ಹಾಗೂ $\sec\theta$ ಧನಾತ್ಮಕವಾಗಿವೆ.

ಸೂಚನೆ : ತ್ರಿಕೋನಮಿತೀಯ ಪ್ರಮಾಣಗಳ ಧನ ಮತ್ತು ಋಣಾತ್ಮಕ ಸ್ವಭಾವಕ್ಕೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದ ಮೇಲಿನ ಫಲಿತಾಂಶಗಳನ್ನು ಈ ಕೆಳಕಂಡ **"ASTC - ನಿಯಮ"** ದ ಸಹಾಯದಿಂದ ಜ್ಞಾಪಕದಲ್ಲಿ ಇಟ್ಟುಕೊಳ್ಳಬಹುದು.

ಮುಖ್ಯ ತ್ರಿಕೋನಮಿತೀಯ ಪ್ರಮಾಣಗಳಾದ $\sin\theta$, $\cos\theta$ ಮತ್ತು $\tan\theta$ಗಳ ಪೈಕಿ I-ಪಾದದಲ್ಲಿ ಎಲ್ಲಾ ಮೂರೂ, II - ಪಾದದಲ್ಲಿ $\sin\theta$ ಮಾತ್ರ, III - ಪಾದದಲ್ಲಿ $\tan\theta$ ಮಾತ್ರ ಹಾಗೂ IV - ಪಾದದಲ್ಲಿ $\cos\theta$ ಮಾತ್ರ ಧನಾತ್ಮಕವಾಗಿರುತ್ತವೆ. ಒಂದೊಂದು ಪಾದದಲ್ಲೂ ಉಳಿದ ಎರಡು ಪ್ರಮಾಣಗಳು ಋಣಾತ್ಮಕವಾಗಿರುತ್ತವೆ. ಉದಾಹರಣೆಗೆ, III - ಪಾದದಲ್ಲಿ ($180° < \theta < 270°$), $\tan\theta$ ಧನಾತ್ಮಕವಾಗಿಯೂ ಮತ್ತು $\sin\theta$, $\cos\theta$ ಋಣಾತ್ಮಕವಾಗಿಯೂ ಇರುತ್ತವೆ.



ಚಿತ್ರ 11.11

ಉದಾಹರಣೆಗಳು

1. $\dfrac{\sin A}{1+\cos A}+\dfrac{1+\cos A}{\sin A}=2\operatorname{cosec} A$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

ಈಗ, $\dfrac{\sin A}{1+\cos A}+\dfrac{(1+\cos A)}{\sin A}$

$$=\frac{\sin^2 A+(1+\cos A)^2}{(1+\cos A)\sin A}$$

$$=\frac{\sin^2 A+(1+\cos^2 A+2\cos A)}{(1+\cos A)\sin A}$$

$$=\frac{\sin^2 A+\cos^2 A+1+2\cos A}{(1+\cos A)\sin A}$$

$$=\frac{1+1+2\cos A}{(1+\cos A)\sin A} \qquad [\because \sin^2 A+\cos^2 A=1]$$

$$=\frac{2(1+\cos A)}{(1+\cos A)\sin A}$$

$$=\frac{2}{\sin A}=2\left(\frac{1}{\sin A}\right)=2\operatorname{cosec} A$$

2. ಈ ನಿತ್ಯ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಸಾಧಿಸಿ :

$\cos^6 A+\sin^6 A=1-\sin^2 A\cos^2 A$

ಈಗ, $\sin^2 A+\cos^2 A=1$ ಎಂದು ತಿಳಿದಿದೆ.

$\therefore\ (\sin^2 A+\cos^2 A)^3=1^3$

$\therefore\ (\sin^2 A)^3+(\cos^2 A)^3+3\sin^2 A\cos^2 A(\sin^2 A+\cos^2 A)=1$

ಅಥವಾ $\sin^6 A+\cos^6 A+3\sin^2 A\cos^2 A=1 \qquad [\because \sin^2 A+\cos^2 A=1]$

ಅಥವಾ $\sin^6 A+\cos^6 A=1-3\sin^2 A\cos^2 A.$

3. $x = r \cos\alpha \cos\beta \cos\gamma$

$y = r \cos\alpha \cos\beta \sin\gamma$

$z = r \cos\alpha \sin\beta$

$t = r \sin\alpha$

ಎಂದಾದರೆ $x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = r^2$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

$$x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = (r^2 \cos^2\alpha \cos^2\beta \cos^2\gamma + r^2 \cos^2\alpha \cos^2\beta \sin^2\gamma)$$

$$+ r^2 \cos^2\alpha \sin^2\beta + r^2 \sin^2\alpha$$

$$= r^2 \cos^2\alpha \cos^2\beta[\cos^2\gamma + \sin^2\gamma] + r^2 \cos^2\alpha \sin^2\beta + r^2 \sin^2\alpha$$

$$= (r^2 \cos^2\alpha \cos^2\beta + r^2 \cos^2\alpha \sin^2\beta) + r^2 \sin^2\alpha$$

$$[\because \cos^2\gamma + \sin^2\gamma = 1]$$

$$= r^2 \cos^2\alpha[\cos^2\beta + \sin^2\beta] + r^2\sin^2\alpha$$

$$= r^2 \cos^2\alpha + r^2 \sin^2\alpha \qquad [\because \cos^2\beta + \sin^2\beta = 1]$$

$$= r^2[\cos^2\alpha + \sin^2\alpha] \qquad [\because \cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1]$$

$$= r^2.$$

4. $\tan^2\theta + \sec\theta = 5$ ಎಂದಾದರೆ $\cos\theta$ದ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

$1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta$ ಎಂದು ನಮಗೆ ತಿಳಿದಿದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ

$\tan^2\theta + \sec\theta = 5$

ಅಂದರೆ, $(\sec^2\theta - 1) + \sec\theta = 5$

ಅಥವಾ $\sec^2\theta + \sec\theta - 6 = 0$

ಈಗ, $\sec\theta = a$ ಎಂದಿರಲಿ. ಆಗ ಮೇಲಿನ ಸಮೀಕರಣವು

$a^2 + a - 6 = 0$

ಅಥವಾ $(a + 3)(a - 2) = 0$

ಎಂದಾಗುತ್ತದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ಮೂಲಗಳು $a=-3$ಅಥವಾ $a=2$ಎಂದು ದೊರೆಯುತ್ತವೆ.

ಅಂದರೆ, $\sec\theta = -3$ ಅಥವಾ $\sec\theta = 2$

ಆದರೆ, $\sec\theta = \dfrac{1}{\cos\theta}$ ಎಂದು ನಮಗೆ ತಿಳಿದಿದೆ.

$\therefore \cos\theta = -\dfrac{1}{3}$ ಅಥವಾ $\cos\theta = \dfrac{1}{2}$.

5. ಎಲ್ಲಾ ತ್ರಿಕೋನಮಿತೀಯ ಪ್ರಮಾಣಗಳನ್ನು $\sin\theta$ದ ಬೆಲೆಯ ಮೂಲಕ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

$\sin\theta = x$ ಎಂದಿರಲಿ.

ಈಗ, $\sin\theta = \dfrac{\text{ಎ. ಭುಜ}}{\text{ಕರ್ಣ}}$ $\quad x = \dfrac{PM}{OP}$ ಅಥವಾ $\dfrac{x}{1} = \dfrac{PM}{OP}$

ಆದ್ದರಿಂದ, $PM = x$ ಮತ್ತು $OP = 1$ ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳೋಣ.

ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಕೋನದಿಂದ $OM = \sqrt{1-x^2}$. ಆದ್ದರಿಂದ

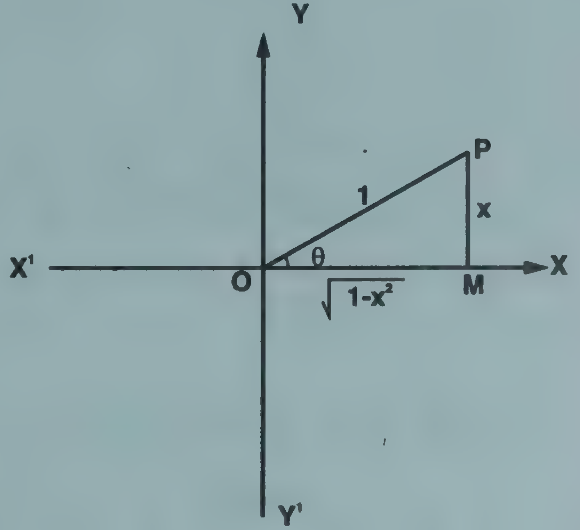
$$\cos\theta = \frac{\text{ಪ. ಭುಜ}}{\text{ಕರ್ಣ}} = \sqrt{1-x^2}$$

$$\tan\theta = \frac{\text{ಎ. ಭುಜ}}{\text{ಪ. ಭುಜ}} = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\operatorname{cosec}\theta = \frac{\text{ಕರ್ಣ}}{\text{ಎ. ಭುಜ}} = \frac{1}{x}$$

$$\sec\theta = \frac{\text{ಕರ್ಣ}}{\text{ಪ. ಭುಜ}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\cot\theta = \frac{\text{ಪ. ಭುಜ}}{\text{ಎ. ಭುಜ}} = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$$



ಚಿತ್ರ 11.12

ಸೂಚನೆ : ಮೇಲಿನ ಪ್ರಮಾಣಗಳು ಧನಾತ್ಮಕ ಅಥವಾ ಋಣಾತ್ಮಕ ಎಂಬುದು θ ಕೋನವು ಯಾವ ಪಾದದಲ್ಲಿರುತ್ತದೆ ಎಂಬುದರ ಮೇಲೆ ಅವಲಂಬಿಸಿರುತ್ತದೆ. I-ಪಾದದಲ್ಲಾದರೆ, ಮೇಲಿನ ಎಲ್ಲಾ ಪ್ರಮಾಣಗಳು ಧನಾತ್ಮಕವಾಗಿರುತ್ತವೆ.

6. $\tan\theta = \dfrac{2x(x+1)}{2x+1}$ ಎಂದಾದರೆ $\sin\theta$ ಮತ್ತು $\cos\theta$ಗಳ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

$$\tan\theta = \frac{\text{ಎ. ಭುಜ}}{\text{ಪ. ಭುಜ}} = \frac{2x(x+1)}{2x+1}$$

ಆದ್ದರಿಂದ, ಎ. ಭುಜ $= 2x(x+1)$ ಮತ್ತು ಪ. ಭುಜ $= 2x+1$ ಆಗಿರಲಿ.

$$\therefore \text{ ಕರ್ಣ} = \sqrt{(\text{ಎ. ಭುಜ})^2 + (\text{ಪ. ಭುಜ})^2}$$

$$= \sqrt{[2x(x+1)]^2 + (2x+1)^2}$$

$$= \sqrt{4x^2(x+1)^2 + (2x+1)^2}$$

$$= \sqrt{4x^2(x^2+1+2x) + 4x^2+1+4x}$$

$$= \sqrt{4x^4 + 4x^2 + 8x^3 + 4x^2 + 1 + 4x}$$

$$= \sqrt{4x^4 + 4x^2 + 1 + 8x^3 + 4x + 4x^2}$$

$$= \sqrt{(2x^2+2x+1)^2}$$

ಅಂದರೆ, ಕರ್ಣ $= 2x^2 + 2x + 1$

$$\therefore \sin\theta = \frac{\text{ಎ. ಭುಜ}}{\text{ಕರ್ಣ}} = \frac{2x(x+1)}{2x^2+2x+1}$$

$$\cos\theta = \frac{\text{ಪ. ಭುಜ}}{\text{ಕರ್ಣ}} = \frac{2x+1}{2x^2+2x+1}$$

7. ಈ ಕೆಳಗಿನ ಸಮೀಕರಣಗಳಿಂದ θವನ್ನು ವಿಸರ್ಜಿಸಿರಿ.

$$\tan\theta + \sin\theta = m \quad \text{... (1)}$$

$$\tan\theta - \sin\theta = n \quad \text{... (2)}$$

ಸಮೀಕರಣಗಳಾದ (1) ಮತ್ತು (2) ಇವುಗಳನ್ನು ಕೂಡಿಸುವುದರಿಂದ

$$2\tan\theta = m + n$$

ಅಥವಾ $\tan\theta = \dfrac{m+n}{2}$

ಎಂದು ದೊರೆಯುತ್ತದೆ. ಅಂತೆಯೇ, (1)ರಲ್ಲಿ (2)ನ್ನು ಕಳೆಯುವುದರಿಂದ

$$\sin\theta = \frac{m-n}{2} \quad \ldots (3)$$

ಎಂದು ದೊರೆಯುತ್ತದೆ.

$$\therefore \cos\theta = \frac{\sin\theta}{\tan\theta} = \frac{m-n}{m+n} \quad \ldots (4)$$

ಈಗ, $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ ಸಮೀಕರಣದಲ್ಲಿ (3) ಮತ್ತು (4) ಬಳಸಿದಾಗ

$$\left(\frac{m-n}{2}\right)^2 + \left(\frac{m-n}{m+n}\right)^2 = 1$$

ಅಥವಾ $(m-n)^2 (m+n)^2 + 4(m-n)^2 = 4(m+n)^2$

ಅಥವಾ $(m^2 - n^2)^2 + 4(m^2 + n^2 - 2mn) = 4(m^2 + n^2 + 2mn)$

ಅಂದರೆ, $m^2 - n^2 = 16mn$

ಎಂಬ θದಿಂದ ಮುಕ್ತವಾದ ಸಮೀಕರಣವು ಉಂಟಾಗುತ್ತದೆ.

8. $\cot\theta = \dfrac{p}{q}$ ಎಂದಿದ್ದರೆ

$$\frac{p\cos\theta + q\sin\theta}{p\cos\theta - q\sin\theta}$$

ಎಂಬುದರ ಬೆಲೆಯನ್ನು p ಮತ್ತು q ಪದಗಳಲ್ಲಿ ಪಡೆಯಿರಿ.

$$\frac{p\cos\theta + q\sin\theta}{p\cos\theta - q\sin\theta}$$

$$= \frac{\dfrac{p\cos\theta}{\sin\theta} + q}{\dfrac{p\cos\theta}{\sin\theta} - q}$$

$$= \frac{p\cot\theta + q}{p\cot\theta - q} = \frac{p.\dfrac{p}{q} + q}{p.\dfrac{p}{q} - q}$$

$$= \frac{p^2 + q^2}{p^2 - q^2}.$$

ಅಭ್ಯಾಸ - 11.2

ಈ ಕೆಳಗಿನ ನಿತ್ಯ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಸಾಧಿಸಿ :

1. $(\sin A + \cos A)(1 - \sin A \cos A) = \sin^3 A + \cos^3 A$

2. $\dfrac{\sqrt{1 - \sin A}}{\sqrt{1 + \sin A}} = \sec A - \tan A$

3. $\dfrac{1}{\cos A + \tan A} = \sin A \cos A$

4. $\dfrac{1 - \tan A}{1 + \tan A} = \dfrac{\cot A - 1}{\cot A + 1}$

5. $\dfrac{1}{\operatorname{cosec} x - \cot x} - \dfrac{1}{\sin x} = \dfrac{1}{\sin x} - \dfrac{1}{\operatorname{cosec} x + \cot x}$

6. $\sec^6 A - \tan^6 A = 1 + 3\sec^2 A \tan^2 A$

7. $(1 + \cot A + \tan A)(\sin A - \cos A) = \dfrac{\sec A}{\operatorname{cosec}^2 A} - \dfrac{\operatorname{cosec} A}{\sec^2 A}$

8. $\dfrac{\cot\theta \cos\theta}{\cot\theta + \cos\theta} = \dfrac{\cot\theta - \cos\theta}{\cot\theta \cos\theta}$

9. $\cot^4 A + \cot^2 A = \operatorname{cosec}^4 A - \operatorname{cosec}^2 A$

10. $\dfrac{\tan A}{1 - \cot A} + \dfrac{\cot A}{1 - \tan A} = \sec A \operatorname{cosec} A + 1$

11. $\dfrac{\tan x + \sec x - 1}{\tan x - \sec x + 1} = \dfrac{1 + \sin x}{\cos x}$

12. $(1 + \cot A - \operatorname{cosec} A)(1 + \tan A + \sec A) = 2$

13. $2\sec^2 A - \sec^4 A - 2\operatorname{cosec}^2 A + \operatorname{cosec}^4 A = \cot^4 A - \tan^4 A$

14. $\dfrac{(\sec A - 1)\cot^2 A}{1 + \sin A} + \dfrac{(\sin A - 1)\sec^2 A}{1 + \sec A} = 0$

15. $\cos^2 A\,(3 - 4\cos^2 A)^2 + \sin^2 A\,(3 - 4\sin^2 A)^2 = 1$

16. $\sin^2 x \cos^2 y - \cos^2 x \sin^2 y = \sin^2 x - \sin^2 y$

17. $x = \cot\theta + \cos\theta,\ \ y = \cot\theta - \cos\theta$
ಎಂದಾದರೆ $x^2 - y^2 = 4\sqrt{xy}$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ

18. $x = \sec\theta + \tan\theta$ ಎಂದಾದರೆ $\sin\theta = \dfrac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

19. $\tan\theta = x$ ಎಂದಾದರೆ ಉಳಿದ ತ್ರಿಕೋನಮಿತೀಯ ಪ್ರಮಾಣಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

20. $\sin A = \dfrac{2x}{3}$ ಎಂದಾದರೆ ಉಳಿದ ತ್ರಿಕೋನಮಿತೀಯ ಪ್ರಮಾಣಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

21. $\tan\theta = \dfrac{1}{\sqrt{7}}$ ಆದರೆ, $\dfrac{\operatorname{cosec}^2\theta - \sec^2\theta}{\operatorname{cosec}^2\theta + \sec^2\theta}$ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

22. $3\sec^4\theta + 8 = 10\sec^2\theta$ ಆದರೆ $\tan\theta$ದ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

23. $a\sec\theta - c\tan\theta = d,\ \ b\sec\theta + d\tan\theta = c$
ಆದರೆ $a^2 + b^2 = c^2 + d^2$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

24. $\sec^2\theta + \cos^2\theta$ ದ ಬೆಲೆಯು 2ಕ್ಕಿಂತ ಕಡಿಮೆ ಇರಲು ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

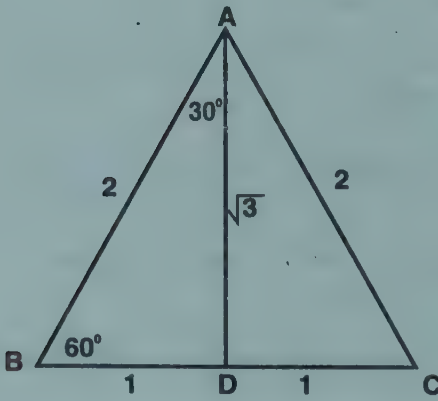
25. $x = a\cos^3 t$ ಆದರೆ $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

11.3 ಕೆಲವು ಮುಖ್ಯ ಕೋನಗಳ ತ್ರಿಕೋನಮಿತೀಯ ಪ್ರಮಾಣಗಳು

ನಾವೀಗ 0°, 30°, 45°, 60°, 90° ಇವುಗಳ ತ್ರಿಕೋನಮಿತೀಯ ಪ್ರಮಾಣಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯೋಣ.

(i) sin 30°, cos 30°, tan 30° ಮುಂತಾದುವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವುದು

ಒಂದು ಸಮಭುಜ ತ್ರಿಕೋನವನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿ. ಅದರ ಎಲ್ಲಾ ಭುಜಗಳು 2 ಮೂಲ ಮಾನಗಳಾಗಿರಲಿ (ಚಿತ್ರ 11.13) ಅಂದರೆ,



ಚಿತ್ರ 11.13

$AB = BC = AC = 2$

AD ಯು BC ಗೆ ಲಂಬವಾಗಿರಲಿ,

D ಯು BC ಯ ಮಧ್ಯಬಿಂದುವಾಗಿರುವುದರಿಂದ

$BD = DC = 1$. ABD ತ್ರಿಕೋನದಲ್ಲಿ $\angle BAD = 30°$, $\angle ADB = 90°$ ಹಾಗೂ

$$AD^2 = AB^2 - BD^2$$
$$= 4 - 1$$
$$= 3$$

ಅಥವಾ $AD = \sqrt{3}$

ಆದ್ದರಿಂದ, ADB ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಕೋನದಲ್ಲಿ

$$\sin 30° = \frac{1}{2} \qquad \therefore \ \operatorname{cosec} 30° = 2$$

$$\cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \sec 30° = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$\tan 30° = \frac{1}{\sqrt{3}} \qquad \cot 30° = \sqrt{3}$$

(ii) ADB **ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಕೋನದಲ್ಲಿ** $\angle ABD = 60°$. **ಆದ್ದರಿಂದ**

$$\sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \therefore \ \operatorname{cosec} 60° = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$\cos 60° = \frac{1}{2} \qquad \sec 60° = 2$$

$$\tan 60^\circ = \sqrt{3} \qquad \cot 60^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

(iii) $\sin 45^\circ$, $\cos 45^\circ$, $\tan 45^\circ$ ಮುಂತಾದವುಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವುದು

ಒಂದು ಸಮದ್ವಿಭುಜ ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಕೋನ ABC ಯನ್ನು (ಚಿತ್ರ 11.14) ಪರಿಗಣಿಸಿ. $AB = BC = 1$ ಆಗಿರಲಿ.

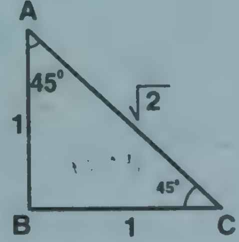
$AC^2 = AB^2 + BC^2 = 2$

$\therefore \angle A = \angle C = 45^\circ$ ಮತ್ತು $AC = \sqrt{2}$ ಆದ್ದರಿಂದ

$\sin 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}} \qquad \therefore \operatorname{cosec} 45^\circ = \sqrt{2}$

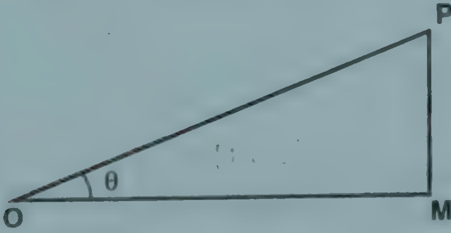
$\cos 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}} \qquad \sec 45^\circ = \sqrt{2}$

$\tan 45^\circ = \frac{1}{1} = 1 \qquad \cot 45^\circ = 1$



ಚಿತ್ರ 11.14

(iv) $\sin 0^\circ$, $\cos 0^\circ$, $\tan 0^\circ$ ಮುಂತಾದುವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವುದು.



ಚಿತ್ರ 11.15

$\angle MOP = 0^\circ$ ಆದಾಗ P ಯು M ನಲ್ಲಿ ಐಕ್ಯವಾಗುವುದು.

OP ಯು OM ನಲ್ಲಿ ಒಂದಾಗುವುದು. (ಚಿತ್ರ 11.15).

ಆದ್ದರಿಂದ, $PM = 0$ ಮತ್ತು $OM = OP$ ಆಗುವುದು. ಆದ್ದರಿಂದ

$$\sin 0^\circ = \frac{PM}{OP} = \frac{0}{OP} = 0$$

$$\therefore \operatorname{cosec} 0^\circ = \to\infty$$

$$\cos 0^\circ = \frac{OM}{OP} = \frac{OP}{OP} = 1 \qquad \sec 0^\circ = \frac{1}{1} = 1$$

$$\tan 0^\circ = \frac{PM}{OM} = \frac{0}{OP} = 0 \qquad \cot 0^\circ = \to\infty$$

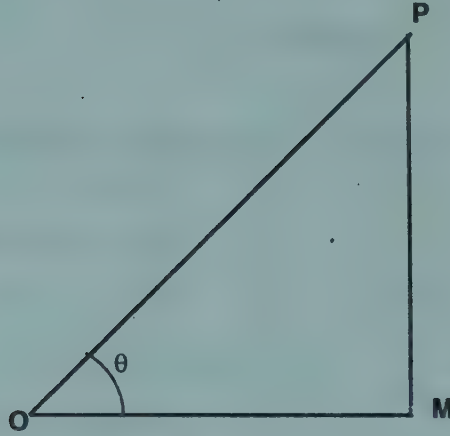
(v) $\sin 90°$, $\cos 90°$, $\tan 90°$ ಮುಂತಾದುವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವುದು.

ತ್ರಿಕೋನ OMP ಯಲ್ಲಿ $\angle MOP = \theta$ ಆಗಿರಲಿ.
$\angle MOP = 90°$ ಆದಾಗ OP ಯು PM ನಲ್ಲಿ ಐಕ್ಯವಾಗುವುದು. ಆಗ, $OM = 0$ ಆಗುವುದು ಮತ್ತು $OP = PM$. ಆದ್ದರಿಂದ,

$$\sin 90° = \frac{PM}{OP} = \frac{OP}{OP} = 1 \quad \therefore \ \text{cosec } 90° = 1$$

$$\cos 90° = \frac{OM}{OP} = \frac{0}{OP} = 0 \quad \therefore \ \sec 90° \to \infty$$

$$\tan 90° = \frac{PM}{OM} = \to \infty \quad \therefore \ \cot 90° = 0$$



ಚಿತ್ರ 11.16

ಮುಖ್ಯ ಕೋನಗಳ ತ್ರಿಕೋನಮಿತೀಯ ಪ್ರಮಾಣಗಳ ಕೋಷ್ಟಕ

θ	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$
$\sin\theta$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos\theta$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan\theta$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	∞

ಚಿತ್ರ 11.17

ಉದಾಹರಣೆಗಳು

1. $16 \sin^3 30° + 8 \cos^3 60° = 3$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

ಸಮೀಕರಣದ ಎಡಭಾಗ

$$\equiv 16\left(\frac{1}{2}\right)^3 + 8\left(\frac{1}{2}\right)^3$$

$$= \frac{16}{8} + \frac{8}{8}$$

$$= 2 + 1 = 3 \equiv \text{ಬಲಭಾಗ}$$

2. $3 \tan^2 30° + 3 \tan^2 45° + 3 \tan^2 60° - 13 = 0$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

ಸಮೀಕರಣದ ಎಡಭಾಗ

$$\equiv 3\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 + 3(1)^2 + 3(\sqrt{3})^2 - 13$$

$$= 3\left(\frac{1}{3}\right) + 3 + 3(3) - 13$$

$$= 1 + 3 + 9 - 13$$

$$= 13 - 13 = 0 \equiv \text{ಬಲಭಾಗ}$$

3. $\tan^2 45° - \cos^2 60° - x \sin 45° \cos 60° = 0$ ಆದರೆ x ನ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಸಮೀಕರಣ :

$$(1)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 - x \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{2} = 0$$

ಅಥವಾ $1 - \frac{1}{4} - \frac{x}{2\sqrt{2}} = 0$

ಅಥವಾ $\frac{3}{4} - \frac{x}{2\sqrt{2}} = 0$

ಅಥವಾ $x = \frac{\sqrt{3}}{2}.$

ಅಭ್ಯಾಸ - 11.3

1. (i) $4\cot^2\frac{\pi}{4} - \sec^2\frac{\pi}{3} + \sin^2\frac{\pi}{6}$ ನ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

   (ii) $\tan^2 30° + \tan^2 45° + \tan^2 60° = 4\frac{1}{3}$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

   (iii) $4\cos^3\frac{\pi}{6} - 3\cos\frac{\pi}{6}$ ನ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

   (iv) $\text{cosec}^2 45°\ \sec^2 30°\ \sin^2 90°\ \cos 60°$ನ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

II ಈ ಕೆಳಗಿನ ಸಮೀಕರಣದಿಂದ x ನ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ :

   (i) $x^2(2\tan^2 60° - \cos 90°) = 7\,\text{cosec}\,30° - (4\sec^2 45° + 9)x$

   (ii) $(3\,\text{cosec}^2 60° + 2\cot 45°)x^2 - (4\tan^2 60°)\,x = 5\cos 90°$

   (iii) $32\cos^2 45° + x\cos 60°\tan^2 45 - 16\cos^4 60° = 7$

   (iv) $\cos\frac{\pi}{3}\cot\frac{\pi}{6} = \dfrac{\tan 45°\ \cot 30°\cos 0°}{x\sec\frac{\pi}{3}\ \sin 90°}$

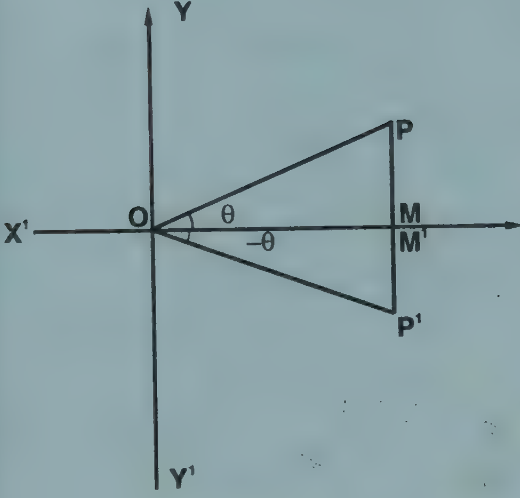
   (v) $x^2\sin^2 45°\cos 0° - 2x\sec 60° + 8\sin 30° + \cos 90° = 0$

11.4.1 ಸಂಬಂಧಿತ ಕೋನಗಳು

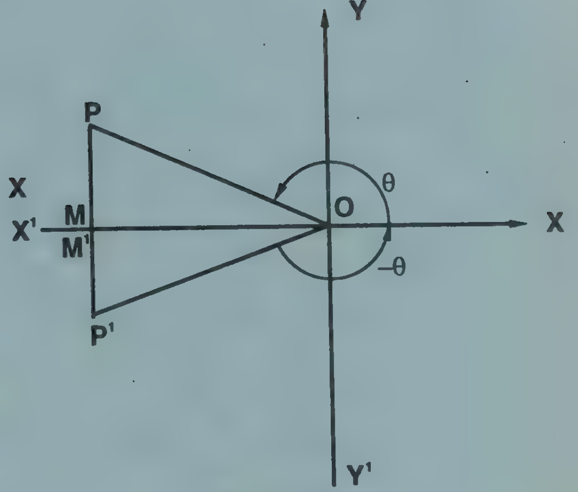
θ ಎಂಬ ಕೋನಕ್ಕೆ $-\theta$, $\frac{\pi}{2} \pm \theta$, $\pi \pm \theta$ ಮತ್ತು $2\pi \pm \theta$ ಇವುಗಳು ಸಂಬಂಧಿತ ಕೋನಗಳಾಗಿವೆ. ಈ ಸಂಬಂಧಿತ ಕೋನಗಳ ತ್ರಿಕೋನಮಿತೀಯ ಪ್ರಮಾಣಗಳನ್ನು θ ಕೋನದ ತ್ರಿಕೋನಮಿತೀಯ ಪ್ರಮಾಣಗಳನ್ನು ಬಳಸಿಕೊಂಡು ಬರೆಯುವುದು ಹೇಗೆಂದು ತಿಳಿಯೋಣ. ಇಲ್ಲಿ ಪರಿಭ್ರಮಣ ರೇಖೆ OPಯು θ ಕೋನವನ್ನೂ OP^1ಯು θ ಎಂಬ ಕೋನಕ್ಕೆ $-\theta$, $\frac{\pi}{2} \pm \theta$, $\pi \pm \theta$ ಕೋನವನ್ನು ರಚಿಸುವುದು. ಆಗ $OP = OP^1$

(i) $(-\theta)$ ದ ತ್ರಿಕೋನ ಮಿತೀಯ ಪ್ರಮಾಣಗಳು

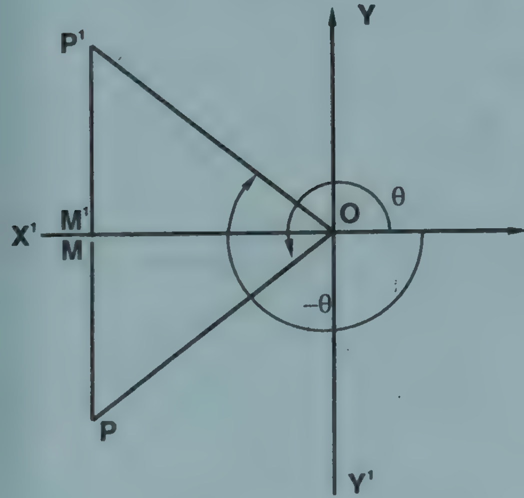
ಚಿತ್ರ (11.18 - 11.21)ಗಳಲ್ಲಿ θವು ಕ್ರಮವಾಗಿ ಒಂದನೇ, ಎರಡನೇ, ಮೂರನೇ ಮತ್ತು ನಾಲ್ಕನೇ ಪಾದದಲ್ಲಿ ಇದೆ.



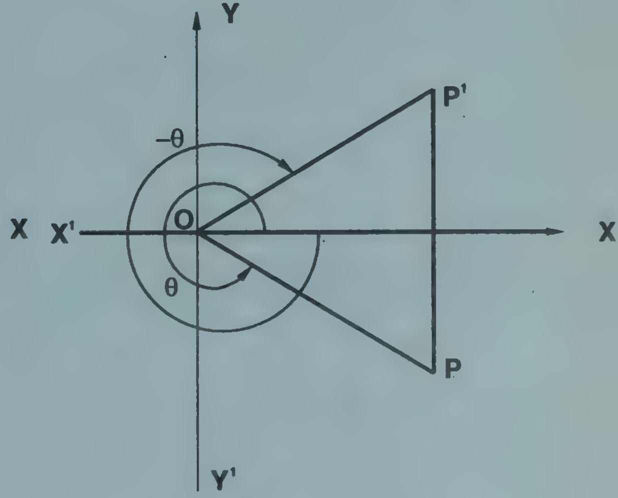
ಚಿತ್ರ 11.18



ಚಿತ್ರ 11.19



ಚಿತ್ರ 11.20



ಚಿತ್ರ 11.21

ಈ ಎಲ್ಲಾ ಚಿತ್ರಗಳಲ್ಲಿ ತ್ರಿಕೋನಗಳಾದ OMP ಮತ್ತು $OM^1 P^1$ಗಳು ಸರ್ವಸಮವಾಗಿರುವುದರಿಂದ M ಮತ್ತು M^1 ಗಳು ಐಕ್ಯವಾಗುವುವು.

$$\therefore MP = -M^1 P^1, \quad OM = O M^1 \quad \text{ಮತ್ತು} \quad OP = O P^1$$

$$X\hat{O}P = M\hat{O}P = \theta$$

$$X\hat{O}P^1 = M^1\hat{O}P^1 = -\theta$$

ಆಗಿವೆ.

$$\therefore \sin X\hat{O}P^1 = \sin(-\theta) = \frac{P^1M^1}{OP^1} = -\frac{PM}{OP} = -\sin\theta$$

[ಸಮೀಕರಣ (1) ರಿಂದ]

ಹಾಗೆಯೇ, $\cos(-\theta) = \dfrac{OM^1}{OP^1} = \dfrac{OM}{OP} = \cos\theta$

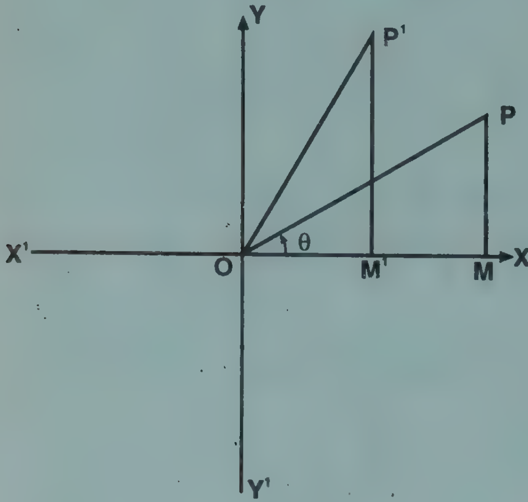
ಮತ್ತು $\tan(-\theta) = \dfrac{P^1M^1}{OM^1} = \dfrac{-PM}{OM} = -\tan\theta$

$\therefore \operatorname{cosec}(-\theta) = -\operatorname{cosec}\theta$

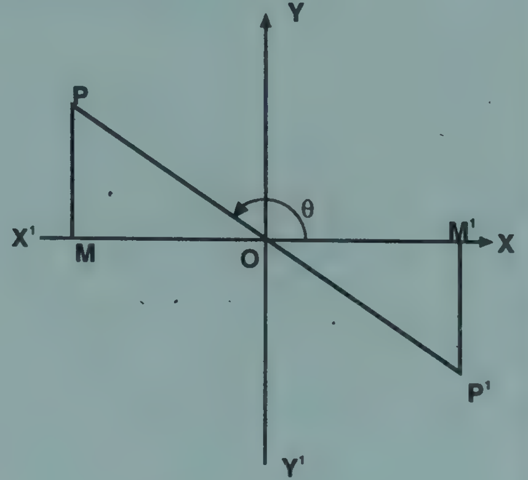
$\sec(-\theta) = \sec\theta$

$\tan(-\theta) = -\tan\theta$

(ii) $\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$ದ ತ್ರಿಕೋನಮಿತೀಯ ಪ್ರಮಾಣಗಳು.



ಚಿತ್ರ 11.22

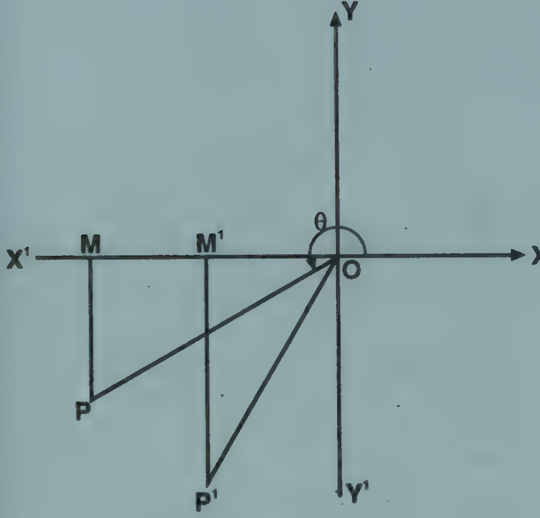


ಚಿತ್ರ 11.23

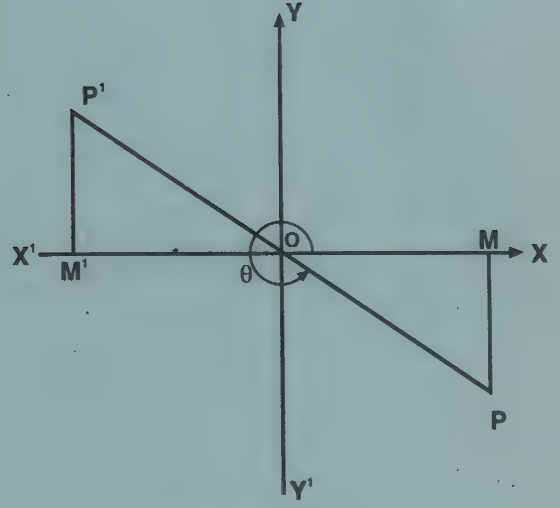
ಮೇಲಿನ ಎಲ್ಲಾ ಚಿತ್ರಗಳಲ್ಲಿ (11.22–11.25), $\angle XOP = \theta$, $\angle XOP^1 = \frac{\pi}{2} - \theta$ ಆಗಿರಲಿ.

ಆಗ, $\angle OMP = \angle OM^1P^1 = 90°$

$\angle POM = \angle OP^1M^1 = \theta$



ಚಿತ್ರ 11.24



ಚಿತ್ರ 11.25

ಮತ್ತು ಕರ್ಣಗಳು $OP = OP^1$. ಆದ್ದರಿಂದ

$\Delta^{le}\ OMP$ ಮತ್ತು $\Delta^{le} OM^1P^1$ಗಳು ಸರ್ವಸಮ ಆಗಿವೆ.

$\therefore\ OM = M^1P^1,\ MP = OM^1$ ಮತ್ತು $OP = OP^1$ ... (1)

ಈಗ, $\sin \angle XOP^1 = \sin (90^\circ - \theta) = \dfrac{P^1M^1}{OP^1} = \dfrac{OM}{OP}$ [ಸಮೀಕರಣ (1) ರಿಂದ]

ಆದ್ದರಿಂದ, $\sin\left(\dfrac{\pi}{2} - \theta\right) = \sin\ (90^\circ - \theta) = \cos\theta$

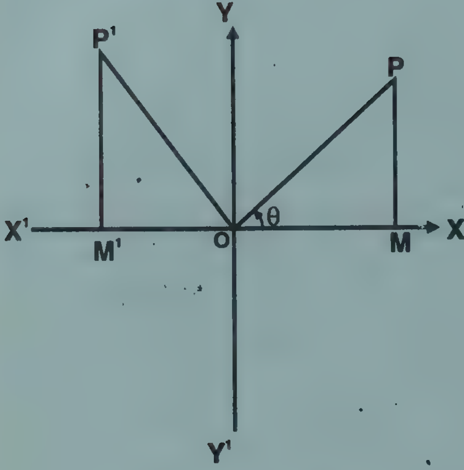
ಅಂತೆಯೇ, $\cos\left(\dfrac{\pi}{2} - \theta\right) = \cos\ (90^\circ - \theta) = \dfrac{OM^1}{OP^1} = \dfrac{PM}{OP} = \sin\theta$

ಮತ್ತು, $\tan\left(\dfrac{\pi}{2} - \theta\right) = \tan\ (90^\circ - \theta) = \dfrac{P^1M^1}{OM^1} = \dfrac{OM}{PM} = \cot\theta$

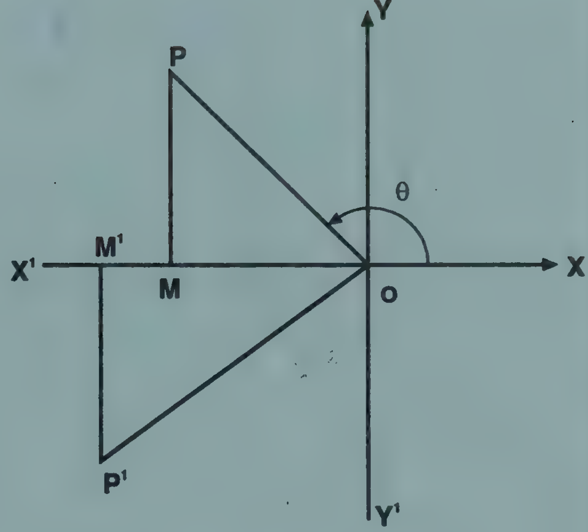
ಆದ್ದರಿಂದ

$\operatorname{cosec}\ (90^\circ - \theta) = \sec\theta$, $\sec\ (90^\circ - \theta) = \operatorname{cosec}\theta$ ಮತ್ತು

$\cot\ (90^\circ - \theta) = \tan\theta$.



ಚಿತ್ರ 11.26



ಚಿತ್ರ 11.27

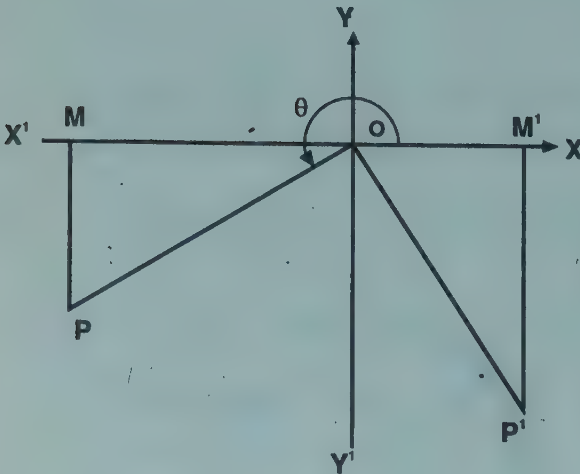
(iii) $\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right)$ದ ತ್ರಿಕೋನಮಿತೀಯ ಪ್ರಮಾಣಗಳು

ಚಿತ್ರಗಳಲ್ಲಿ (11.26 - 11.29)

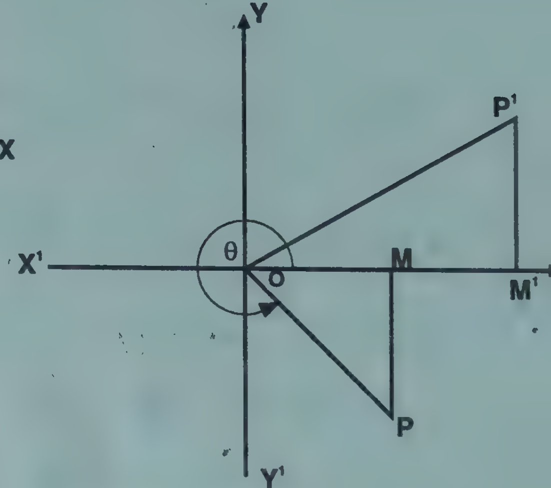
$\angle XOP = \theta$ ಮತ್ತು $\angle XOP^1 = \frac{\pi}{2} + \theta$ ಆಗಿರಲಿ.

ಎಲ್ಲಾ ಚಿತ್ರಗಳಲ್ಲೂ

$\angle OMP = \angle OM^1P^1 = 90°$



ಚಿತ್ರ 11.28



ಚಿತ್ರ 11.29

$\angle POM = \angle OP^1M^1 = \theta$

$OP = OP^1$

$\therefore\ \Delta^{le}\ OMP \equiv \Delta^{le}\ OM^1P^1$

$\therefore\ OM = M^1P^1, \quad MP = -OM^1, \quad OP = OP^1 \quad .... (1)$

$\therefore\ \sin \angle MOP^1 = \sin(90^\circ + \theta) = \dfrac{P^1M^1}{OP^1} = \dfrac{OM}{OP}$ [ಸಮೀಕರಣ (1) ರಿಂದ]

ಅಂದರೆ, $\sin\left(\dfrac{\pi}{2} + \theta\right) = \sin(90^\circ + \theta) = \cos\theta$

ಅಂತೆಯೇ, $\cos\left(\dfrac{\pi}{2} + \theta\right) = \cos(90^\circ + \theta) = \dfrac{OM^1}{OP^1} = \dfrac{-MP}{OP} = -\sin\theta$

ಮತ್ತು $\tan\left(\dfrac{\pi}{2} + \theta\right) = \tan(90^\circ + \theta) = \dfrac{P^1M^1}{OM^1} = \dfrac{OM}{-MP} = \cot\theta$

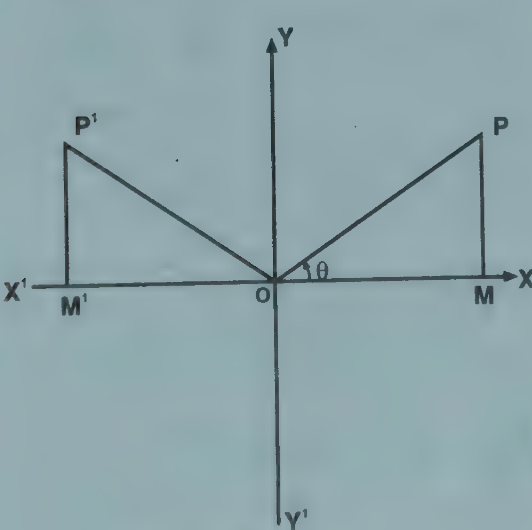
ಆದ್ದರಿಂದ

$\operatorname{cosec}(90^\circ + \theta) = \sec\theta, \quad \sec(90^\circ + \theta) = -\operatorname{cosec}\theta$

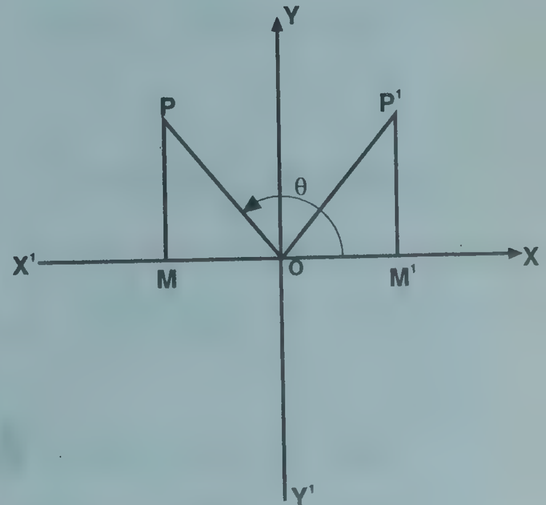
ಮತ್ತು $\cot(90^\circ + \theta) = -\tan\theta.$

(iv) $(\pi - \theta)$ದ ತ್ರಿಕೋನ ಮಿತೀಯ ಪ್ರಮಾಣಗಳು.

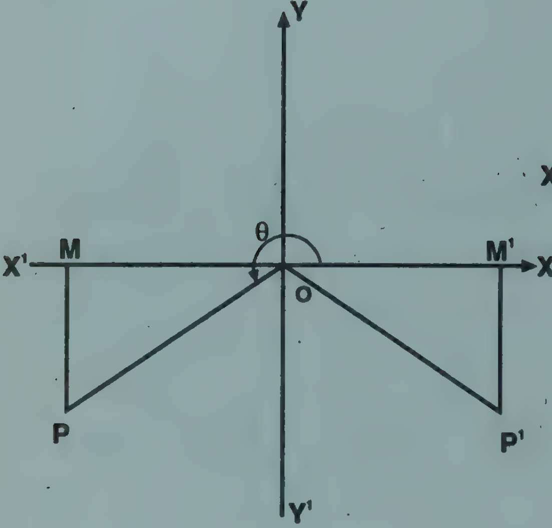
ಎಲ್ಲಾ ಚಿತ್ರಗಳಲ್ಲಿ (11.30 - 11.33)



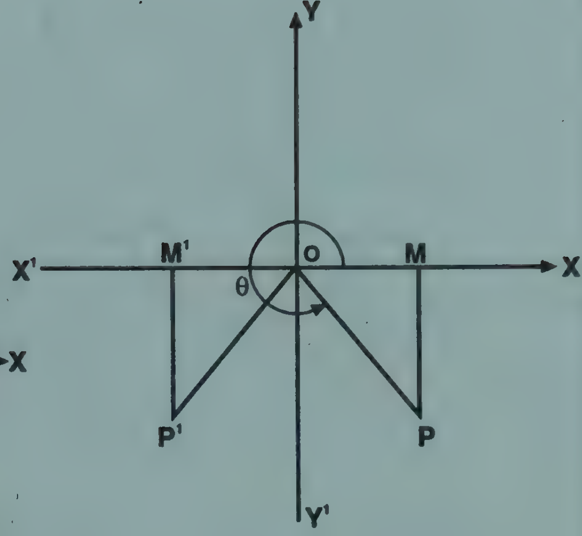
ಚಿತ್ರ 11.30



ಚಿತ್ರ 11.31



ಚಿತ್ರ 11.32



ಚಿತ್ರ 11.33

$\angle XOP = \theta$ ಮತ್ತು $\angle XOP^1 = \pi - \theta$

ಹಾಗೂ $\angle MOP = \angle M^1OP^1$, $\angle PMO = \angle P^1M^1O = 90°$, $OP = OP^1$

$\therefore\ \Delta^{le}\, OMP \cong \Delta^{le}\, OM^1P^1$

$\therefore\ OM = -\,OM^1, \quad MP = M^1P^1, \quad OP = OP^1$ .... (1)

$$\therefore\ \sin(\pi - \theta) = \sin(180° - \theta) = \sin \angle MOP^1 = \frac{M^1P^1}{OP} = \frac{MP}{OP}$$

[(1) ರಿಂದ]

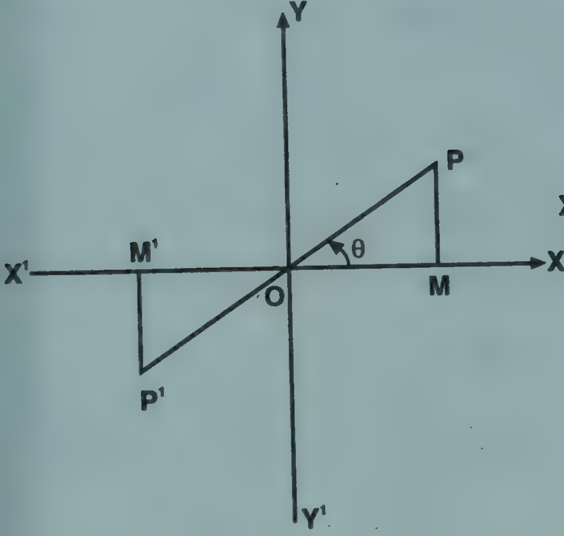
$$\cos(\pi - \theta) = \cos(180° - \theta) = \frac{OM^1}{OP^1} = \frac{-OM}{OP} = -\cos\theta$$

$$\tan(\pi - \theta) = \tan(180° - \theta) = \frac{M^1P^1}{OM^1} = \frac{MP}{-OM} = -\tan\theta$$

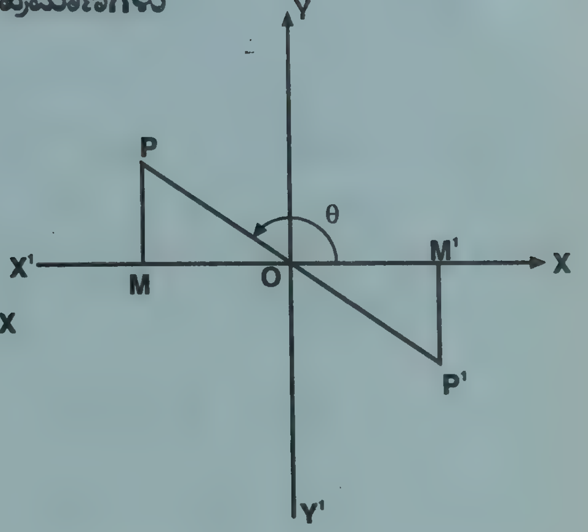
$\therefore\ \text{cosec}(\pi - \theta) = \text{cosec}\,\theta, \ \sec(\pi - \theta) = -\sec\theta$

ಮತ್ತು $\cot(\pi - \theta) = -\cot\theta$

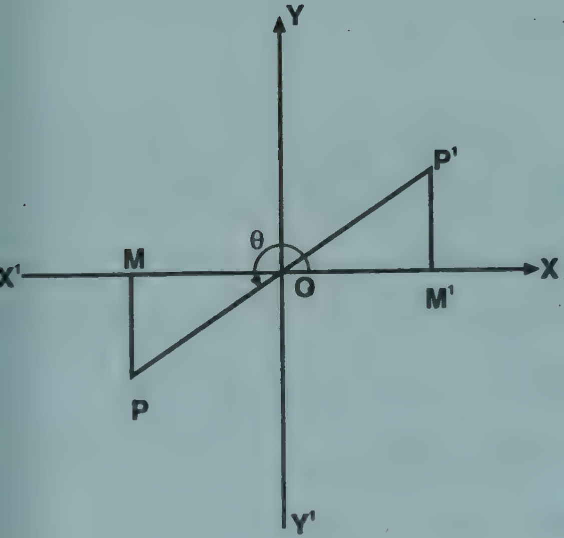
(V) $\pi + \theta$ ದ ತ್ರಿಕೋನಮಿತೀಯ ಪ್ರಮಾಣಗಳು



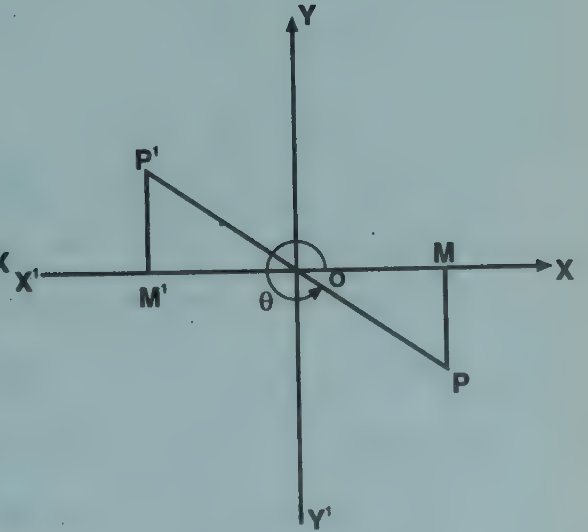
ಚಿತ್ರ 11.34



ಚಿತ್ರ 11.35



ಚಿತ್ರ 11.36



ಚಿತ್ರ 11.37

ಮೇಲಿನ ಚಿತ್ರಗಳಲ್ಲಿ (11.34 - 11.37)

$\angle XOP = \theta$ ಮತ್ತು $\angle XOP^1 = 180° + \theta$ ಆಗಿರಲಿ.

ಎಲ್ಲಾ ಚಿತ್ರಗಳಲ್ಲಿ

$\angle OM^1 P^1 = \angle OMP = 90°$

$\angle M^1OP^1 = \angle MOP = \theta$

$OP^1 = OP$

$\therefore \Delta^{le}\, OM^1P^1 \equiv \Delta^{le}\, OMP$

$\therefore \; OM^1 = -OM, \qquad P^1M^1 = -PM \qquad OP = OP^1 \qquad ...(1)$

$$\therefore \; \sin \angle XOP^1 = \sin(180° + \theta) = \frac{P^1M^1}{OP^1} = \frac{-PM}{OP}$$

[(1) ರಿಂದ]

ಅಂದರೆ, $\sin(\pi + \theta) = \sin(180° + \theta) = -\sin\theta$

ಅಂತೆಯೇ, $\cos(\pi + \theta) = \cos(180° + \theta) = \dfrac{OM^1}{OP^1} = \dfrac{-OM}{OP} = -\cos\theta$

ಮತ್ತು $\tan(\pi + \theta) = \tan(180° + \theta) = \dfrac{P^1M^1}{OM^1} = \dfrac{-PM}{-OM} = \tan\theta$

ಆದ್ದರಿಂದ, $\operatorname{cosec}(\pi + \theta) = -\operatorname{cosec}\theta$, $\sec(\pi + \theta) = -\sec\theta$ ಮತ್ತು $\cot(\pi + \theta) = \cot\theta$.

ಗಮನಿಸಿ :

I $2\pi \pm \theta$ ಕೋನಗಳ ಅಥವಾ $2n\pi \pm \theta$ (ಧನ ಅಥವಾ ಋಣ ಪೂರ್ಣಾಂಕ) *ಕೋನಗಳ ತ್ರಿಕೋನಮಿತೀಯ ಪ್ರಮಾಣಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ* $\pm\theta$ *ಕೋನಗಳ ತ್ರಿಕೋನಮಿತೀಯ ಪ್ರಮಾಣಗಳಿಗೆ ಸಮ. ಅಂದರೆ*

$\sin(2n\pi + \theta) = \sin\theta$, $\quad \sin(2n\pi - \theta) = \sin(-\theta) = -\sin\theta$

$\cos(2n\pi + \theta) = \cos\theta$, $\quad \cos(2n\pi - \theta) = \cos(-\theta) = \cos\theta$

$\tan(2n\pi + \theta) = \tan\theta$, $\quad \tan(2n\pi - \theta) = \tan(-\theta) = -\tan\theta$

II ಈ ಎಲ್ಲಾ ಫಲಿತಾಂಶಗಳನ್ನು ಈ ಕೆಳಗೆ ಪಟ್ಟಿ ಮಾಡಲಾಗಿದೆ:

$\sin(90° - \theta) = \cos\theta \qquad \sin(90° + \theta) = \cos\theta$

$\cos(90° - \theta) = \sin\theta \qquad \cos(90° + \theta) = -\sin\theta$

$\tan(90° - \theta) = \cot\theta \qquad \tan(90° + \theta) = -\cot\theta$

$\sin(\pi - \theta) = \sin\theta \qquad \sin(\pi + \theta) = -\sin\theta \qquad \sin(-\theta) = -\sin\theta$

$\cos(\pi - \theta) = -\cos\theta \qquad \cos(\pi + \theta) = -\cos\theta \qquad \cos(-\theta) = \cos\theta$

$\tan(\pi - \theta) = -\tan\theta \qquad \tan(\pi + \theta) = \tan\theta \qquad \tan(-\theta) = -\tan\theta$

ಉದಾಹರಣೆಗಳು

1. ಈ ಕೆಳಗಿನವುಗಳನ್ನು ಅತ್ಯಂತ ಸುಲಭ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಬರೆಯಿರಿ.

(i) $\operatorname{cosec} 225°$ (ii) $\tan 240°$ (iii) $\tan(-945°)$

(iv) $\sin 4620°$ (v) $\cos 510°$

(i) $\operatorname{cosec} 225° = \operatorname{cosec}(180° + 45°)$

$= -\operatorname{cosec} 45°$

$= -\sqrt{2}$

(ii) $\tan 240° = \tan(180° + 60°)$

$= \tan 60°$

$= \sqrt{3}.$

(iii) $\tan(-945°) = -\tan 945°$

$= -\tan(3 \times 360° - 135°)$

$= -\tan(-135°)$

$= \tan(135°)$

$= \tan(90° + 45°)$

$= -\cot 45° = -1.$

(iv) $\sin 4620°$

$= \sin(12 \times 360° + 300°)$

$= \sin 300°$

$= \sin(360° - 60°) = -\sin 60°$

$= -\frac{\sqrt{3}}{2}$

(v) $\cos 510° = \cos(360° + 150°)$

$= \cos(150°)$

$= \cos(180° - 30°)$

$$= -\cos 30°$$

$$= -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

2. ಸರಳಗೊಳಿಸಿ :

$$\frac{\cot(450° + A)\sin(180° + 2A)\cos(720° - A)}{\cos(180° + A)\sin(360° - A)\cos(630° + A)}$$

ಈಗ, ಸೂತ್ರಗಳನ್ನು ಬಳಸಿ

$$\cot(450° + A) = \cot(360° + 90° + A)$$

$$= \cot(90° + A)$$

$$= -\tan A$$

$$\sin(180° + 2A) = -\sin 2A$$

$$\cos(720° - A) = \cos(2 \times 360° - A)$$

$$= \cos(-A)$$

$$= \cos A$$

$$\cos(180° + A) = -\cos A, \ \sin(360° - A) = -\sin A$$

$$\cos(630° + A) = \cos(720° - 90° + A)$$

$$= \cos(720° - \{90° - A\})$$

$$= \cos(90° - A)$$

$$= \sin A$$

ಆದ್ದರಿಂದ, ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಉಕ್ತಿಯು

$$\frac{-\tan A\ (-\sin 2A)\ \cos A}{-\cos A\ (-\sin A)\ \sin A}$$

$$= \frac{\tan A\ (2\sin A)\ \cos A}{\sin A\ \sin A}$$

$$= 2\tan A\ \cot A = 2.$$

3. $\angle A = 18°$ ಆದರೆ $\cos 2A = \sin 3A$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

$$\cos 2A = \cos 36°$$
$$= \cos(90° - 54°)$$
$$= \sin 54°$$
$$= \sin(3 \times 18°)$$
$$= \sin 3A.$$

4. θದ ಬೆಲೆಯು 0 ದಿಂದ 360°ವರೆಗೆ ಇದ್ದು $\sin\theta = \frac{1}{2}$ ಮತ್ತು $\tan\theta = \frac{-1}{\sqrt{3}}$ ಎಂಬ ಸಮೀಕರಣಗಳಿಗೆ ಪರಿಹಾರವಾದರೆ

θದ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

$\sin\theta = \frac{1}{2}$ ಅಂದರೆ sin θವು ಧನಾತ್ಮಕವಾಗಿರುತ್ತದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ θಕೋನವು 1ನೇ ಅಥವಾ 1ನೇ ಪಾದದಲ್ಲಿ ಇರುತ್ತದೆ.

$\therefore\ \theta = 30°,\ 150°$ ... (1)

$\tan\theta = \frac{-1}{\sqrt{3}}$ ಅಂದರೆ tan θವು ಋಣಾತ್ಮಕವಾಗಿರುತ್ತದೆ.

ಆದ್ದರಿಂದ θವು 2ನೇ ಅಥವಾ 4ನೇ ಪಾದದಲ್ಲಿ ಇರುತ್ತದೆ.

$\therefore\ \theta = 150°,\ 330°$ ... (2)

(1) ಮತ್ತು (2) ರಿಂದ $\theta = 150°$.

5. θ ವು 4ನೇ ಪಾದದಲ್ಲಿದ್ದು $\cot^2\theta = 4$ ಎಂಬ ಸಮೀಕರಣಕ್ಕೆ ಪರಿಹಾರವಾಗಿದ್ದರೆ $\frac{1}{\sqrt{5}}(\sec\theta - \text{cosec}^2\theta)$ ದ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಈಗ, $\cot^2\theta = \text{cosec}^2\theta - 1$

ಅಥವಾ $4 = \text{cosec}^2\theta - 1$

ಅಥವಾ $5 = \text{cosec}^2\theta$

ಅಥವಾ $-\sqrt{5} = \text{cosec}\,\theta$ [∵ θ ವು 4ನೇ ಪಾದದಲ್ಲಿದೆ]

ಹಾಗೆಯೇ $\cot^2\theta = 4$

ಅಥವಾ $\tan^2\theta = \frac{1}{4}$

$$\therefore \sec^2\theta = 1 + \frac{1}{4} = \frac{5}{4} \qquad (\because \sec^2\theta = 1+\tan^2\theta)$$

ಆದ್ದರಿಂದ, $\sec\theta = +\dfrac{\sqrt{5}}{2}$ [θವು 4ನೇ ಪಾದದಲ್ಲಿದೆ]

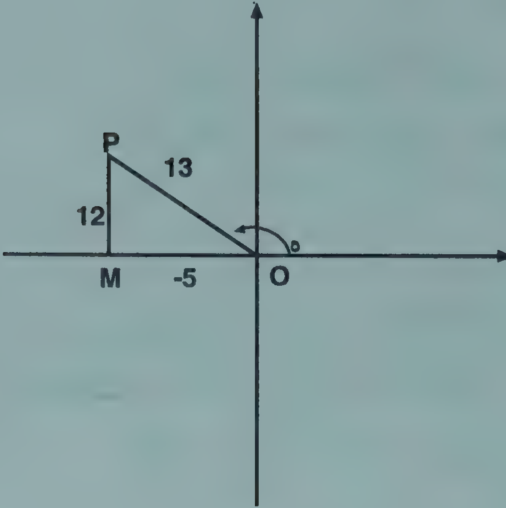
$$\therefore \frac{1}{\sqrt{5}}(\sec\theta - \operatorname{cosec}\theta)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{\sqrt{5}}{2} + \sqrt{5}\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{3\sqrt{5}}{2}\right) = \frac{3}{2}.$$

6. $\operatorname{cosec}\theta = \dfrac{13}{12}$ ಆಗಿದ್ದು $\dfrac{\pi}{2} < \theta < \pi$, ಆದರೆ

$\dfrac{5\sin\theta - 4\tan\theta}{3\cos\theta + 2\operatorname{cosec}\theta}$ದ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.



ಚಿತ್ರ 11.38

ಚಿತ್ರ 11.38ನಲ್ಲಿ ತೋರಿಸುವಂತೆ

$PM = 12$ ಮತ್ತು $OP = 13$ ಆಗಿರಲಿ.

OPMಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಕೋನದಲ್ಲಿ

$OP^2 = OM^2 + PM^2$

$\therefore OP^2 - PM^2 = OM^2$

ಅಂದರೆ,

$169 - 144 = OM^2$

ಅಥವಾ $25 = OM^2$

$\therefore OM = \pm 5$

θ ಕೋನವು 2ನೇ ಪಾದದಲ್ಲಿ ಇರುವುದರಿಂದ

$OM = -5$.

$$\therefore \frac{5\sin\theta - 4\tan\theta}{3\cos\theta + 2\operatorname{cosec}\theta} = \frac{5\times\frac{12}{13} - 4\times\left(\frac{12}{-5}\right)}{3\left(\frac{-5}{13}\right) + 2\left(\frac{13}{12}\right)}$$

$$= \frac{\frac{60}{13} + \frac{48}{5}}{\frac{-15}{13} + \frac{26}{12}} = \frac{\frac{300 + 624}{65}}{\frac{-180 + 338}{156}}$$

$$= \frac{924}{65} \times \frac{156}{158} = \frac{462 \times 12}{79 \times 5} = \frac{5544}{395}.$$

ಅಭ್ಯಾಸ - 11.4

1. ಈ ಕೆಳಗಿನವುಗಳ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
   (i) $\sin 840°$ (ii) $\cos 720°$ (iii) $\sec 3120°$
   (iv) $\tan 570°$ (v) $\operatorname{cosec} 600°$ (vi) $\cot 405°$
   (vii) $\cos(-330°)$ (viii) $\sin(-600°)$ (ix) $\cot 225°$

2. ಈ ಕೆಳಗಿನ ಸಮೀಕರಣಗಳಿಂದ Aಯ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ $(0 \le A \le 360)$.
   (i) $\sin A = \frac{1}{\sqrt{2}}$ ii) $\sec A = \frac{-2}{\sqrt{3}}$ iii) $\operatorname{cosec} A = -2$
   (iv) $\tan A = -1$ (v) $\cos A = \frac{-1}{\sqrt{2}}$

3. ಈ ಕೆಳಗಿನವುಗಳ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ
   (i) $\sin 600° \cos 330° + \cos 120° \sin 150°$
   (ii) $\cos 570° \sin 510° - \sin 330° \cos 390°$
   (iii) $\sin \frac{5\pi}{6} - 2 \sin \frac{2\pi}{3} \cos \frac{5\pi}{6}$

4. $\frac{\cos^2 51°}{\sin^2 129°} - \frac{\cos(90° - A)}{\cos(90° + A)} = \operatorname{cosec}^2 51°$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

5. $\sin^2\left(\frac{\pi}{4} + \theta\right) + \sin^2\left(\frac{\pi}{4} - \theta\right) = 1$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ

6. $\cos A + \sin(270° + A) - \sin(270° - A) + \cos(180° + A) = 0$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

7. $\sec(270° - A)\sec(90° - A) - \tan(270° - A)\tan(90° + A) + 1 = 0$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

8. $\dfrac{\cos\theta}{\sin(90° - \theta)} + \dfrac{\sin(-\theta)}{\sin(180° + \theta)} + \dfrac{\tan(90° - \theta)}{\cot\theta} = 3$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

9. A, B, C, Dಗಳು ಒಂದು ಚತುರ್ಭುಜದ ಕೋನಗಳಾದರೆ ಈ ಕೆಳಗಿನವುಗಳನ್ನು ಸಾಧಿಸಿ.

   (i) $\sin(A + B) + \sin(C + D) = 0$

   (ii) $\cos(A + B) - \cos(C + D) = 0$

10. (i) $\cos 170° + \sin 80° = 0$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ

    (ii) $\tan 40° + \cot 130° = 0$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

11. $\operatorname{cosec}\theta = \dfrac{-13}{12}$ ಮತ್ತು $\pi < \theta < \dfrac{3\pi}{2}$ ಆದರೆ

    $\dfrac{4\sin\theta - 2\cos\theta}{\sin\theta + 2\cos\theta}$ ದ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

12. $\cos\theta = \dfrac{15}{17}$ ಮತ್ತು $270° < \theta < 360°$ ಆದರೆ

    $\dfrac{2\operatorname{cosec}\theta - 4\sin\theta}{\cot\theta - 2\sec\theta}$ ದ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

13. $\cot\theta = \dfrac{-4}{3}$ ಮತ್ತು $\dfrac{\pi}{2} < \theta < \pi$ ಆದರೆ

    $\dfrac{5\sin\theta - 4\cot\theta}{4\sec\theta + 2\tan\theta}$ ದ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.

14. A, B, Cಗಳು ಒಂದು ತ್ರಿಕೋನದ ಮೂರು ಕೋನಗಳಾಗಿದ್ದರೆ ಈ ಕೆಳಗಿನವುಗಳನ್ನು ಸಾಧಿಸಿ :

(i) $\cos A = -\cos(B + C)$

(ii) $\tan\frac{A}{2} = \cot\frac{B+C}{2}$

(iii) $\sin\frac{(B + C)}{2} = \cos\frac{A}{2}$

15. ಒಂದು ಚಕ್ರೀಯ ಚತುರ್ಭುಜ $ABCD$ ಯಲ್ಲಿ

(i) $\sin A = \sin C$

(ii) $\cos B + \cos D = 0$

ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

11.4.2 ಸಂಯುಕ್ತ ಕೋನಗಳು

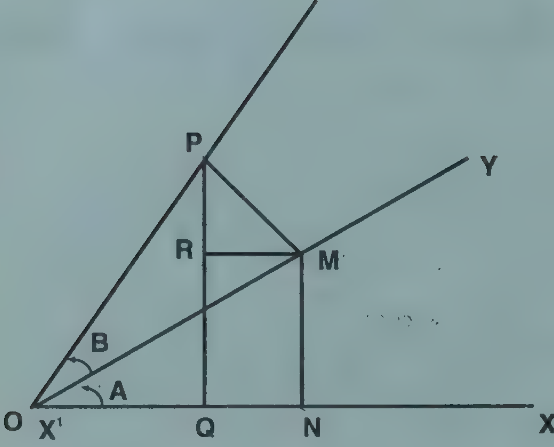
ತ್ರಿಕೋನಮಿತಿಯಲ್ಲಿ ನಾವು ಹೆಚ್ಚಾಗಿ ಎರಡು ಕೋನಗಳ ಮೊತ್ತ ಅಥವಾ ವ್ಯತ್ಯಾಸಗಳನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸುತ್ತೇವೆ. A ಮತ್ತು B ಎಂಬ ಎರಡು ಕೋನಗಳಿದ್ದರೆ $A+B$ ಮತ್ತು $A-B$ ಇವುಗಳನ್ನು ಸಂಯುಕ್ತ ಕೋನಗಳೆಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ. ಈ ಸಂಯುಕ್ತ ಕೋನಗಳ ತ್ರಿಕೋನಮಿತೀಯ ಪ್ರಮಾಣಗಳನ್ನು A ಮತ್ತು Bಗಳ ತ್ರಿಕೋನಮಿತೀಯ ಪ್ರಮಾಣಗಳಲ್ಲಿ ಬರೆಯಲು ಕೆಲವು ಸಂಬಂಧಗಳಿವೆ. ನಾವೀಗ ಈ ಸಂಬಂಧಗಳನ್ನು ಸಾಧಿಸೋಣ :

$$\sin(A + B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B$$

$$\cos(A + B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B$$

$$\tan(A + B) = \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B}$$

ಒಂದು ಪರಿಭ್ರಮಿಸುವ ಸರಳರೇಖೆಯು OXನಿಂದ ಪ್ರಾರಂಭಿಸಿ ಅಪ್ರದಕ್ಷಿಣೆಯ ದಿಶೆಯಲ್ಲಿ A ಕೋನವನ್ನು ಪರಿಭ್ರಮಿಸಿ OYಸ್ಥಾನಕ್ಕೆ ಬರಲಿ. ಅದು ಅಲ್ಲಿಂದ ಮುಂದಕ್ಕೆ B ಕೋನವನ್ನು ಪರಿಭ್ರಮಿಸಿ ಬರುವ OZ ನ ಮೇಲೆ P ಎಂಬ ಯಾವುದಾದರೊಂದು ಬಿಂದುವನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿ. PQ ವನ್ನು OX ಗೆ ಲಂಬವಾಗಿ ಎಳೆಯಿರಿ. PMನ್ನು OYಗೆ ಲಂಬವಾಗಿ ಎಳೆಯಿರಿ. M ನಿಂದ PQಗೆ MRನ್ನು ಲಂಬವಾಗಿ ಎಳೆಯಿರಿ. MNನ್ನು OXಗೆ ಲಂಬವಾಗಿ ಎಳೆಯಿರಿ.



ಚಿತ್ರ 11.39

ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಕೋನ RPM ನಲ್ಲಿ

$\angle RPM = 90° - \angle PMR$ (ಚಿತ್ರ 11.39)

PM ರೇಖೆಯು OY ಗೆ ಲಂಬವಾಗಿರುವುದರಿಂದ

$90° - \angle PMR = \angle RMO$

$\therefore \angle RPM = \angle RMO$

$RM \parallel OX \therefore \angle RMO = \angle A$

ಮತ್ತು $\angle RPM = \angle A$

ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಕೋನ PQO ನಲ್ಲಿ

(i) $\sin(A + B) = \frac{PQ}{OP} = \frac{PR + RQ}{OP}$

$$= \frac{RQ}{OP} + \frac{PR}{OP}$$

$$= \frac{MN}{OP} + \frac{PR}{OP} \qquad [\because RQ = MN]$$

$$= \frac{MN}{OM} \cdot \frac{OM}{OP} + \frac{PR}{PM} \cdot \frac{PM}{OP}$$

$$\therefore \sin(A + B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B$$

(ii) $\cos(A + B) = \frac{OQ}{OP}$

$$= \frac{ON - QN}{OP}$$

$$= \frac{ON}{OP} - \frac{QN}{OP}$$

$$= \frac{ON}{OP} - \frac{RM}{OP} \qquad [\because QN = RM]$$

$$= \frac{ON}{OM} \cdot \frac{OM}{OP} - \frac{RM}{PM} \cdot \frac{PM}{OP}$$

$\therefore \cos(A + B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B$

(iii) $\tan(A + B) = \dfrac{PQ}{OQ}$

$$= \frac{QR + RP}{ON - QN}$$

$$= \frac{MN + RP}{ON - RM} \qquad \left[\because \begin{array}{l} QR = MN \\ QN = RM \end{array}\right]$$

$$= \frac{\dfrac{MN}{ON} + \dfrac{RP}{ON}}{1 - \dfrac{RM}{ON}}$$

$$= \frac{\tan A + \dfrac{RP}{ON}}{1 - \dfrac{RM}{RP} \cdot \dfrac{RP}{ON}}$$

$$= \frac{\tan A + \dfrac{RP}{ON}}{1 - \tan A . \dfrac{RP}{ON}}$$

ಈಗ, Δ^{le} RPM ||| Δ^{le} OMN. ಆದ್ದರಿಂದ

$$\therefore \frac{RM}{MN} = \frac{PM}{OM} = \frac{RP}{ON}$$

ಮೇಲಿನ ಚಿತ್ರದಿಂದ, $\dfrac{PM}{OM} = \tan B$

$$\therefore \frac{RP}{ON} = \tan B$$

$$\therefore \tan(A+B) = \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B}$$

ಮೇಲಿನ ಮೂರು ಸೂತ್ರಗಳಲ್ಲಿ B ಯನ್ನು $(-B)$ಗೆ ಬದಲಾಯಿಸಿದಾಗ

$$\sin(A-B) = \sin A \cos(-B) + \cos A \sin(-B)$$

$$\therefore \sin(A-B) = \sin A \cos B - \cos A \sin B$$

$[\because \cos(-B) = \cos B, \sin(-B) = -\sin B]$ ಮತ್ತು

$$\cos(A-B) = \cos A \cos(-B) - \sin A \sin(-B)$$

$$\therefore \cos(A-B) = \cos A \cos B + \sin A \sin B$$

$$\tan(A-B) = \frac{\tan A + \tan(-B)}{1 - \tan A \tan(-B)}$$

$$\therefore \tan(A-B) = \frac{\tan A - \tan B}{1 + \tan A \tan B}$$

ಉದಾಹರಣೆಗಳು

1. ಈ ಕೆಳಗಿನವುಗಳ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

(i) $\tan 75°$ (ii) $\cos 105°$ (iii) $\sin 15°$ (iv) $\cos 165°$

(i) $\tan 75° = \tan(30° + 45°)$

$$= \frac{\tan 30° + \tan 45°}{1 - \tan 30° \tan 45°}$$

$$= \frac{\frac{1}{\sqrt{3}} + 1}{1 - \frac{1}{\sqrt{3}} . 1}$$

$$= \frac{\sqrt{3} + 1}{\sqrt{3} - 1}.$$

(ii) $\cos 105° = \cos (60° + 45°)$

$$= \cos 60° \cos 45° - \sin 60° \sin 45°$$

$$= \frac{1}{2} . \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{3}}{2} . \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$= \frac{1 - \sqrt{3}}{2\sqrt{2}} = - \frac{(\sqrt{3} - 1)}{2\sqrt{2}}$$

(iii) $\sin 15° = \sin (45° - 30°)$

$$= \sin 45° \cos 30° - \cos 45° \sin 30°$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} . \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}} . \frac{1}{2}$$

$$= \frac{\sqrt{3} - 1}{2\sqrt{2}}$$

(iv) $\cos 165° = \cos (180° - 15°)$

$$= - \cos 15°$$

$$= - \cos (45° - 30°)$$

$$= - [\cos 45° \cos 30° + \sin 45° \sin 30°]$$

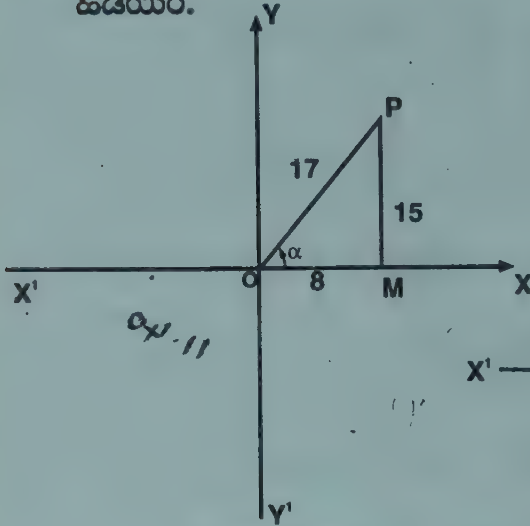
$$= -\left[\frac{1}{\sqrt{2}}\,\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}}\,\frac{1}{2}\right]$$

$$= -\left[\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}\right]$$

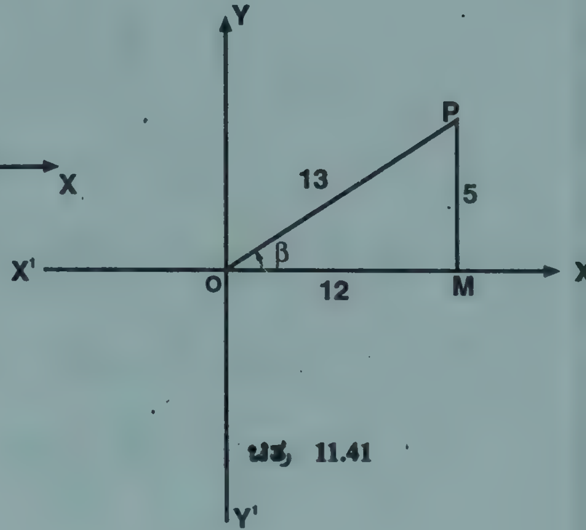
$$\therefore \cos 165^\circ = -\frac{(1+\sqrt{3})}{2\sqrt{2}}$$

2. $\sin\alpha = \frac{15}{17}$ ಮತ್ತು $\cos\alpha = \frac{12}{13}$ ಆದರೆ

$\sin(\alpha+\beta)$, $\cos(\alpha-\beta)$ ಮತ್ತು $\tan(\alpha+\beta)$ನ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.



ಚಿತ್ರ 11.40



ಚಿತ್ರ 11.41

(i) $\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$

$$= \frac{15}{17}\cdot\frac{12}{13} + \frac{8}{17}\cdot\frac{5}{13} \quad \left(\because \cos\alpha = \frac{8}{17},\ \sin\beta = \frac{5}{13}\right)$$

$$= \frac{180+40}{221} = \frac{220}{221}$$

(ii) $\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$

$$= \frac{8}{17} \cdot \frac{12}{13} + \frac{15}{17} \cdot \frac{5}{13} \quad \left(\because \cos\alpha = \frac{8}{17},\ \sin\beta = \frac{5}{13}\right)$$

$$= \frac{96 + 75}{221} = \frac{171}{221}$$

ಚಿತ್ರ 11.40 ಮತ್ತು 11.41ಗಳಲ್ಲಿ, $\tan\alpha = \frac{15}{8}$, $\tan\beta = \frac{5}{12}$

$$\therefore \tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta}$$

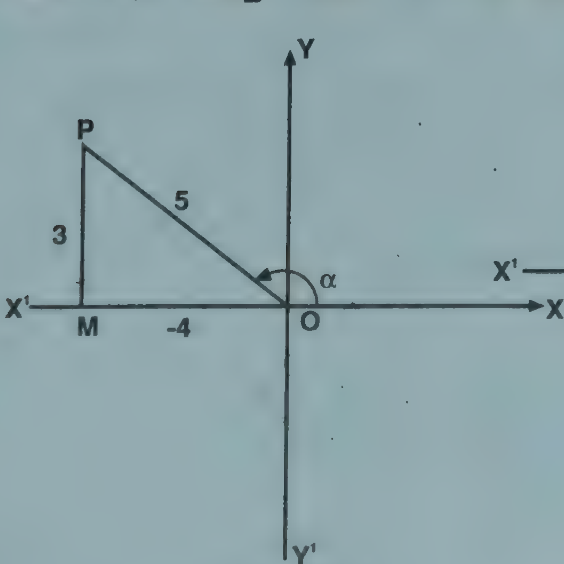
$$= \frac{\frac{15}{8} + \frac{5}{12}}{1 - \frac{15}{8} \cdot \frac{5}{12}} = \frac{\frac{180 + 40}{96}}{\frac{96 - 75}{96}}$$

$$= \frac{220}{21}.$$

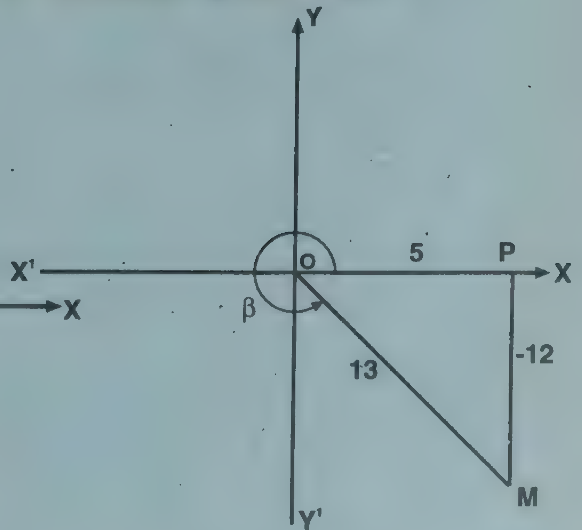
3. $\sin\alpha = \frac{3}{5}$, $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$

ಮತ್ತು $\cos\beta = \frac{5}{13}$, $3\frac{\pi}{2} < \beta < 2\pi$ ಆದರೆ

$\sin(\alpha + \beta)$ ಮತ್ತು $\cos(\alpha - \beta)$ ಗಳ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.



ಚಿತ್ರ 11.42



ಚಿತ್ರ 11.43

ಇಲ್ಲಿ α II – ಪಾದದಲ್ಲಿ ಮತ್ತು β IV – ಪಾದದಲ್ಲಿ ಇವೆ.

ಆದ್ದರಿಂದ, $\cos\alpha < 0$ ಮತ್ತು $\sin\beta < 0$.

ಚಿತ್ರಗಳಿಂದ, $\cos\alpha = -4/5$ ಮತ್ತು $\sin\beta = -12/13$.

$$\therefore \sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha \cos\beta + \cos\alpha \sin\beta$$

$$= \frac{3}{5} \cdot \frac{5}{13} + \left(-\frac{4}{5}\right) \cdot \left(-\frac{12}{13}\right)$$

$$= \frac{3}{13} + \frac{48}{65} = \frac{63}{65}$$

ಮತ್ತು $\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha \cos\beta + \sin\alpha \sin\beta$

$$= \left(-\frac{4}{5}\right)\left(\frac{5}{13}\right) + \frac{3}{5}\left(-\frac{12}{13}\right)$$

$$= -\frac{20}{65} - \frac{36}{65}$$

$$= -\frac{56}{65}.$$

4. $\tan A = \frac{x}{x+1}$ ಮತ್ತು $\tan B = \frac{1}{2x+1}$ ಆದರೆ $A + B = \frac{\pi}{4}$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

ನಮಗೆ ತಿಳಿದಿರುವ ಸೂತ್ರದಂತೆ

$$\tan(A + B) = \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B}$$

$$= \frac{\frac{x}{x+1} + \frac{1}{2x+1}}{1 - \frac{x}{x+1} \frac{1}{2x+1}}$$

ಮೇಲಿನದನ್ನು ಸರಳಗೊಳಿಸಿದಾಗ

$$\tan(A+B) = \frac{2x^2 + 2x + 1}{2x^2 + 2x + 1} = 1$$ ಎಂದಾಗುತ್ತದೆ.

$$\therefore A + B = \pi/4$$

5. $\dfrac{\cos 15^\circ + \sin 15^\circ}{\cos 15^\circ - \sin 15^\circ} = \sqrt{3}$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

ಈಗ, $\dfrac{\cos 15^\circ + \sin 15^\circ}{\cos 15^\circ - \sin 15^\circ}$

$$= \frac{\dfrac{\cos 15^\circ}{\cos 15^\circ} + \dfrac{\sin 15^\circ}{\cos 15^\circ}}{\dfrac{\cos 15^\circ}{\cos 15^\circ} - \dfrac{\sin 15^\circ}{\cos 15^\circ}}$$

$$= \frac{1 + \tan 15^\circ}{1 - \tan 15^\circ}$$

$$= \frac{\tan 45^\circ + \tan 15^\circ}{1 - \tan 45^\circ \tan 15^\circ} \qquad [\because 1 = \tan 45^\circ]$$

$$= \tan(45^\circ + 15^\circ)$$

$$= \tan 60^\circ = \sqrt{3}.$$

6. $\dfrac{1}{\tan 3A + \tan A} - \dfrac{1}{\cot 3A + \cot A} = \cot 4A$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

ತೋರಿಸಬೇಕಾಗಿರುವ ಸಮೀಕರಣದ ಎಡಭಾಗ

$$\frac{1}{\tan 3A + \tan A} - \frac{1}{\dfrac{1}{\tan 3A} + \dfrac{1}{\tan A}}$$

$$= \frac{1}{\tan 3A + \tan A} - \frac{1}{\dfrac{\tan A + \tan 3A}{\tan 3A \tan A}}$$

$$= \frac{1}{\tan 3A + \tan A} - \frac{\tan 3A \tan A}{\tan 3A + \tan A}$$

$$= \frac{1 - \tan 3A \tan A}{\tan 3A + \tan A}$$

$$= \frac{1}{\dfrac{\tan 3A + \tan A}{1 - \tan 3A \tan A}}$$

$$= \frac{1}{\tan(3A + A)}$$

$$= \frac{1}{\tan 4A}$$

$$= \cot 4A.$$

ಅಭ್ಯಾಸ - 11.5

1. α ಮತ್ತು β ಎರಡು ಲಘುಕೋನಗಳಾಗಿ $\operatorname{cosec}\alpha = 3/2$ ಮತ್ತು $\tan\beta = 3/4$ ಆದರೆ $\sin(\alpha - \beta)$ ಮತ್ತು $\cos(\alpha - \beta)$ಗಳ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
2. $\sin 75°$, $\cos 105°$ ಮತ್ತು $\tan 75°$ ಗಳ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
3. $\cos(A + B) + \sin(A - B) = 2\sin\left(\frac{\pi}{4} + A\right)\cos\left(\frac{\pi}{4} + B\right)$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.
4. $1 - \tan(45° + \alpha)\tan(45° - \alpha) = 0$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.
5. $\sqrt{2}\cos(45° - A) = \cos A + \sin A$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.
6. $\tan(\alpha + \beta) = 1$ ಮತ್ತು $\tan\alpha = \frac{1}{2}$ ಆದರೆ $\tan\beta$ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.
7. $\tan(A - B) = 7/24$ ಮತ್ತು $\tan A = 4/3$ ಆಗಿದ್ದು A ಮತ್ತು Bಗಳು ಲಘುಕೋನಗಳಾಗಿದ್ದರೆ, $\tan B = 3/4$ ಮತ್ತು $A + B = \pi/2$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.
8. $\sin 75° - \sin 15° = \cos 105° + \cos 15°$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

9. $\cos(\alpha + \beta)\cos\gamma - \cos(\beta + \alpha)\cos\alpha = \sin\beta\sin(\gamma - \alpha)$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

10. $\dfrac{\cos(x-y) - \cos(x+y)}{\cos(x-y) + \cos(x+y)} = \tan x \cdot \tan y$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

11. $\dfrac{\cos13^\circ + \sin13^\circ}{\cos13^\circ - \sin13^\circ} = \tan58^\circ$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

12. $\cos(A + B)\cos(A - B) = \cos^2 A - \sin^2 B = \cos^2 B - \sin^2 A$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

13. $\tan7A \tan4A \tan3A = \tan7A - \tan4A - \tan3A$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

14. $\sin\theta = 3\sin(\theta + 2\alpha)$ ಆದರೆ $\sin(\theta + \alpha) + 2\tan\alpha = 0$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

15. $\dfrac{\cos3A}{\sin A} + \dfrac{\sin3A}{\sin A} = 2\cot 2A$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

11.4.3 ಗುಣಿತ ಮತ್ತು ಉಪಗುಣಿತ ಕೋನಗಳ ತ್ರಿಕೋಣಮಿತೀಯ ಪ್ರಮಾಣಗಳು

ಒಂದು ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಕೋನ θಗೆ ಸಂಬಂಧಪಟ್ಟಂತೆ, $2\theta, 3\theta, 4\theta, \ldots$ ಮುಂತಾದವುಗಳನ್ನು "*ಗುಣಿತ ಕೋನ*"ಗಳೆಂತಲೂ ಮತ್ತು ಅದರ ಭಾಗಗಳಾದ $\theta/2, \theta/3$ ಎಂಬವುಗಳನ್ನು "*ಉಪಗುಣಿತ ಕೋನ*"ಗಳೆಂತಲೂ ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ.

2A ಕೋನದ ತ್ರಿಕೋನಮಿತೀಯ ಪ್ರಮಾಣಗಳು

(i) $\sin(A + B) = \sin A\cos B + \cos A\sin B$ ಎಂಬುದು ತಿಳಿದಿದೆ.

ಇದರಲ್ಲಿ $B = A$ ಎಂದು ಬರೆದಾಗ

$\sin(A + A) = \sin A\cos A + \cos A\sin A$

ಅಂದರೆ, $\sin2A = 2\sin A\cos A$ ...(1)

(ii) $\cos(A + B) = \cos A\cos B - \sin A\sin B$ ಎಂದು ತಿಳಿದಿದೆ.

ಇದರಲ್ಲಿ $B = A$ ಎಂದು ಬರೆದಾಗ

$\cos(A + B) = \cos A\cos A - \sin A\sin A$

$\therefore\ \cos2A = \cos^2 A - \sin^2 A$ ... (2A)

ಈಗ, (2A) ಯಿಂದ

$\cos 2A = (1 - \sin^2 A) - \sin^2 A$

$\left[\because \cos^2 A = 1 - \sin^2 A\right]$

$\therefore \ \cos 2A = 1 - 2\sin^2 A$ ... (2B)

ಪುನಃ (2A) ಯಿಂದ $\cos 2A = \cos^2 A - (1 - \cos^2 A)$

$\therefore \ \cos 2A = 2\cos^2 A - 1$ ... (2C)

(iii) $\tan(A + B) = \dfrac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A + \tan B}$ ಎಂಬುದು ತಿಳಿದಿದೆ.

ಇದರಲ್ಲಿ $B = A$ ಎಂದು ಬರೆದಾಗ

$$\tan(A + A) = \frac{\tan A + \tan A}{1 - \tan A \ \tan A}$$

ಅಥವಾ

$$\tan 2A = \frac{2\tan A}{1 - \tan^2 A} \quad \text{... (3)}$$

ಫಲಿತಾಂಶ (1),(2)ಮತ್ತು (3)ರಲ್ಲಿ $2A = \theta$ (ಅಥವಾ $A = \frac{\theta}{2}$) ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಂಡು ಈ ಕೆಳಗಿನ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಬರೆಯಬಹುದು:

(i) $\sin\theta = 2\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)$

(ii) $\cos\theta = \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) = 2\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) - 1 = 1 - 2\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)$

ಮತ್ತು

(iii) $\tan\theta = \dfrac{2\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)}{1 - \tan^2\left(\frac{\theta}{2}\right)}$

ಸೂಚನೆ: ಮೇಲಿನ (2A), (2B) ಸೂತ್ರಗಳಿಂದಾಗಿ

$$\cos^2\theta = \frac{1}{2}\left(1 + \cos 2\theta\right) \text{ ಮತ್ತು } \sin^2\theta = \frac{1}{2}\left(1 - \cos 2\theta\right)$$

ಎಂದು ಬರೆಯಬಹುದು.

ಉದಾಹರಣೆಗಳು

1. $\tan\frac{A}{2} = t$ ಆದರೆ

$$\sin A = \frac{2t}{1+t^2} \text{ ಮತ್ತು } \cos A = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

(i) ಯಾವುದೇ ಒಂದು ಕೋನ Aಯನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೆ

$$\sin A = 2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}$$ ಎಂದು ತಿಳಿದಿದೆ.

ಅಂದರೆ, $$\sin A = \frac{2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}}{1}$$

$$= \frac{2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}}{\sin^2\frac{A}{2} + \cos^2\frac{A}{2}}$$

$$\left[\because 1 = \sin^2\frac{A}{2} + \cos^2\frac{A}{2}\right]$$

$$\therefore \sin A = \frac{\dfrac{2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}}{\cos^2\frac{A}{2}}}{\dfrac{\sin^2\frac{A}{2}}{\cos^2\frac{A}{2}} + \dfrac{\cos^2\frac{A}{2}}{\cos^2\frac{A}{2}}}$$

$$\sin A = \frac{2\tan\frac{A}{2}}{\tan^2\frac{A}{2} + 1}$$

$$\therefore \sin A = \frac{2t}{1 + t^2}$$

(ii) ಹಾಗೆಯೇ

$\cos A = \cos^2\frac{A}{2} - \sin^2\frac{A}{2}$ ಎಂದು ತಿಳಿದಿದೆ.

$$= \frac{\cos^2\frac{A}{2} - \sin^2\frac{A}{2}}{1}$$

$$= \frac{\cos^2\frac{A}{2} - \sin^2\frac{A}{2}}{\cos^2\frac{A}{2} + \sin^2\frac{A}{2}}$$

$$= \frac{\dfrac{\cos^2\frac{A}{2}}{\cos^2\frac{A}{2}} - \dfrac{\sin^2\frac{A}{2}}{\cos^2\frac{A}{2}}}{\dfrac{\cos^2\frac{A}{2}}{\cos^2\frac{A}{2}} + \dfrac{\sin^2\frac{A}{2}}{\cos^2\frac{A}{2}}}$$

$$\therefore \cos A = \frac{1 - \tan^2\frac{A}{2}}{1 + \tan^2\frac{A}{2}}$$

ಅಥವಾ $\cos A = \dfrac{1 - t^2}{1 + t^2}$

2. $\sin 3A$, $\cos 3A$ ಮತ್ತು $\tan 3A$ ಗಳನ್ನು ವಿಸ್ತರಿಸಿ.

(i) ಯಾವುದೇ ಒಂದು ಕೋನ Aಯನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೆ

$$\sin 3A = \sin (2A + A)$$

$$= \sin 2A \cos A + \cos 2A \sin A$$

$$= (2 \sin A \cos A) \cos A + (1 - 2 \sin^2 A) \sin A$$

$$= 2 \sin A \cos^2 A + \sin A - 2 \sin^3 A$$

$$= 2 \sin A (1 - \sin^2 A) + \sin A - 2 \sin^3 A$$

$$= 2 \sin A - 2 \sin^3 A + \sin A - 2 \sin^3 A$$

$$\therefore \ \mathbf{\sin 3A = 3 \sin A - 4 \sin^3 A}$$

(ii) $\cos 3A = \cos (2A + A)$

$$= \cos 2A \cos A - \sin 2A \sin A$$

$$= (2 \cos^2 A - 1) \cos A - (2 \sin A \cos A) \sin A$$

$$= 2 \cos^3 A - \cos A - 2 \sin^2 A \cos A$$

$$= 2 \cos^3 A - \cos A - 2(1 - \cos^2 A) \cos A$$

$$= 2 \cos^3 A - \cos A - 2 \cos A + 2 \cos^3 A.$$

$$\therefore \ \mathbf{\cos 3A = 4 \cos^3 A - 3 \cos A}$$

(iii) $\tan 3A = \tan (2A + A)$

$$= \frac{\tan 2A + \tan A}{1 - \tan 2A \tan A}$$

$$= \frac{\dfrac{2 \tan A}{1 - \tan^2 A} + \tan A}{1 - \dfrac{2 \tan A}{1 - \tan^2 A} . \tan A}$$

$$= \frac{\dfrac{2\tan A + \tan A(1 - \tan^2 A)}{1 - \tan^2 A}}{\dfrac{1 - \tan^2 A - 2\tan^2 A}{1 - \tan^2 A}}$$

$$\therefore \tan 3A = \frac{3\tan A - \tan^3 A}{1 - 3\tan^2 A}$$

3. $\sin 15°$, $\cos 22\frac{1}{2}°$ ಮತ್ತು $\tan 22\frac{1}{2}°$ ಗಳ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

(i) $\cos 2\theta = 1 - 2\sin^2\theta$ ಎಂದು ತಿಳಿದಿದೆ.

$$\therefore \sin^2\theta = \frac{1 - \cos 2\theta}{2}$$

ಇದರಲ್ಲಿ $\theta = 15°$ ಎಂದು ಆದೇಶಿಸಿದರೆ

$$\sin^2 15° = \frac{1 - \cos(2 \times 15°)}{2}$$

$$= \frac{1 - \cos 30°}{2} = \frac{1 - \dfrac{\sqrt{3}}{2}}{2}$$

$$= \frac{2 - \sqrt{3}}{4}$$

$$\therefore \sin 15° = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{3}}}{2}$$

ಅಂದರೆ, $\sin 15° = \dfrac{\sqrt{3} - 1}{2\sqrt{2}}$

$$\left[\because \sqrt{2 - \sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{2}}[\sqrt{3} - 1]\right]$$

(ii) $\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1$ ಎಂದು ತಿಳಿದಿದೆ.

$$\therefore \frac{1 + \cos 2\theta}{2} = \cos^2\theta$$

ಇದರಲ್ಲಿ $\theta = 22½°$ ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೆ

$$\frac{1 + \cos\left\{2\left(22\frac{1}{2}°\right)\right\}}{2} = \cos^2 22\frac{1}{2}°$$

ಅಥವಾ $\dfrac{1 + \cos 45°}{2} = \cos^2 22\dfrac{1}{2}°$

ಅಥವಾ $\dfrac{1 + \dfrac{1}{\sqrt{2}}}{2} = \cos^2 22\dfrac{1}{2}°$

ಅಥವಾ $\cos 22\dfrac{1}{2}° = \left[\dfrac{\sqrt{2} + 1}{2\sqrt{2}}\right]^{1/2}$

(iii) $\tan 2\theta = \dfrac{2\tan\theta}{1 - \tan^2\theta}$ ಎಂದು ತಿಳಿದಿದೆ.

ಇದರಲ್ಲಿ $\theta = 22\frac{1}{2}°$ ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೆ

$$\tan 45° = \frac{2\tan 22\frac{1}{2}°}{1 - \tan^2 22\frac{1}{2}°}$$ ಎಂದಾಗುತ್ತದೆ.

ಮೇಲಿನ ಫಲಿತಾಂಶದಲ್ಲಿ

$$\tan 22\frac{1}{2}° = x$$

ಎಂದು ಸೂಚಿಸೋಣ. ಆಗ

$$1 = \frac{2x}{1 - x^2}$$

ಅಥವಾ $1 - x^2 = 2x$ ಅಥವಾ $x^2 + 2x - 1 = 0$ ಎಂದಾಗುತ್ತದೆ.

$$\therefore\ x = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 4}}{2}$$

ಅಥವಾ $x = \dfrac{-2 \pm 2\sqrt{2}}{2}$

ಅಥವಾ $x = -1 \pm \sqrt{2}$

ಈಗ, $22\frac{1}{2}°$ ಒಂದನೇ ಪಾದದಲ್ಲಿ ಇರುವುದರಿಂದ $\tan 22\frac{1}{2}°$ ಧನಾತ್ಮಕವಾಗಿದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ

$$\tan 22\frac{1}{2}° = \sqrt{2} - 1$$

4. $\tan \alpha = \frac{1}{4}$ ಆದರೆ $\tan 3\alpha$ ಮತ್ತು $\sin 3\alpha$ ಗಳ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

(i) $$\tan 3\alpha = \frac{3\tan\alpha - \tan^3\alpha}{1 - 3\tan^2\alpha}$$

$$= \frac{3\left(\frac{1}{4}\right) - \frac{1}{64}}{1 - 3 \times \frac{1}{16}} = \frac{\frac{48 - 1}{64}}{\frac{16 - 3}{16}} = \frac{47}{52}.$$

(ii) $$\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha$$

$$\tan\alpha = \frac{1}{4} \quad \therefore\ \sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{17}}$$

$$\sin 3\alpha = 3 \times \frac{1}{\sqrt{17}} - 4\left(\frac{1}{\sqrt{17}}\right)^3$$

$$= \frac{3}{\sqrt{17}} - \frac{4}{17\sqrt{17}} = \frac{51 - 4}{17\sqrt{17}} = \frac{47}{17\sqrt{17}}$$

5. $\tan 67\frac{1}{2}^\circ = \sqrt{2} + 1$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

ಕೋನ $67\frac{1}{2}^\circ = \theta$ ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೆ $135^\circ = 2\theta$ ಆಗುತ್ತದೆ.

$\therefore \tan 135^\circ = \tan 2\theta$

ಅಂದರೆ, $-1 = \tan 2\theta$

ಅಥವಾ $-1 = \dfrac{2\tan\theta}{1 - \tan^2\theta}$

ಅಥವಾ $-1 + \tan^2\theta = 2\tan\theta$

ಅಥವಾ $\tan^2\theta - 2\tan\theta - 1 = 0$

ಈಗ, $\tan\theta = a$ ಎಂದು ಬರೆದಾಗ, ಮೇಲಿನ ಸಮೀಕರಣವು

$$a^2 - 2a - 1 = 0$$

ಎಂದಾಗುತ್ತದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ

$$a = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 4}}{2}$$

ಅಥವಾ $a = \dfrac{2 \pm 2\sqrt{2}}{2}$ ಅಥವಾ $a = 1 \pm \sqrt{2}$

$67\frac{1}{2}^\circ$ ಕೋನವು ಒಂದನೇ ಪಾದದಲ್ಲಿರುವುದರಿಂದ $\tan 67\frac{1}{2}^\circ$ ಬೆಲೆಯು ಧನಾತ್ಮಕವಾಗಿರುತ್ತದೆ.

$\therefore \tan 67\frac{1}{2}^\circ = \sqrt{2} + 1$

6. $\sin 18^\circ$ ಮತ್ತು $\cos 36^\circ$ ಇವುಗಳ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

(i) $x = 18^\circ$ ಆಗಿರಲಿ. ಆದ್ದರಿಂದ

$5x = 90^\circ$ ಅಥವಾ $2x + 3x = 90^\circ$ ಅಥವಾ $2x = 90^\circ - 3x$

ಎಂದು ಬರೆಯಬಹುದು.

$\therefore \ \sin 2x = \sin(90° - 3x) = \cos 3x$

$\sin 2x$ ಮತ್ತು $\cos 3x$ ಗಳನ್ನು ವಿಸ್ತರಿಸಿದಾಗ

$$2 \sin x \cos x = 4 \cos^3 x - 3 \cos x$$

ಎಂದಾಗುತ್ತದೆ.

ಎರಡು ಭಾಗಗಳನ್ನು $\cos x$ ನಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದಾಗ

$$2 \sin x = 4 \cos^2 x - 3$$

ಅಥವಾ $2 \sin x = 4(1 - \sin^2 x) - 3$

ಅಥವಾ $4 \sin^2 x + 2 \sin x - 1 = 0$

ಇದರಲ್ಲಿ $y = \sin x$ ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೆ

$$4y^2 + 2y - 1 = 0$$

ಎಂಬ ವರ್ಗಸಮೀಕರಣವು ಉಂಟಾಗುತ್ತದೆ.

$$\therefore \ y = \frac{-2 \pm \sqrt{(2)^2 - 4(4)(-1)}}{2(4)}$$

$$= \frac{-2 \pm \sqrt{20}}{8} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{4}$$

ಆದರೆ, $x = 18°$ ಕೋನವು I-ಪಾದದಲ್ಲಿದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ $y = \sin 18°$ ಧನಾತ್ಮಕವಾಗಿರುತ್ತದೆ.

$$\therefore \ \sin 18° = \frac{\sqrt{5} - 1}{4}$$

(ii) $x = 36°$ ಎಂದಿರಲಿ. ಆದ್ದರಿಂದ

$5x = 180°$ ಅಥವಾ $3x + 2x = 180°$

ಅಥವಾ $3x = 180° - 2x$

ಎಂದು ಬರೆಯಬಹುದು.

$\therefore \ \cos 3x = \cos(180° - 2x)$

ಅಥವಾ $4\cos^3 x - 3\cos x = -\cos 2x$

ಅಥವಾ $4\cos^3 x - 3\cos x = -[2\cos^2 x - 1]$

ಅಥವಾ $4\cos^3 x - 3\cos x + 2\cos^2 x - 1 = 0$

$\cos x = y$ ಎಂದಿರಲಿ

$\therefore\ 4y^3 + 2y^2 - 3y - 1 = 0$

$(y+1)\ (4y^2 - 2y - 1) = 0$

$\therefore\ y = -1$ ಅಥವಾ $4y^2 - 2y - 1 = 0$

ಈಗ, $\cos x = —$ ಆದರೆ $x = -180°$ ಇದು ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲ.

$$\therefore\ y = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 16}}{8}$$

ಅಥವಾ $y = \dfrac{2 \pm 2\sqrt{5}}{8} = \dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{4}$

$36°$ ಒಂದನೇ ಪಾದದಲ್ಲಿರುವುದರಿಂದ $\cos 36°$ ಧನಾತ್ಮಕವಾಗಿರುತ್ತದೆ.

$$\therefore\ \cos 36° = \frac{\sqrt{5}+1}{4}.$$

7. $\tan\theta = \dfrac{\sin 2\theta}{1 + \cos 2\theta} = \dfrac{1 - \cos 2\theta}{\sin 2\theta}$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

ತೋರಿಸಬೇಕಾಗಿರುವ ಸಮೀಕರಣದ ಎರಡನೇ ಪದ

$$\frac{\sin 2\theta}{1 + \cos 2\theta} = \frac{2\sin\theta\cos\theta}{2\cos^2\theta}$$

$$= \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \tan\theta \qquad ...(1)$$

ಮೂರನೇ ಪದವನ್ನು ಪರಿಗಣಿಸಿದರೆ

$$\frac{1 - \cos\theta}{\sin 2\theta} = \frac{2\sin^2\theta}{2\sin\theta\cos\theta} = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \tan\theta \qquad ...(2)$$

ಆದ್ದರಿಂದ, (1) ಮತ್ತು (2)ರಿಂದ ಬೇಕಾಗಿರುವ ಫಲಿತಾಂಶವು ಸಾಧಿಸಿದಂತಾಯಿತು.

8. $\operatorname{cosec}A + 2\operatorname{cosec} 2A = \sec A \cot \frac{A}{2}$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

ತೋರಿಸಬೇಕಾಗಿರುವ ಸಮೀಕರಣದ ಎಡಭಾಗ

$\operatorname{cosec} A + 2\operatorname{cosec} 2A$

$$= \frac{1}{\sin A} + \frac{2}{\sin 2A}$$

$$= \frac{1}{\sin A} + \frac{2}{(2\sin A \cos A)}$$

$$= \frac{\cos A + 1}{\sin A \cos A}$$

$$= \frac{2\cos^2\frac{A}{2}}{\left(2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}\right)\cos A}$$

$$= \frac{\cos\frac{A}{2}}{\sin\frac{A}{2}\cos A}$$

$$= \sec A \cot\frac{A}{2}$$

ಸಮೀಕರಣದ ಬಲಭಾಗಕ್ಕೆ ಸಮನಾಗಿದೆ.

9. $\dfrac{1 - \tan^2\left(\frac{\pi}{4} - A\right)}{1 + \tan^2\left(\frac{\pi}{4} - A\right)} = \sin 2A$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

ಈಗ, $\dfrac{1 - \tan^2\theta}{1 + \tan^2\theta} = \cos 2\theta$ ಎಂಬುದು ನಮಗೆ ತಿಳಿದಿದೆ.

$$\therefore \frac{1-\tan^2\left(\frac{\pi}{4}-A\right)}{1+\tan^2\left(\frac{\pi}{4}-A\right)} = \cos\left(\frac{\pi}{2}-2A\right)$$

$$= \sin 2A.$$

10. $\sec\left(\frac{\pi}{4}+\theta\right)\sec\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right) = 2\sec 2\theta$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

ತೋರಿಸಬೇಕಾಗಿರುವ ಸಮೀಕರಣದ ಎಡಭಾಗ

$$\sec\left(\frac{\pi}{4}+\theta\right)\sec\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right) = \frac{1}{\cos\left(\frac{\pi}{4}+\theta\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right)}$$

$$= \frac{1}{\left[\cos\frac{\pi}{4}\cos\theta - \sin\frac{\pi}{4}\sin\theta\right]\left[\cos\frac{\pi}{4}\cos\theta + \sin\frac{\pi}{4}\sin\theta\right]}$$

$$= \frac{1}{\left[\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\theta - \frac{1}{\sqrt{2}}\sin\theta\right]\left[\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\theta + \frac{1}{\sqrt{2}}\sin\theta\right]}$$

$$= \frac{1}{\frac{1}{2}\left[\cos^2\theta - \sin^2\theta\right]}$$

$$\frac{1}{\frac{1}{2}\cos 2\theta} = \frac{2}{\cos 2\theta}$$

$$= 2\sec 2\theta$$

11. $\tan\left(45^\circ + \frac{A}{2}\right) = \frac{\sqrt{1+\sin A}}{\sqrt{1-\sin A}} = \sec A + \tan A$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

ಸಮೀಕರಣದ ಮೊದಲನೇ ಪದವನ್ನು ಪರಿಗಣಿಸಿ :

$$\tan\left(45^\circ + \frac{A}{2}\right) = \frac{\tan 45^\circ + \tan\frac{A}{2}}{1 - \tan 45^\circ \tan\frac{A}{2}}$$

$$= \frac{1 + \tan\frac{A}{2}}{1 - \tan\frac{A}{2}}$$

$$= \frac{1 + \dfrac{\sin\frac{A}{2}}{\cos\frac{A}{2}}}{1 - \dfrac{\sin\frac{A}{2}}{\cos\frac{A}{2}}}$$

$$= \frac{\cos\frac{A}{2} + \sin\frac{A}{2}}{\cos\frac{A}{2} - \sin\frac{A}{2}}$$

$$= \left[\frac{\left(\cos\frac{A}{2} + \sin\frac{A}{2}\right)^2}{\left(\cos\frac{A}{2} - \sin\frac{A}{2}\right)^2}\right]^{1/2}$$

$$= \left[\frac{\cos^2\frac{A}{2} + \sin^2\frac{A}{2} + 2\cos\frac{A}{2}\sin\frac{A}{2}}{\cos^2\frac{A}{2} + \sin^2\frac{A}{2} - 2\cos\frac{A}{2}\sin\frac{A}{2}}\right]^{1/2}$$

$$= \frac{\sqrt{1 + \sin A}}{\sqrt{1 - \sin A}}$$

ಅಂದರೆ, ಮೊದಲನೇ ಪದವು ಎರಡನೇ ಪದಕ್ಕೆ ಸಮನಾಗಿದೆ. ಈಗ ಎರಡನೇ ಪದವನ್ನು ಪರಿಗಣಿಸಿ :

$$\left[\frac{1+\sin A}{1-\sin A}\right]^{1/2} = \left[\frac{1+\sin A}{1-\sin A} \times \frac{1+\sin A}{1+\sin A}\right]^{1/2}$$

$$= \left[\frac{(1+\sin A)^2}{1-\sin^2 A}\right]^{1/2}$$

$$= \left[\frac{(1+\sin A)^2}{\cos^2 A}\right]^{1/2}$$

$$= \frac{1+\sin A}{\cos A} = \frac{1}{\cos A} + \frac{\sin A}{\cos A}$$

$$= \sec A + \tan A$$

ಅಂದರೆ, ಎರಡನೇ ಪದವು ಮೂರನೇ ಪದಕ್ಕೆ ಸಮನಾಗಿದೆ.

12. $2\sin\frac{A}{2} = \pm\sqrt{1+\sin A} \pm \sqrt{1-\sin A}$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

ಕೆಳಕಂಡ ವಿಸ್ತರಣೆಯನ್ನು ಪರಿಗಣಿಸಿ:

$$\left(\sin\frac{A}{2} + \cos\frac{A}{2}\right)^2 = \sin^2\frac{A}{2} + \cos^2\frac{A}{2} + 2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}$$

ಅಥವಾ $\left(\sin\frac{A}{2} + \cos\frac{A}{2}\right)^2 = 1 + \sin A$

ಹಾಗೂ

$$\left(\sin\frac{A}{2} - \cos\frac{A}{2}\right)^2 = 1 - \sin A$$

$$\sin\frac{A}{2} + \cos\frac{A}{2} = \pm\sqrt{1+\sin A} \quad \text{.... (1)}$$

$$\sin\frac{A}{2} - \cos\frac{A}{2} = \pm\sqrt{1 - \sin A} \qquad \text{.... (2)}$$

ಫಲಿತಾಂಶಗಳಾದ (1) ಮತ್ತು (2) ಇವುಗಳನ್ನು ಕೂಡಿಸಿದಾಗ

$$2\sin\frac{A}{2} = \pm\sqrt{1 + \sin A} \pm \sqrt{1 - \sin A}$$

ಎಂದು ದೊರೆಯುತ್ತದೆ.

13. $2\tan\alpha = 3\tan\beta$ ಆದರೆ

$\tan(\alpha - \beta) = \dfrac{\sin 2\beta}{5 - \cos 2\beta}$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

ಈಗ, $\tan(\alpha - \beta) = \dfrac{\tan\alpha - \tan\beta}{1 + \tan\alpha \tan\beta}$ ಎಂದು ತಿಳಿದಿದೆ.

$$= \frac{\frac{3}{2}\tan\beta - \tan\beta}{1 + \frac{3}{2}\tan\beta\tan\beta} \qquad \left[\because \tan\alpha = \frac{3}{2}\tan\beta\right]$$

$$= \frac{\sin\beta\cos\beta}{2\cos^2\beta + 3\sin^2\beta}$$

$$= \frac{\sin\beta\cos\beta}{(1 + \cos 2\beta) + 3\left(\frac{1 - \cos 2\beta}{2}\right)}$$

$$= \frac{2\sin\beta\cos\beta}{5 - \cos 2\beta} = \frac{\sin 2\beta}{5 - \cos 2\beta}.$$

ಅಭ್ಯಾಸ-11.6

1. (i) $\cos\alpha = \frac{15}{17}$ (ii) $\sin\alpha = \frac{4}{5}$ (iii) $\tan\alpha = \frac{5}{12}$ ಆದಾಗ $\cos 2\alpha$ ದ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

2. $\frac{\sin 3\theta}{1 + 2\cos 2\theta} = \sin\theta$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ. ಈ ಸೂತ್ರವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ $\sin 15°$ಯ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

3. $5\sin^3\alpha \cos 3\alpha + 4\cos^3\alpha \sin 3\alpha = 3\sin 4\alpha$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

4. $\frac{\sec 8A - 1}{\sec 4A - 1} = \frac{\tan 8A}{\tan 2A}$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

5. $\tan\theta = \frac{b}{a}$ ಆದರೆ $a\cos 2\theta + b\sin 2\theta$ ದ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

6. $2\cos\frac{A}{2} = \pm\sqrt{1 + \sin A} \pm \sqrt{1 - \sin A}$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

7. $\cos\theta = \frac{\cos u - e}{1 - e\cos u}$ ಆದರೆ $\tan\frac{\theta}{2} = \left[\frac{1 + e}{1 - e}\right]^{1/2} \tan\frac{u}{2}$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

8. $\tan^2\left(45° + \frac{\theta}{2}\right) = \frac{a}{b}$ ಆದರೆ $\sin\theta = \frac{a - b}{a + b}$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

9. $\sec^2 A\,(1 + \sec 2A)\; 2\sec 2A$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

10. $\cos 4\alpha = 1 - 8\sin^2\alpha + 8\sin^4\alpha$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

11. $\tan 2A - \tan A = \frac{2\sin A}{\cos A + \cos 3A}$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

12. $\frac{1 + \sin\theta - \cos\theta}{1 + \sin\theta + \cos\theta} = \tan\frac{\theta}{2}$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

13. $2\cos x = a + \frac{1}{a}$ ಆದರೆ $2\cos 2x = a^2 + \frac{1}{a^2}$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

14. $\frac{\cos\theta}{1 + \sin\theta} = \tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}\right)$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

15. $(\cos\alpha + \cos\beta)^2 + (\sin\alpha + \sin\beta)^2 = 4\cos^2\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right)$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

16. $\tan 75° - \tan 30° - \tan 30° \tan 75° = 1$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

17. $\dfrac{\cos 3A + \sin 3A}{\cos A - \sin A} = 1 + 2\sin 2A$ ತೋರಿಸಿ.

18. $\dfrac{1}{\tan 3\theta} + \dfrac{1}{\tan\theta} = \dfrac{1}{\cot 3\theta + \cot\theta} = \cot 4\theta$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

19. $\dfrac{1-\cos 3\theta}{1-\cos\theta} = (1 + 2\cos\theta)^2$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

20. $\cos^6 A - \sin^6 A = \cos 2A\left[1 - \dfrac{1}{4}\sin^2 2A\right]$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

21. $\tan A \tan(60° + A)\tan(120° + A) = -\tan 3A$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

22. $\dfrac{1+\sin^2\theta-\cos^2\theta}{1+\sin^2\theta+\cos^2\theta} = \tan\theta$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

11.4.4 ತ್ರಿಕೋನಮಿತೀಯ ಪ್ರಮಾಣಗಳ ಪರಿವರ್ತನ ಸೂತ್ರಗಳು

ತ್ರಿಕೋನಮಿತೀಯ ಉತ್ಪನ್ನಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧಗಳನ್ನು ತ್ರಿಕೋನಮಿತೀಯ ಮೊತ್ತ (ಅಥವಾ ವ್ಯತ್ಯಾಸ) ಗಳನ್ನಾಗಿ ಅಪವರ್ತಿಸುವ ಈ ಕೆಳಗಿನ ಸೂತ್ರಗಳು ನಮಗೆ ಈಗಾಗಲೇ ತಿಳಿದಿದೆ.

$$\sin(A + B) = \sin A\cos B + \cos A\sin B \quad \text{...(i)}$$

$$\sin(A - B) = \sin A\cos B - \cos A\sin B \quad \text{...(ii)}$$

$$\cos(A + B) = \cos A\cos B - \sin A\sin B \quad \text{...(iii)}$$

$$\cos(A - B) = \cos A\cos B + \sin A\sin B \quad \text{...(iv)}$$

ಈ ಮೇಲಿನ ಸೂತ್ರಗಳನ್ನು ಕೂಡುವುದರಿಂದ ಮತ್ತು ಕಳೆಯುವುದರಿಂದ

(i) + (ii) : $2\sin A\cos B = \sin(A + B) + \sin(A - B)$

(i) – (ii) : $2\cos A\sin B = \sin(A + B) - \sin(A - B)$

(iii) + (iv) : $2\cos A\cos B = \cos(A + B) + \cos(A - B)$

(iii) – (iv) : $-2\sin A\sin B = \cos(A + B) - \cos(A - B)$

ಎಂಬ ಸೂತ್ರಗಳು ಉಂಟಾಗುತ್ತವೆ.

ಈ ಮೇಲಿನ ಸೂತ್ರಗಳು ತ್ರಿಕೋನಮಿತೀಯ ಉತ್ಪನ್ನಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧವನ್ನು ತ್ರಿಕೋನಮಿತೀಯ ಪ್ರಮಾಣಗಳ ಮೊತ್ತ (ಅಥವಾ ವ್ಯತ್ಯಾಸ)ವನ್ನಾಗಿ ಬರೆಯುವ ಕ್ರಮವನ್ನು ತಿಳಿಸುತ್ತವೆ.

ಈಗ, ಮೇಲಿನ ಸೂತ್ರಗಳಲ್ಲಿ

$A + B = C$ ಮತ್ತು $A - B = D$ ಎಂದು ಬರೆದಾಗ

$A = \dfrac{C+D}{2}$ ಮತ್ತು $B = \dfrac{C-D}{2}$ ಎಂದಾಗುತ್ತದೆ.

ಆಗ, ಮೇಲಿನ ಸೂತ್ರಗಳನ್ನು ಹೀಗೆ ಬರೆಯಬಹುದು :

$$\sin C + \sin D = 2\sin\left(\frac{C+D}{2}\right)\cos\left(\frac{C-D}{2}\right)$$

$$\sin C - \sin D = 2\cos\left(\frac{C+D}{2}\right)\sin\left(\frac{C-D}{2}\right)$$

$$\cos C + \cos D = 2\cos\left(\frac{C+D}{2}\right)\cos\left(\frac{C-D}{2}\right)$$

$$\cos C - \cos D = -2\sin\left(\frac{C+D}{2}\right)\sin\left(\frac{C-D}{2}\right)$$

$$= 2\sin\left(\frac{C+D}{2}\right)\sin\left(\frac{D-C}{2}\right)$$

ಈ ಸೂತ್ರಗಳು ತ್ರಿಕೋನಮಿತೀಯ ಉತ್ಪನ್ನಗಳ ಮೊತ್ತ (ಅಥವಾ ವ್ಯತ್ಯಾಸ)ವನ್ನು ತ್ರಿಕೋನಮಿತೀಯ ಉತ್ಪನ್ನಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧವಾಗಿ ಪರಿವರ್ತಿಸುವುದು. ಈ ಮೇಲೆ ಚರ್ಚಿಸಿದ ಸೂತ್ರಗಳನ್ನು **ಪರಿವರ್ತನ ಸೂತ್ರಗಳು** ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ.

ಉದಾಹರಣೆಗಳು

ಈ ಕೆಳಗಿನವುಗಳನ್ನು ತ್ರಿಕೋನಮಿತೀಯ ಪ್ರಮಾಣಗಳ ಮೊತ್ತ ಅಥವಾ ವ್ಯತ್ಯಾಸಗಳನ್ನಾಗಿ ಬರೆಯಿರಿ.

(i) $\cos 70^\circ \cos 50^\circ$

(ii) $\sin 30^\circ \cos 20^\circ$

(iii) $2\cos 2\theta \sin\theta$

(iv) $\sin 11\theta \sin 3\theta$

(i) $2\cos A \cos B = \cos(A+B) + \cos(A-B)$ ಎಂದು ತಿಳಿದಿದೆ.

$$\therefore \cos A \cos B = \frac{1}{2}[\cos(A+B) + \cos(A-B)]$$

$$\therefore \cos 70^\circ \cos 50^\circ = \frac{1}{2}[\cos(70^\circ + 50^\circ) + \cos(70^\circ - 50^\circ)]$$

$$= \frac{1}{2}[\cos 120^\circ + \cos 20^\circ] = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2} + \cos 20^\circ\right)$$

(ii) $2\sin A \cos B = \sin(A + B) + \sin(A - B)$ ಎಂದು ತಿಳಿದಿದೆ.

$$\therefore \sin 30^\circ \cos 20^\circ = \frac{1}{2}[\sin(30^\circ + 20^\circ) + \sin(30^\circ - 20^\circ)]$$

$$= \frac{1}{2}[\sin 50^\circ + \sin 10^\circ]$$

(iii) $2\cos A \sin B = \sin(A + B) - \sin(A - B)$ ಎಂದು ತಿಳಿದಿದೆ.

$$\therefore 2\cos 2\theta \sin\theta = \sin(2\theta + \theta) - \sin(2\theta - \theta)$$

$$= \sin 3\theta - \sin\theta$$

(iv) $-2\sin A \sin B = \cos(A + B) - \cos(A - B)$ ಎಂದು ತಿಳಿದಿದೆ.

$$\therefore \sin A \sin B = -\frac{1}{2}[\cos(A + B) - \cos(A - B)]$$

$$\therefore \sin 11\theta \sin 3\theta = \frac{-1}{2}[\cos(11\theta + 3\theta] - \cos(11\theta - 3\theta)]$$

$$= -\frac{1}{2}[\cos 14\theta - \cos 8\theta]$$

2. ಈ ಕೆಳಗಿನ ತ್ರಿಕೋನಮಿತೀಯ ಪ್ರಮಾಣಗಳ ಮೊತ್ತ (ಅಥವಾ ವ್ಯತ್ಯಾಸವನ್ನು) ತ್ರಿಕೋನಮಿತೀಯ ಪ್ರಮಾಣಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧವಾಗಿ ಪರಿವರ್ತಿಸಿ.

(i) $\cos 58^\circ - \cos 60^\circ$

(ii) $\sin\frac{x}{2} - \sin\frac{y}{2}$

(iii) $\cos 120^\circ + \cos 10^\circ$

(iv) $\cos 28^\circ - \sin 20^\circ$

(i) $\cos C - \cos D = -2\sin\frac{C+D}{2}\sin\frac{C-D}{2}$ ಎಂದು ತಿಳಿದಿದೆ.

$$\therefore \cos 58° - \cos 60° = -2\sin\frac{58° + 60°}{2}\sin\frac{58° - 60°}{2}$$

$$= -2\sin 59°\sin(-1°)$$

$$= 2\sin 59°\sin 1° \quad [\because \sin(-\theta) = -\sin\theta]$$

(ii) $\sin C - \sin D = 2\cos\frac{C+D}{2}\sin\frac{C-D}{2}$ ಎಂದು ತಿಳಿದಿದೆ.

$$\therefore \sin\frac{x}{2} - \sin\frac{y}{2} = 2\cos\frac{\frac{x}{2}+\frac{y}{2}}{2}\sin\frac{\frac{x}{2}-\frac{y}{2}}{2}$$

$$= 2\cos\frac{x+y}{4}\sin\frac{x-y}{4}$$

(iii) $\cos C + \cos D = 2\cos\frac{C+D}{2}\cos\frac{C-D}{2}$ ಎಂದು ತಿಳಿದಿದೆ.

$$\therefore \cos 120° + \cos 10° = 2\cos\frac{120° + 10°}{2}\cos\frac{120° - 10°}{2}$$

$$= 2\cos 65°\cos 55°$$

(iv) $\cos 28° - \sin 20°$ ನಲ್ಲಿ $\sin 20°$ ಯನ್ನು

$$\sin 20° = \cos(90° - 20°) \quad [\because \cos(90° - \theta) = \sin\theta]$$

$$= \cos 70°$$

ಎಂದು ಬರೆಯಬಹುದು.

$$\therefore \cos 28° - \sin 20° = \cos 28° - \cos 70°$$

$$= -2\sin\frac{28° + 70°}{2}\sin\frac{28° - 70°}{2}$$

$$= -2\sin 49°\sin(-21°)$$

$$= 2\sin 49°\sin 21°$$

3. $\dfrac{\sin A + \sin 3A + \sin 5A + \sin 7A}{\cos A + \cos 3A + \cos 5A + \cos 7A} = \tan 4A$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

ತೋರಿಸಬೇಕಾಗಿರುವ ಸಮೀಕರಣದ ಎಡಭಾಗ

$$\frac{\sin A + \sin 3A + \sin 5A + \sin 7A}{\cos A + \cos 3A + \cos 5A + \cos 7A}$$

$$= \frac{\left[2\sin\frac{3A + A}{2} . \cos\frac{3A - A}{2}\right] + \left[2\sin\frac{7A + 5A}{2} . \cos\frac{7A - 5A}{2}\right]}{\left[2\cos\frac{3A + A}{2} . \cos\frac{3A - A}{2}\right] + \left[2\cos\frac{7A + 5A}{2} . \cos\frac{7A - 5A}{2}\right]}$$

$$= \frac{2\sin 2A \cos A + 2\sin 6A \cos A}{2\cos 2A \cos A + 2\cos 6A \cos A}$$

$$= \frac{2\cos A\,(\sin 2A + \sin 6A)}{2\cos A\,(\cos 2A + \cos 6A)}$$

$$= \frac{\sin 6A + \sin 2A}{\cos 6A + \cos 2A}$$

$$= \frac{2\sin\frac{6A + 2A}{2} . \cos\frac{6A - 2A}{2}}{2\cos\frac{6A + 2A}{2} . \cos\frac{6A - 2A}{2}}$$

$$= \frac{2\sin 4A \cos 2A}{2\cos 4A \cos 2A}$$

$= \tan 4A$, ಬಲಭಾಗ.

4. $\dfrac{\sin 8\theta \cos\theta - \cos 3\theta \sin 6\theta}{\cos 2\theta \cos\theta - \sin 3\theta \sin 4\theta} = \tan 2\theta$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

ಈಗ, $\sin 8\theta \cos\theta = \frac{1}{2}[\sin 9\theta + \sin 7\theta]$

$$\cos 3\theta \sin 6\theta = \frac{1}{2}[\sin 9\theta + \sin 3\theta]$$

$$\cos 2\theta \cos\theta = \frac{1}{2}[\cos 3\theta + \cos\theta]$$

$$\sin 3\theta \sin 4\theta = -\frac{1}{2}[\cos 7\theta - \cos\theta]$$

ಇವುಗಳನ್ನು ಲೆಕ್ಕದ ಎಡ ಭಾಗದಲ್ಲಿ ಉಪಯೋಗಿಸಿದಾಗ

$$\frac{\frac{1}{2}[\sin 9\theta + \sin 7\theta - \sin 9\theta - \sin 3\theta]}{\frac{1}{2}[\cos 3\theta + \cos\theta + \cos 7\theta - \cos\theta]}$$

$$= \frac{[\sin 7\theta - \sin 3\theta]}{[\cos 7\theta + \cos 3\theta]}$$

$$= \frac{2\cos 5\theta \sin 2\theta}{2\cos 5\theta \cos 2\theta} = \tan 2\theta.$$

5. $\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma - \sin(\alpha+\beta+\gamma) = 4\sin\frac{(\alpha+\beta)}{2}\sin\frac{(\beta+\gamma)}{2}\sin\frac{(\gamma+\alpha)}{2}$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

ಸಮೀಕರಣದ ಎಡಭಾಗ :

$$[\sin\alpha + \sin\beta] + [\sin\gamma - \sin(\alpha+\beta+\gamma)]$$

$$= 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} + 2\cos\frac{\alpha+\beta+2\gamma}{2}\sin\frac{\gamma-\alpha-\beta-\gamma}{2}$$

$$= 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} - 2\cos\frac{\alpha+\beta+2\gamma}{2}\sin\frac{\alpha+\beta}{2}$$

$$= 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\left[\cos\frac{(\alpha-\beta)}{2} - \cos\frac{(\alpha+\beta+2\gamma)}{2}\right]$$

$$= 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\left[-2\sin\frac{\alpha-\beta+\alpha+\beta+2\gamma}{4}\sin\frac{\alpha-\beta-\alpha-\beta-2\gamma}{4}\right]$$

$$= 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\left[-2\sin\frac{\alpha+\gamma}{2}\sin\frac{(-\beta-\gamma)}{2}\right]$$

$$= 4\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha+\gamma}{2}\ \sin\frac{\beta+\gamma}{2} \qquad [\because \sin(-\theta) = -\sin\theta].$$

6. $\cos 20^\circ \cos 40^\circ \cos 60^\circ \cos 80^\circ = \dfrac{1}{16}$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

ಸಮೀಕರಣದ ಎಡಭಾಗ

$\cos 20^\circ \cos 40^\circ \cos 60^\circ \cos 80^\circ$

$$= \cos 20^\circ \cos 40^\circ \frac{1}{2} \cos 80^\circ \qquad \left[\because \cos 60^\circ = \frac{1}{2}\right]$$

$$= \frac{1}{2}[(\cos 20^\circ \cos 40^\circ) \cos 80^\circ]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}(\cos 60^\circ + \cos 20^\circ)\cos 80^\circ\right]$$

$$= \frac{1}{4}\left[\left(\frac{1}{2} + \cos 20^\circ\right)\cos 80^\circ\right]$$

$$= \frac{1}{4}\left[\frac{1}{2}\cos 80^\circ + \cos 80^\circ \cos 20^\circ\right]$$

$$= \frac{1}{4}\left[\frac{1}{2}\cos 80^\circ + \frac{1}{2}\{\cos 100^\circ + \cos 60^\circ\}\right]$$

$$= \frac{1}{8}\left[\cos 80^\circ + \cos 100^\circ + \frac{1}{2}\right]$$

$$= \frac{1}{8}\left[\cos 80^\circ - \cos 80^\circ + \frac{1}{2}\right] \qquad [\because \cos(180^\circ - \theta) = -\cos\theta]$$

$$= \frac{1}{16}.$$

7. $\dfrac{\cos 9^\circ + \sin 9^\circ}{\cos 9^\circ - \sin 9^\circ} = \tan 54^\circ$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

ಸಮೀಕರಣದ ಎಡಭಾಗ

$$\frac{\cos 9^\circ + \cos 81^\circ}{\cos 9^\circ - \cos 81^\circ} \left[\because \sin 9^\circ = \sin(90^\circ - 81^\circ) = \cos 81^\circ\right]$$

$$= \frac{2\cos 45^\circ \cos 36^\circ}{2\sin 45^\circ \sin 36^\circ}$$

$$= \frac{2.\frac{1}{\sqrt{2}}\cos 36^\circ}{2.\frac{1}{\sqrt{2}}\sin 36^\circ} = \cot 36^\circ$$

$$= \tan(90^\circ - 36^\circ)$$

$$= \tan 54^\circ.$$

8. A, B, C ಗಳು ತ್ರಿಕೋನ ABCಯ ಕೋನಗಳಾದರೆ

$\sin^2 A + \sin^2 B - \sin^2 C = 2\sin A \sin B \cos C$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

ಸಮೀಕರಣದ ಎಡಭಾಗ

$$\sin^2 A + \sin^2 B - \sin^2 C$$

$$= \frac{1}{2}(1 - \cos 2A) + \frac{1}{2}(1 - \cos 2B) - \frac{1}{2}(1 - \cos 2C)$$

$$= \frac{1}{2}[1 - \cos 2A - \cos 2B + \cos 2C]$$

$$= \frac{1}{2}\left[1 - (\cos 2A + \cos 2B) + 2\cos^2 C - 1\right]$$

$$\left[\because \cos 2C = 2\cos^2 C - 1\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[1 - 2\cos(A + B)\cos(A - B) + 2\cos^2 C - 1\right]$$

$$\left[\because A + B = 180° - C,\ \cos(A + B) = -\cos C\right],$$

$= \cos C\cos(A - B) + \cos^2 C$

$= \cos C\ [\cos (A - B) + \cos C\ ]$

$= \cos C\ [\cos (A - B) - \cos (A + B)]$

$= \cos C\ [2 \sin A \sin B]$

$= 2 \sin A \sin B \cos C$, ಸಮೀಕರಣದ ಬಲಭಾಗ.

9. ABC ತ್ರಿಕೋನದಲ್ಲಿ

$\cos 2A + \cos 2B + \cos 2C = -[1 + 4 \cos A \cos B \cos C]$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

ಸಮೀಕರಣದ ಎಡಭಾಗ

$\cos 2A + \cos 2B + \cos 2C$

$= 2\cos(A + B)\cos(A - B) + 2\cos^2 C - 1$

$= -2\cos C\cos(A - B) + 2\cos^2 C - 1$

$$\left[\because \cos(A + B) = -\cos C\right]$$

$= -1 - 2 \cos C\ [\cos (A - B) - \cos C]$

$= -1 - 2 \cos C\ [\cos (A - B) + \cos (A + B)]$

$= -1 - 2 \cos C\ [2\cos A \cos B]\}$

$= 1 - 4 \cos A \cos B \cos C$

$= -[1 + 4 \cos A \cos B \cos C]$, ಸಮೀಕರಣದ ಬಲಭಾಗ

10. ABC ತ್ರಿಕೋನದಲ್ಲಿ

$\sin A + \sin B - \sin C = 4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

ಸಮೀಕರಣದ ಎಡಭಾಗ

$\sin A + \sin B - \sin C$

$= 2\sin\frac{A + B}{2}\cos\frac{A - B}{2} - \sin C$

ಈಗ, $A + B + C = 180°$ ಆಗಿರುವುದರಿಂದ

$$A + B = 180° - C \text{ ಅಥವಾ } \frac{A+B}{2} = 90° - \frac{C}{2}$$

$$\therefore \sin\frac{A+B}{2} = \sin\left(90° - \frac{C}{2}\right) = \cos\frac{C}{2}.$$

ಮತ್ತು $\sin C = 2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}$ ಆಗಿರುವುದರಿಂದ

$\therefore \sin A + \sin B - \sin C$

$$= 2\cos\frac{C}{2}\cos\frac{A-B}{2} - 2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}$$

$$= 2\cos\frac{C}{2}\left[\cos\frac{A-B}{2} - \sin\frac{C}{2}\right]$$

$$= 2\cos\frac{C}{2}\left[\cos\frac{A-B}{2} - \cos\frac{A+B}{2}\right]$$

$$= 2\cos\frac{C}{2}\left[2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\right]$$

$= 4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$, ಬಲಭಾಗ.

$$\because \sin\frac{C}{2} = \sin\left[\frac{180° - (A+B)}{2}\right]$$

$$= \sin\left[90° - \frac{A+B}{2}\right]$$

$$= \cos\frac{A+B}{2}$$

11. ABC ತ್ರಿಕೋನದಲ್ಲಿ

$\cos A \sin(B - C) + \cos B \sin(C - A) + \cos C \sin(A - B) = 0$

ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

ಈಗ, $\cos A \sin(B - C) = \cos[180 - (B + C)] \sin(B - C)]$

$$= -\cos(B+C)\sin(B - C) \quad = -\frac{1}{2}[\sin 2B - \sin 2C] \quad ...(1)$$

ಇದೇ ರೀತಿಯಾಗಿ

$$\cos B \sin(C-A) = \frac{-1}{2}[\sin 2C - \sin 2A] \quad ...(2)$$

$$\cos C \sin(A-B) = -\frac{1}{2}[\sin 2A - \sin 2B] \quad ...(3)$$

ಫಲಿತಾಂಶಗಳಾದ (1), (2), (3) ಇವುಗಳನ್ನು ಕೂಡಿಸಿದಾಗ ನಮಗೆ ಬೇಕಾದ ಫಲಿತಾಂಶ ಸಿಗುತ್ತದೆ.

12. $y \sin A = x \sin(2B + A)$ ಆದರೆ

$(x + y) \cot(A + B) = (y - x) \cot B$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

ಈಗ, $y \sin A = x \sin(2B + A)$

ಎಂದು ಕೊಟ್ಟಿದೆ.

$$\therefore \frac{y}{x} = \frac{\sin(2B + A)}{\sin A}$$

ಆದ್ದರಿಂದ, "ಕಾಂಪೊನೆಂಡೊ-ಎಟ್-ಡಿವಿಡೆಂಡೊ" ನಿಯಮದಿಂದ

$$\frac{y + x}{y - x} = \frac{\sin(2B + A) + \sin A}{\sin(2B + A) - \sin A}$$

$$= \frac{2\sin(A + B)\cos B}{2\cos(A + B)\sin B}$$

$$= \tan(A + B)\cot B$$

$$= \frac{\cot B}{\cot(A + B)}$$

ಅಥವಾ $(x + y)\cot(A + B) = (y - x)\cot B.$

ಅಭ್ಯಾಸ - 11.7

1. ಈ ಕೆಳಗಿನವುಗಳನ್ನು ತ್ರಿಕೋನಮಿತೀಯ ಉತ್ಪನ್ನಗಳ ಮೊತ್ತ ಅಥವಾ ವ್ಯತ್ಯಾಸಗಳಾಗಿ ಬರೆಯಿರಿ.
   (i) $2\cos 6\theta \sin 4\theta$
   (ii) $2\sin\frac{3\theta}{2}\sin\frac{5\theta}{2}$
   (iii) $\cos\theta\cos 7\theta$
   (iv) $\cos 3\theta \sin 5\theta$
2. ಈ ಕೆಳಗಿನವುಗಳನ್ನು ತ್ರಿಕೋನಮಿತೀಯ ಉತ್ಪನ್ನಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧವಾಗಿ ಬರೆಯಿರಿ.
   (i) $\sin 5x + \sin x$
   (ii) $\cos 4\theta - \cos 2\theta$
   (iii) $\cos 100° + \cos 140°$
   (iv) $\sin 31° + \cos 61°$

ಈ ಕೆಳಗಿನವುಗಳನ್ನು ತೋರಿಸಿ :

3. $\dfrac{\sin A + \sin 2A}{\cos A - \cos 2A} = \cot\dfrac{A}{2}$
4. $\cos 2\theta \cos\dfrac{\theta}{2} - \cos 3\theta \cos\dfrac{9\theta}{2} = \sin 5\theta \sin\dfrac{5\theta}{2}$
5. $\dfrac{\sin 8\theta \cos\theta - \sin 6\theta \cos 3\theta}{\cos 2\theta \cos\theta - \sin 3\theta \sin 4\theta} = \tan 2\theta$
6. $\dfrac{(\cos\theta - \cos 3\theta)(\sin 8\theta + \sin 2\theta)}{(\sin 5\theta - \sin\theta)(\cos 4\theta - \cos 6\theta)} = 1$
7. $\sin 50° - \sin 70° + \sin 10° = 0$
8. $\cos(36° - A)\cos(36° + A) + \cos(54° + A)\cos(54° - A) = \cos 2A$
9. $(\cos\alpha + \cos\beta)^2 + (\sin\alpha + \sin\beta)^2 = 4\cos^2\left(\dfrac{\alpha - \beta}{2}\right)$
10. $\sin 10° - \sin 70° + \cos 40° = 0$

11. $\cos(\alpha+\beta+\gamma)\ \cos(\beta+\gamma-\alpha)\ +\cos(\gamma+\alpha-\beta)\ +\cos(\alpha+\beta-\gamma)$

$=4\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma$

12. $4\sin\alpha\ \sin\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)\sin\left(\alpha+\frac{2\pi}{3}\right)=\sin3\alpha$

13. $\cos52^\circ+\cos68^\circ+\cos172^\circ=0$

14. $\cos15^\circ-\sin15^\circ=\frac{1}{\sqrt{2}}$

15. $\cos A+\cos(120^\circ+A)+\cos(120^\circ-A)=0$

16. $\alpha+\beta=\gamma$ ಆದರೆ

$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1+2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma$

17. $\sin x+\sin y=a, \cos x+\cos y=b$ ಆದರೆ $\sin(x+y)=\frac{2ab}{a^2+b^2}$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

18. $\sin20^\circ\sin40^\circ\sin60^\circ\sin80^\circ=\frac{3}{16}$

19. $\sin10^\circ\sin30^\circ\sin50^\circ\sin70^\circ=\frac{1}{16}$

20. $\cos10^\circ\cos50^\circ\cos70^\circ=\frac{\sqrt{3}}{8}$

21. $\tan(A+30^\circ)+\cot(A-30^\circ)=\frac{1}{\sin2A-\sin60^\circ}$

22. $\frac{\cos17^\circ+\sin17^\circ}{\cos17^\circ-\sin17^\circ}=\tan62^\circ$

23. $\tan2A-\tan A=\frac{2\sin A}{\cos A+\cos3A}$

24. $\sin\alpha = n\sin(\alpha + 2\beta)$ ಆದರೆ, $\tan(\alpha + \beta) = \dfrac{1 + n}{1 - n}\tan\beta$

25. $\sin^2 12° + \sin^2 21° + \sin^2 39° + \sin^2 48° = 1 + \sin^2 9° + \sin^2 18°$

26. $\sin x + \sin y = a$ ಮತ್ತು $\cos x + \cos y = b$ ಆದರೆ $\cos(x + y) = \dfrac{b^2 - a^2}{b^2 + a^2}$

ABC ತ್ರಿಕೋನದಲ್ಲಿ ಈ ಕೆಳಗಿನವುಗಳನ್ನು ಸಾಧಿಸಿ.

27. $\cos 2A - \cos 2B + \cos 2C = 1 - 4\sin A\cos B\sin C$

28. $\sin A + \sin B + \sin C = 4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$

29. $\sin^2\frac{A}{2} - \sin^2\frac{B}{2} + \sin^2\frac{C}{2} = 1 - 2\cos\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$

30. $\cos A + \cos B - \cos C = -1 + 4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$

31. $\cos^2 A + \cos^2 B - \cos^2 C = 1 - 2\sin A\sin B\cos C$

32. $\cos^2 2A + \cos^2 2B + \sin^2 2C = 2 + 2\sin 2A\sin 2B\cos 2C$

33. $\cos\frac{A}{2} + \cos\frac{B}{2} + \cos\frac{C}{2} = 4\cos\frac{B + C}{4}\cos\frac{C + A}{4}\cos\frac{A + B}{4}$

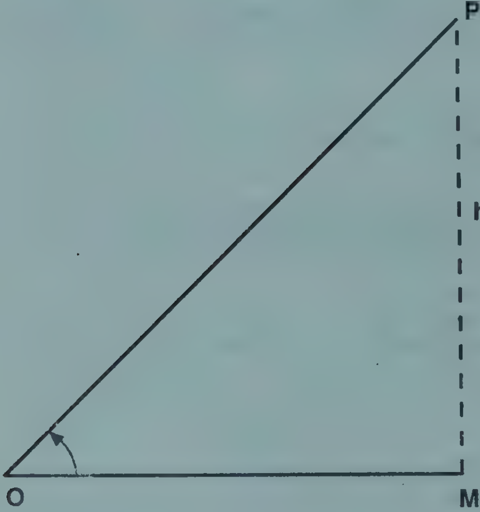
34. $\cot\frac{A}{2} + \cot\frac{B}{2} + \cot\frac{C}{2} = \cot\frac{A}{2}\cot\frac{B}{2}\cot\frac{C}{2}$

35. $A + B + C = \frac{\pi}{2}$ ಆದರೆ

$\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C + 2\sin A\sin B\sin C = 1$.

11.5 ಎತ್ತರಗಳು ಮತ್ತು ದೂರಗಳು

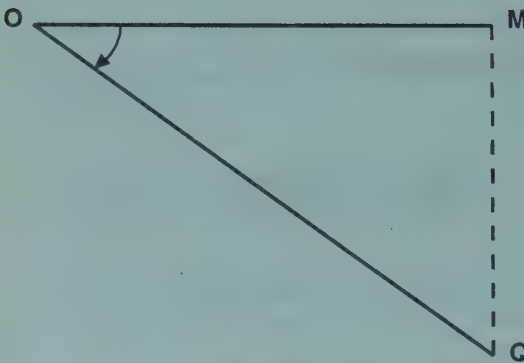
ಒಂದು ವಸ್ತುವಿನ ಎತ್ತರ ಮತ್ತು ದೂರವನ್ನು ನಿರ್ದಿಷ್ಟವಾಗಿ ಅಳೆಯುವ ಬದಲು ತ್ರಿಕೋನಮಿತೀಯ ಪ್ರಮಾಣಗಳಿಂದ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದು. ಇಂಥ ಸಮಸ್ಯೆಗಳನ್ನು ಬಿಡಿಸಲು ಈ ಕೆಳಗಿನ ಎರಡು ಪದಗಳ ಅರ್ಥಗಳನ್ನು ತಿಳಿಯಬೇಕು.



ಚಿತ್ರ 11.44

ಉನ್ನತ ಕೋನ : OM ಒಂದು ಕ್ಷಿತಿಜ ರೇಖೆ. ವೀಕ್ಷಕನು O ಎಂಬಲ್ಲಿ ವಸ್ತು P ಯನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸುತ್ತಾನೆ. ವಸ್ತು P ಯು OM ನಿಂದ ಅಂದರೆ ಕ್ಷಿತಿಜ ರೇಖೆಯಿಂದ h ಎತ್ತರ ದಲ್ಲಿರುತ್ತದೆ. O ಮತ್ತು P ಯನ್ನು ಸೇರಿಸಿದಾಗ MOP ಕೋನವು ರಚಿಸಲ್ಪಡುತ್ತದೆ. $\angle MOP$ ಕೋನವನ್ನು ಉನ್ನತ ಕೋನವೆಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ (ಚಿತ್ರ 11.44).

ಒಂದು ವಸ್ತುವು ಕ್ಷಿತಿಜ ರೇಖೆ OM ಗಿಂತ ಮೇಲೆ P ಎಂಬಲ್ಲಿದ್ದರೆ ಆಗ OM ಮತ್ತು OP ಗಳಿಂದ ಏರ್ಪಟ್ಟ $\angle MOP$ ಕೋನಕ್ಕೆ ಉನ್ನತ ಕೋನ ಎಂದು ಹೆಸರು.



ಚಿತ್ರ 11.45

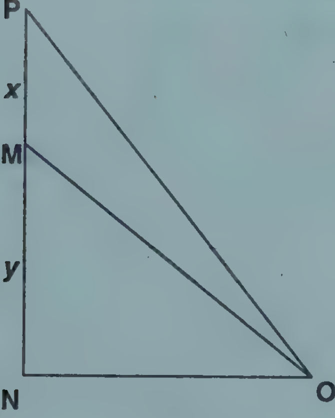
ಅವನತ ಕೋನ : ಒಂದು ವಸ್ತುವು ಕ್ಷಿತಿಜ ರೇಖೆ OM ಗಿಂತ ತಗ್ಗಿನಲ್ಲಿ Q ಎಂಬಲ್ಲಿದ್ದರೆ ಆಗ OM ಮತ್ತು OQ ಗಳಿಂದ ಏರ್ಪಟ್ಟ $\angle MOQ$ ಕೋನಕ್ಕೆ ಅವನತ ಕೋನ ಎಂದು ಹೆಸರು (ಚಿತ್ರ 11.45).

ಯಾವಾಗಲೂ ಉನ್ನತ ಕೋನ ಅಥವಾ ಅವನತ ಕೋನವು ಕ್ಷಿತಿಜ ರೇಖೆ ಮತ್ತು ವೀಕ್ಷಕನ ಹಾಗೂ ವಸ್ತುವಿನ ನಡುವಿನ ರೇಖೆಗಳಿಂದ ಏರ್ಪಟ್ಟ ಕೋನವಾಗಿರುತ್ತದೆ.

ಉದಾಹರಣೆಗಳು

1. ಒಂದು ನೇರವಾದ ಧ್ವಜ ಸ್ತಂಭವನ್ನು ಒಂದು ಕಟ್ಟಡದ ತುದಿಯ ಮೇಲೆ ನಿಲ್ಲಿಸಲಾಗಿದೆ. ಧ್ವಜಸ್ತಂಭದ ಶಿಖರದ ಉನ್ನತ ಕೋನವು 60° ಮತ್ತು ಕಟ್ಟಡದ ತುದಿಯ ಉನ್ನತ ಕೋನವು 45°. ವೀಕ್ಷಕನು ಕಟ್ಟಡದ ಬುಡದಿಂದ 20 ಮೀ.

ದೂರದಲ್ಲಿರುವ ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ವೀಕ್ಷಿಸುತ್ತಾನೆ. ಧ್ವಜಸ್ತಂಭದ ಎತ್ತರವನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.



ಚಿತ್ರ 11.46

ಚಿತ್ರ 11.46 ನಲ್ಲಿ

PM = ಧ್ವಜ ಸ್ತಂಭ $= x$

ಮತ್ತು MN = ಕಟ್ಟಡ $= y$ ಆಗಿರಲಿ.

$\angle NOP = 60°$

$\angle NOM = 45°$

$ON = 20$ ಮೀ.

ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಕೋನ PON ನಲ್ಲಿ

$$\tan\angle NOP = \frac{PN}{ON}$$

ಅಂದರೆ, $\tan 60° = \frac{x+y}{20}$

ಅಥವಾ $\sqrt{3} = \frac{x+y}{20}$

$$20\sqrt{3} = x + y \qquad \text{... (1)}$$

ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಕೋನ NOM ನಲ್ಲಿ

$$\tan\angle NOM = \tan 45° = \frac{MN}{ON}$$

ಅಂದರೆ, $1 = \frac{y}{20}$ ಅಥವಾ $y = 20$ ಮೀ. ... (2)

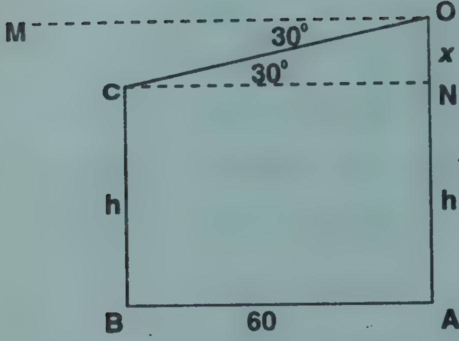
ಈಗ (2) ನ್ನು (1) ರಲ್ಲಿ ಬಳಸಿದಾಗ

$$x + 20 = 20\sqrt{3}$$

ಅಥವಾ $x = 20\sqrt{3} - 20 = 20(\sqrt{3} - 1)$

ಅಂದರೆ, ಧ್ವಜಸ್ತಂಭದ ಎತ್ತರ $20(\sqrt{3} - 1)$ ಮೀ.

2. ಎರಡು ಗೋಪುರಗಳ ನಡುವಿನ ಅಂತರ 60 ಮೀಟರ್. ಎರಡನೇ ಗೋಪುರದ ಶಿಖರದಿಂದ ಮೊದಲನೇ ಗೋಪುರದ ಶಿಖರವನ್ನು ನೋಡಿದಾಗ, ಅವನತ ಕೋನವು 30°. ಎರಡನೇ ಗೋಪುರದ ಎತ್ತರ 150ಮೀಟರ್ ಇದ್ದರೆ ಮೊದಲನೇ ಗೋಪುರದ ಎತ್ತರವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. (ಚಿತ್ರ 11.47)



ಚಿತ್ರ 11.47

2ನೇ ಗೋಪುರ $OA = 150$ ಮೀ.

ಒಂದನೇ ಗೋಪುರ $BC = h$ ಮೀ.

$BA = 60$ ಮೀ. (ಚಿತ್ರ 11.47)

ಅವನತ ಕೋನ $\angle MOC = 30°$

ಈಗ $OA = AN + NO$

$= h + x$..

ONC ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಕೋನದಲ್ಲಿ

$$\tan 30° = \frac{ON}{CN}$$

ಅಂದರೆ, $\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{x}{60}$ $[\because CN = AB = 60]$

ಅಥವಾ $\frac{60}{\sqrt{3}} = x$

ಈಗ, $OA = h + x$

$$\therefore 150 = h + \frac{60}{\sqrt{3}}$$

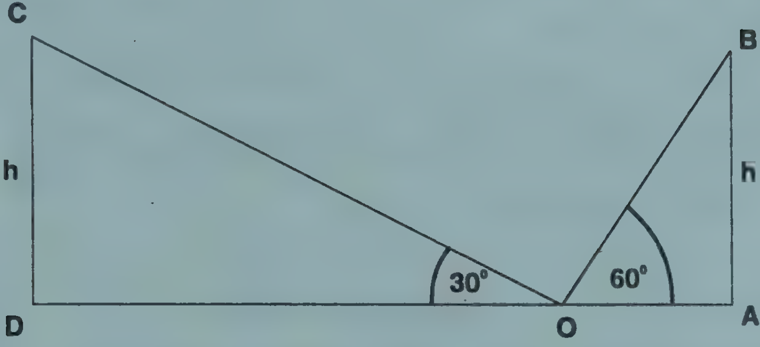
ಅಥವಾ $150 - \frac{60}{\sqrt{3}} = h$

ಅಥವಾ $150 - \frac{60}{\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = h$

ಅಥವಾ $150 - 20\sqrt{3} = h$

ಆದ್ದರಿಂದ ಮೊದಲನೇ ಗೋಪುರದ ಎತ್ತರ $(150 - 20\sqrt{3})$ ಮೀ.

3. ಒಂದು ರಸ್ತೆಯ ಎರಡು ಬದಿಗಳಲ್ಲಿ ಒಂದೇ ಎತ್ತರದ ಎರಡು ಕಂಬಗಳಿವೆ. ಅವುಗಳ ಬುಡಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸುವ ರಸ್ತೆಯು 100ಮೀ ಅಗಲವಾಗಿದೆ. ಈ ರಸ್ತೆಯಲ್ಲಿ ಒಬ್ಬನು ನಿಂತು ನೋಡಿದಾಗ ಕಂಬಗಳ ಉನ್ನತ ಕೋನಗಳು 60° ಮತ್ತು 30° ಆಗಿದ್ದರೆ ಕಂಬಗಳ ಎತ್ತರ ಮತ್ತು ವೀಕ್ಷಕನ ಸ್ಥಾನವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.



ಚಿತ್ರ 11.48

AB ಮತ್ತು CD ಎರಡು ಕಂಬಗಳಾಗಿದ್ದು,

ಅವುಗಳ ಎತ್ತರ

$AB = DC = h$ ಆಗಿರಲಿ.

$AD = 100$ ಮೀ.

$OA = x$ ಆಗಿರಲಿ (ಚಿತ್ರ 11.48) ಆಗ

$OD = 100 - x.$

OAB ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಕೋನದಲ್ಲಿ

$$\tan 60^\circ = \frac{AB}{OA}$$

ಅಂದರೆ, $\sqrt{3} = \dfrac{h}{x}$

ಅಥವಾ $x\sqrt{3} = h$ ... (1)

COD ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಕೋನದಲ್ಲಿ

$$\tan 30^\circ = \frac{CD}{OD}$$

ಅಂದರೆ, $\dfrac{1}{\sqrt{3}} = \dfrac{h}{100 - x}$

ಅಥವಾ $100 - x = h\sqrt{3}$ ... (2)

(1) ಮತ್ತು (2) ರಿಂದ

$$100 - x = x\sqrt{3}(\sqrt{3})$$

ಅಥವಾ $100 - x = 3x$

ಅಥವಾ $x = 25$ ಮೀ.

(1) ರಿಂದ, $h = x\sqrt{3}$

$\therefore h = 25\sqrt{3}$ ಮೀ.

ಅಂದರೆ, ಕಂಬದ ಎತ್ತರ $25\sqrt{3}$ ಮೀ. ಮತ್ತು ವೀಕ್ಷಕನು ರಸ್ತೆಯಲ್ಲಿ ಒಂದು ಕಂಬದಿಂದ 25 ಮೀ. ದೂರದಲ್ಲಿ ನಿಂತಿರುವನು.

ಅಭ್ಯಾಸ - 11.8

1. ಸೂರ್ಯನ ಉನ್ನತಿಯು $45°$ ಇದ್ದಾಗ 50 ಮೀ. ಎತ್ತರವಿರುವ ಕಟ್ಟಡವು ಎಷ್ಟು ದೂರದವರೆಗೆ ನೆರಳನ್ನು ಚಾಚುವುದು?

2. ಒಂದು ಗೋಪುರವು ಬೆಟ್ಟದ ಮೇಲೆ ಇದೆ. ವೀಕ್ಷಕನು ಬೆಟ್ಟದ ಬುಡದಿಂದ 300 ಮೀ. ದೂರದಲ್ಲಿ ನೋಡಿದಾಗ ಗೋಪುರದ ಶಿಖರ ಮತ್ತು ಬುಡದ ಉನ್ನತ ಕೋನಗಳು $60°$ ಮತ್ತು $30°$ ಆಗಿರುವುವು. ಬೆಟ್ಟದ ಎತ್ತರ ಮತ್ತು ಗೋಪುರದ ಎತ್ತರವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

3. ವೀಕ್ಷಕನು ದಾರಿಯಲ್ಲಿ ನಡೆಯುತ್ತಿರುವಾಗ ಎರಡು ಕ್ರಮಾನುಗತ ಕಿಲೋಮೀಟರ್ ಕಲ್ಲುಗಳ ಬದಿಯಿಂದ ಬೆಟ್ಟವನ್ನು ನೋಡಿದಾಗ ಅದರ ಉನ್ನತ ಕೋನಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ $30°$ ಮತ್ತು $60°$ ಆಗಿರುತ್ತವೆ. ಬೆಟ್ಟದ ಎತ್ತರವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

4. ಒಂದು ಗೋಪುರದ ತುದಿಯ ಉನ್ನತ ಕೋನಗಳು x ಮತ್ತು y ಮೀ. ದೂರದಲ್ಲಿ (ಅದರ ಬುಡದ ದಾರಿಯಲ್ಲಿ) ನೋಡಿದಾಗ ಆ ಕೋನಗಳು ಅನುಪೂರಕ ಆಗಿವೆ. ಗೋಪುರದ ಎತ್ತರವು $\sqrt{xy}$ ಮೀ. ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

5. ಒಂದು ದೀಪಸ್ತಂಭದ ಮೇಲಿನಿಂದ ಎರಡು ಹಡಗುಗಳನ್ನು ನೋಡಿದಾಗ (ಪೂರ್ವ ದಿಕ್ಕಿನ ನೀರದಲ್ಲಿ) ಅವನತ ಕೋನಗಳು $45°$ ಮತ್ತು $30°$. ಎರಡು ಹಡಗುಗಳ ಮಧ್ಯದ ಅಂತರ 100 ಮೀ. ಇದ್ದರೆ ದೀಪಸ್ತಂಭದ ಎತ್ತರವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

6. ಗಾಳಿಯಿಂದಾಗಿ ಒಂದು ಮರದ ಮೇಲಿನ ಭಾಗವು ತುಂಡಾಗಿ ಅದು ನೆಲಕ್ಕೆ ಬಾಗಿ $60°$ ಕೋನವನ್ನು ನೆಲದ ಮೇಲೆ ಮೂಡಿರುತ್ತದೆ. ಮರದ ಬುಡದಿಂದ ಅದು ಕೆಳಕ್ಕೆ ತುಂಡಾಗಿ ನೆಲದ ಮೇಲೆ ಬಿದ್ದಿರುವ ಸ್ಥಳಕ್ಕೆ 10 ಮೀಟರ್ ದೂರ ಇದ್ದರೆ ಮರವು ಎಷ್ಟು ಎತ್ತರವಿತ್ತು?

7. ಒಂದು ನೇರವಾದ ರಸ್ತೆಯ ಮೇಲಕ್ಕೆ (ಲಂಬವಾಗಿ) ವಿಮಾನ ಹಾರುತ್ತಿರುವಾಗ ಎರಡು ಕ್ರಮಾನುಗತ ಕಿಲೋಮಿಟರ್ ಕಲ್ಲುಗಳ ಅವನತ ಕೋನಗಳು α ಮತ್ತು β ಆಗಿ ಕಾಣುವುವು. ಆ ವಿಮಾನವು ರಸ್ತೆಯ ಮೇಲಕ್ಕೆ $\dfrac{\tan\alpha \tan\beta}{\tan\alpha + \tan\beta}$ ಎತ್ತರದಲ್ಲಿದೆ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

8. ಒಂದು ಕಂಬದ ನೆರಳು ಅದರ ಎತ್ತರದ $\sqrt{3}$ರಷ್ಟು ಇದ್ದರೆ ಸೂರ್ಯನ ಉನ್ನತಿಯು ಎಷ್ಟು ಇರುವುದು ಎಂದು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

9. ಸೂರ್ಯನ ಉನ್ನತಿಯು 30°ಯಿಂದ 45°ಗೆ ಹೆಚ್ಚಿದಾಗ ಒಂದು ಗೋಪುರದ ನೆರಳು 60 ಮಿಟರ್ ಜಾಸ್ತಿಯಾಗುತ್ತದೆ. ಗೋಪುರದ ಎತ್ತರ $30(1+\sqrt{3})$ ಮಿ. ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

10. ನದಿಯಿಂದ h ಮಿಟರ್ ಎತ್ತರದಲ್ಲಿ ಮೋಡವನ್ನು ನೋಡಿದಾಗ ಅದರ ಉನ್ನತ ಕೋನವು β ಆಗಿರುತ್ತದೆ. ನೀರಿನಲ್ಲಿ ಅದರ ಪ್ರತಿಫಲಿತವನ್ನು ನೋಡಿದಾಗ ಅದರ ಅವನತ ಕೋನವು α ಆಗಿರುತ್ತದೆ. ಮೋಡದ ಎತ್ತರ $h \sin(\alpha + \beta) \operatorname{cosec} (\alpha - \beta)$ ಮೀ. ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

11.6 ತ್ರಿಕೋನಮಿತೀಯ ಉತ್ಪನ್ನಗಳ ಬೆಲೆಗಳಲ್ಲಿ ಆಗುವ ವ್ಯತ್ಯಾಸಗಳು

ತ್ರಿಕೋನಮಿತೀಯ ಉತ್ಪನ್ನಗಳ ಬೆಲೆಗಳಲ್ಲಿ ಆಗುವ ವ್ಯತ್ಯಾಸವನ್ನು ಸುಲಭವಾಗಿ ಅವುಗಳ ಗ್ರಾಫಿನಿಂದ ತಿಳಿಯಬಹುದು. x - ಅಕ್ಷದಲ್ಲಿ ಕೋನಗಳನ್ನು, y -ಅಕ್ಷದಲ್ಲಿ ತ್ರಿಕೋನಮಿತೀಯ ಉತ್ಪನ್ನಗಳ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಸೂಚಿಸುವುದು.

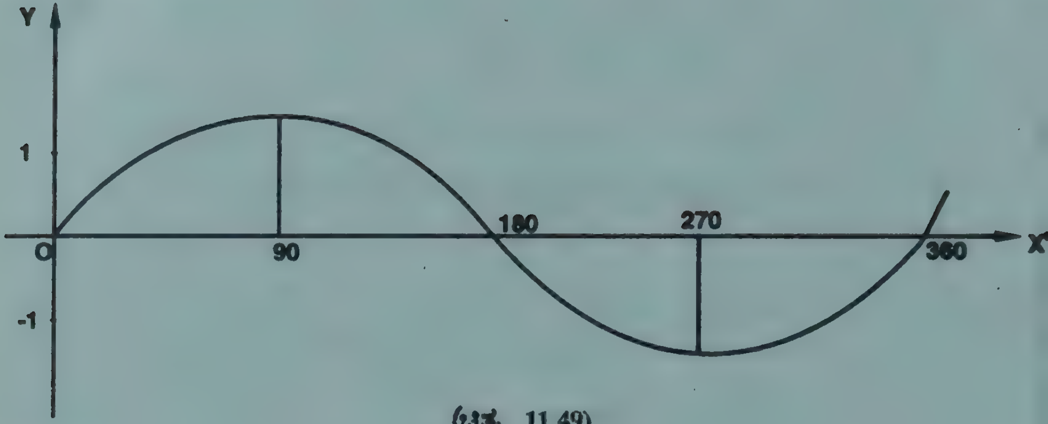
ತ್ರಿಕೋನಮಿತೀಯ ಉತ್ಪನ್ನಗಳ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಈ ಕೆಳಗೆ ಪಟ್ಟಿ ಮಾಡಲಾಗಿದೆ.

(i) $y = \sin\theta$

θ	0	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°
sin θ	0	0.5	0.7071	0.8660	1	0.8660	0.7071	0.5	0

θ	210°	240°	270°	300°	330°	360°
sinθ	– 0.5	– 0.8660	– 1	– 0.8660	– 0.5	0

ಒಂದನೇ ಪಾದದಲ್ಲಿ θವು 0° ಯಿಂದ 90° ಮಧ್ಯೆ ಇರುವಾಗ sinθವು ಧನಾತ್ಮಕವಾಗಿರುತ್ತದೆ. ಮತ್ತು ಅದರ ಬೆಲೆಯು 0 ಇಂದ 1 ರ ತನಕ ಹೆಚ್ಚಾಗುತ್ತದೆ. ಎರಡನೇ ಪಾದದಲ್ಲಿ θವು 90°ಯಿಂದ 180°ಗೆ ಬದಲಾವಣೆಯಾದಾಗ sinθದ ಬೆಲೆಯು ಕಡಿಮೆಯಾಗುತ್ತದೆ. ಆದರೆ ಅದು ಧನಾತ್ಮಕವಾಗಿರುತ್ತದೆ. ಅದರ ಬೆಲೆಯು 1 ರಿಂದ 0 ಬೆಲೆಗೆ ಕಡಿಮೆಯಾಗುತ್ತದೆ. 3ನೇ ಪಾದದಲ್ಲಿ θವು 180°ಯಿಂದ 270°ವರೆಗೆ ಹೆಚ್ಚಾಗುತ್ತದೆ. 4ನೇ ಪಾದದಲ್ಲಿ θವು 270°ಯಿಂದ 360°ಗೆ ಬದಲಾವಣೆಯಾದಾಗ sinθವು – 1 ರಿಂದ 0 ಬೆಲೆಯನ್ನು ಹೊಂದುತ್ತದೆ. ಹೀಗೆ sinθದ ವಕ್ರರೇಖೆಯು ಅವಿಚ್ಛಿನ್ನವಾಗಿದೆ. ಇದು 360° ಆದನಂತರ ಪುನರಾವರ್ತನೆಗೊಳ್ಳುತ್ತದೆ (ಚಿತ್ರ 11.49).



(ಚಿತ್ರ 11.49)

ಗಮನಿಸಿ :

(i) $\sin\theta$ ದ ಗರಿಷ್ಠ ಬೆಲೆ $+1$ ಮತ್ತು ಕನಿಷ್ಠ ಬೆಲೆ -1 ;

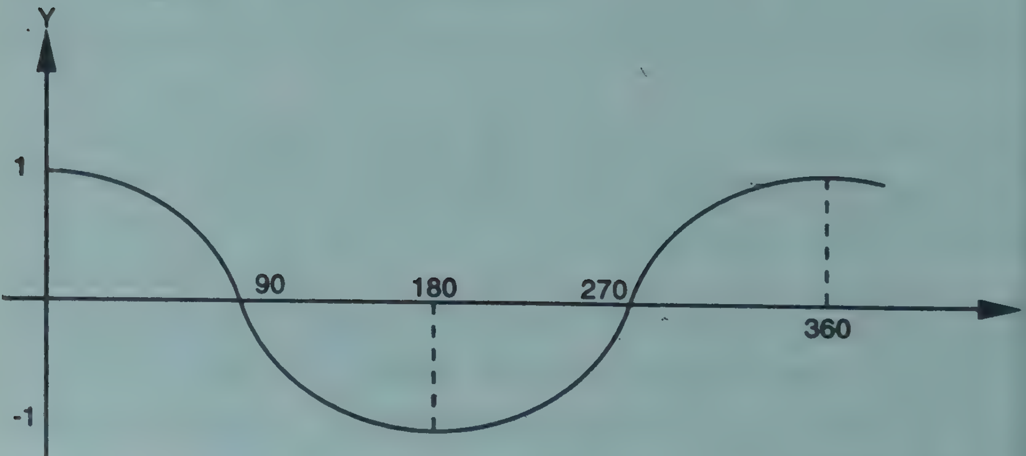
(ii) $\sin\theta$ ದ ಬೆಲೆಯಲ್ಲಿ ವಿಚ್ಛಿನ್ನತೆ ಇಲ್ಲ; ಮತ್ತು

(iii) $\sin\theta$ ಒಂದು ಆವರ್ತಕ ಉತ್ಪನ್ನ; ಇದರ ಅವಧಿ 2π.

(ii) $y = \cos\theta$

θ	0	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°
cosθ	1	0.8660	0.7071	0.5	0	– 0.5	– 0.7071	–0.8660	– 1

θ	210°	225°	270°	300°	330°	360°
cosθ	– 0.8660	– 0.7071	0	0.5	0.8660	1



ಚಿತ್ರ 11.50

ಒಂದನೇ ಪಾದದಲ್ಲಿ θವು 0° ಇಂದ 90° ವರೆಗೆ ಹೆಚ್ಚಾದಾಗ cosθವು 1 ರಿಂದ 0 ವರೆಗೆ ಕಮ್ಮಿಯಾಗುತ್ತದೆ. 2ನೇ ಪಾದದಲ್ಲಿ θವು 90°ಯಿಂದ 180°ವರೆಗೆ ಹೆಚ್ಚಾದಾಗ cosθವು ಋಣಾತ್ಮಕವಾಗಿರುತ್ತದೆ. ಅಲ್ಲದೆ ಅದರ ಬೆಲೆಯು 0 ಇಂದ −1 ವರೆಗೆ ಕಮ್ಮಿಯಾಗುತ್ತದೆ. 3ನೇ ಪಾದದಲ್ಲಿ θವು 180°ಯಿಂದ 270° ವರೆಗೆ ಬದಲಾವಣೆಯಾದಾಗ cosθವು ಋಣಾತ್ಮಕವಾಗುತ್ತದೆ. ಅದು −1 ರಿಂದ 0 ವರೆಗೆ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಹೊಂದಿರುತ್ತದೆ. 4ನೇ ಪಾದದಲ್ಲಿ θವು 270°ಯಿಂದ 360° ತನಕ ಹೆಚ್ಚಾದಾಗ cosθ ಬೆಲೆಯು ಧನಾತ್ಮಕವಾಗಿರುತ್ತದೆ. ಹೀಗೆ cosθದ ವಕ್ರರೇಖೆಯು ಅವಿಚ್ಛಿನ್ನವಾಗಿದೆ. ಇದು 360° ಆದನಂತರ ಪುನಾರವರ್ತನೆಗೊಳ್ಳುತ್ತದೆ (ಚಿತ್ರ 11.50).

ಗಮನಿಸಿ :

(i) cosθ ದ ಗರಿಷ್ಠ ಬೆಲೆ +1 ಮತ್ತು ಕನಿಷ್ಠ ಬೆಲೆ −1 ;

(ii) cosθ ದ ವಕ್ರರೇಖೆಯಲ್ಲಿ ವಿಚ್ಛಿನ್ನತೆ ಇಲ್ಲ; ಮತ್ತು

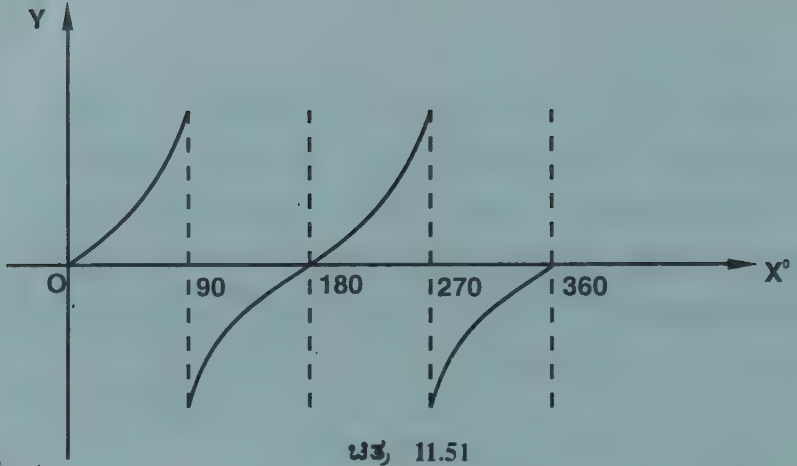
(iii) cosθ ಉತ್ಪನ್ನವು ಆವರ್ತಕವಾಗಿದೆ; ಇದರ ಅವಧಿ 2π

(iii) $y = \tan\theta$

θ	0	30°	45°	60°	89°	90°	91°	120°	135°	150°
tanθ	0	0.5774	1	1.732	57.29	∞	− 57.29	− 1.732	− 1	-0.5774

θ	180°	210°	225°	269°	270°	271°	360°
tanθ	0	0.5774	1	57.29	∞	− 57.29	0

θ ವು 0 ಇಂದ 90° ವರೆಗೆ ಬದಲಾವಣೆಯಾದಾಗ tanθ ವು 0 ಇಂದ ∞ ವರೆಗೆ ಹೆಚ್ಚುತ್ತದೆ. ಮೇಲಿನ ಪಟ್ಟಿಯಲ್ಲಿ ಕೊಟ್ಟಂತೆ θ ವು 89° ಯಿಂದ 90°ಗೆ ಬದಲಾವಣೆಯಾದಾಗ ಅದರ ಬೆಲೆ ಅತೀ ಹೆಚ್ಚಾಗುವುದು ಮತ್ತು ಧನಾತ್ಮಕವಾಗಿರುತ್ತದೆ. ಆದುದರಿಂದ ಅದರ ಗ್ರಾಫಿನಲ್ಲಿ θ = 90° ಇದ್ದಾಗ ವಿಚ್ಛಿನ್ನತೆ ಇದೆ. θವು 2ನೇ ಪಾದದಲ್ಲಿ ಇದ್ದಾಗ ಅದರ ಬೆಲೆ ಋಣಾತ್ಮಕವಾಗಿರುತ್ತದೆ. θ ವು 180° ಇದ್ದಾಗ tanθದ ಬೆಲೆ 0 ಆಗಿರುತ್ತದೆ. 3ನೇ ಪಾದದಲ್ಲಿ θ ವು 180°ಯಿಂದ 270°ಯ ಸಮೀಪಕ್ಕೆ ಹೆಚ್ಚಾದಾಗ tanθವು ಧನಾತ್ಮಕವಾಗಿರುತ್ತದೆ. ಅದರ ಬೆಲೆಯು ಹೆಚ್ಚುತ್ತದೆ. ಅದು 269°ಯಿಂದ 270°ಗೆ ಬದಲಾವಣೆ ಆದಾಗ tanθದ ಅತೀ ಹೆಚ್ಚಾಗಿ ಅನಂತವನ್ನು (∞ ಯನ್ನು) ಹೊಂದುತ್ತದೆ. 4ನೇ ಪಾದದಲ್ಲಿ θ ವು 270°ಯಿಂದ ಸ್ವಲ್ಪ ಜಾಸ್ತಿಯಾದಾಗ ಅದರ ಬೆಲೆ ಋಣಾತ್ಮಕವಾಗುತ್ತದೆ. ಆದುದರಿಂದ ಅದರ ಗ್ರಾಫಿನಲ್ಲಿ ಪುನಃ ವಿಚ್ಛಿನ್ನತೆ ಕಂಡುಬರುತ್ತದೆ. θ ವು 360°ವರೆಗೆ ಹೆಚ್ಚಾದಾಗ tanθದ ಬೆಲೆಯು ಹೆಚ್ಚಾಗಿ 0 ವನ್ನು ತಲುಪುತ್ತದೆ.



ಚಿತ್ರ 11.51

ಗಮನಿಸಿ :

(i) $\tan\theta$ ದ ಬೆಲೆ $-\infty$ ಇಂದ $+\infty$ ವರೆಗೆ ಅಪರಿಮಿತವಾಗಿರುತ್ತದೆ;

(ii) ಇದರ ನಕ್ಷೆಯಲ್ಲಿ $\theta = 90°$ ಮತ್ತು $\theta = 270°$ ಇದ್ದಾಗ ವಿಚ್ಛಿನ್ನತೆ ಇದೆ ; ಮತ್ತು

(iii) $\tan\theta$ ಉತ್ಪನ್ನವು ಆವರ್ತಕವಾಗಿದ್ದು ಅದರ ಅವಧಿಯು π ಆಗಿದೆ.

ಅಧ್ಯಾಯ 12

ತ್ರಿಕೋನದ ಭುಜಗಳ ಮತ್ತು ಕೋನಗಳ ನಡುವಿನ ಸಂಬಂಧ

ಒಂದು ತ್ರಿಕೋನದ ಮೂರು ಭುಜಗಳಿಗೂ ಮತ್ತು ಮೂರು ಕೋನಗಳಿಗೂ ಸ್ಪಷ್ಟವಾದ ಸಂಬಂಧಗಳಿವೆ. ಈ ಸೂತ್ರಗಳನ್ನು ಸಾಧಿಸುವ ಮೊದಲು ಕೆಲವು ಸಂಕೇತಗಳನ್ನು ನಾವು ತಿಳಿದುಕೊಳ್ಳೋಣ.

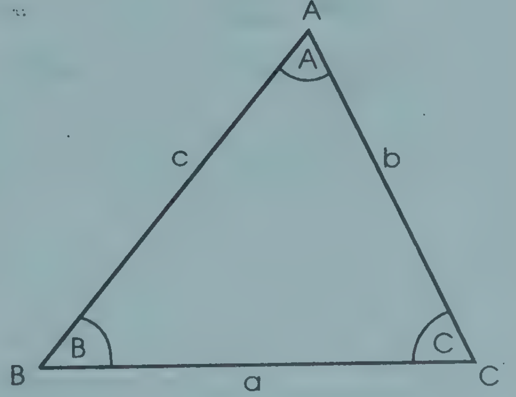
12.1 ತ್ರಿಕೋನದ ಆರು ಮೂಲಾಂಶಗಳು

ABC ತ್ರಿಕೋನದ ಮೂರು ಕೋನಗಳನ್ನು A,B,C ಎಂದು ಸೂಚಿಸುತ್ತೇವೆ. ಈ ಕೋನಗಳ ಎದುರಿನ ಭುಜಗಳನ್ನು ಕ್ರಮವಾಗಿ a,b,c ಎಂದು ಸೂಚಿಸುತ್ತೇವೆ. ಅಂದರೆ $BC = a$, $CA = b$ ಮತ್ತು $AB = c$ (ಚಿತ್ರ 12.1).

ತ್ರಿಕೋನದ ಅರ್ಧ ಸುತ್ತಳತೆಯನ್ನು

$$\frac{a+b+c}{2} = s$$

ಅಥವಾ $a + b + c = 2s$ ಎಂದು ಸೂಚಿಸುತ್ತೇವೆ.



ಚಿತ್ರ 12.1

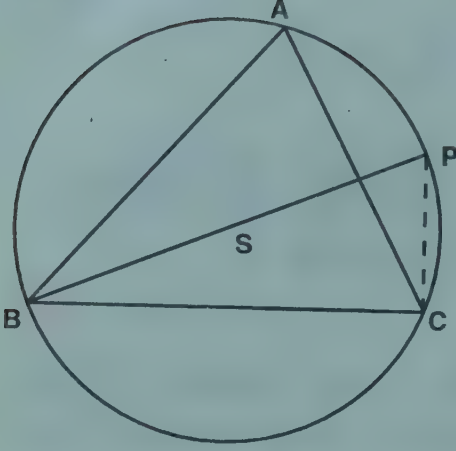
1. sine ನಿಯಮ

ಯಾವುದೇ ತ್ರಿಕೋನ ABC ಯಲ್ಲಿ

$$\boxed{\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R}$$

ಇಲ್ಲಿ R ತ್ರಿಕೋನದ ಪರಿತ್ರಿಜ್ಯ.

(i) ABC ತ್ರಿಕೋನದಲ್ಲಿ A ಯು ಒಂದು ಲಘುಕೋನವಾಗಿರಲಿ. ತ್ರಿಕೋನದ ಪರಿಕೇಂದ್ರವು S ಆಗಿರಲಿ (ಚಿತ್ರ 12.2).



ಚಿತ್ರ 12.2

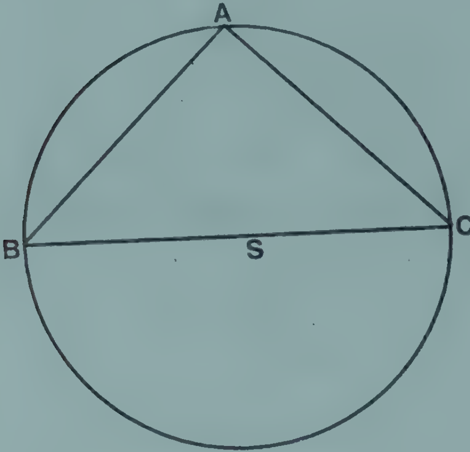
B ಮತ್ತು S ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಜೋಡಿಸಿ, BS ರೇಖೆಯು ಪರಿವೃತ್ತವನ್ನು P ಯಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುವಂತೆ ವೃದ್ಧಿಸಿ. PC ಯನ್ನು ಜೋಡಿಸಿ. ಈಗ, $\angle BPC = \angle A$ ಮತ್ತು $\angle BCP = 90°$

ಆದ್ದರಿಂದ, BPC ತ್ರಿಕೋನದಲ್ಲಿ, $\sin\angle BPC = \dfrac{BC}{BP}$

ಅಥವಾ $\sin A = \dfrac{a}{2r}$

ಅಥವಾ $\dfrac{a}{\sin A} = 2R$ ... (1)

(ii) ABC ತ್ರಿಕೋನದಲ್ಲಿ A ಯು ಒಂದು ಲಂಬಕೋನವಾಗಿರಲಿ (ಚಿತ್ರ 12.3).



ಚಿತ್ರ 12.3

ಅಂದರೆ, $\angle A = 90°$. ಇಲ್ಲಿ,

$BC = a = 2R$

ಅಥವಾ $\dfrac{a}{1} = 2R$

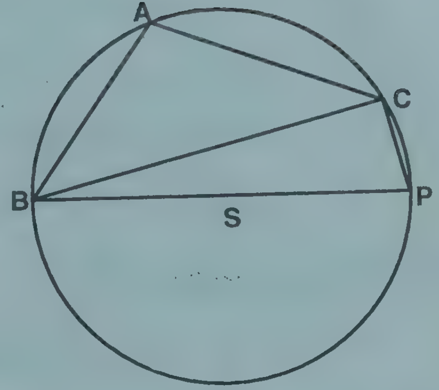
ಅಥವಾ $\dfrac{a}{\sin 90°} = 2R$

$\therefore \dfrac{a}{\sin A} = 2R$ ... (2)

(iii) ABC ತ್ರಿಕೋನದಲ್ಲಿ A ಯು ಒಂದು ಅಧಿಕಕೋನವಾಗಿರಲಿ. B ಮತ್ತು S ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಜೋಡಿಸಿ, BS ರೇಖೆಯು ಪರಿವೃತ್ತವನ್ನು P ಯಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುವಂತೆ ವೃದ್ಧಿಸಿ. PC ಯನ್ನು ಜೋಡಿಸಿ (ಚಿತ್ರ 12.4).

$ABPC$ ಯು ಒಂದು ಚಕ್ರೀಯ ಚತುರ್ಭುಜ. ಆದ್ದರಿಂದ, $\angle A + \angle BPC = 180°$

ಅಥವಾ $\angle BPC = 180° - A$



ಚಿತ್ರ 12.4

BPC ತ್ರಿಕೋನದಲ್ಲಿ, $\angle BCP = 90°$.

ಆದ್ದರಿಂದ $\sin\angle BPC = \dfrac{BC}{BP}$

ಅಥವಾ $\sin(180° - A) = \dfrac{a}{2R}$

ಅಥವಾ $\sin A = \dfrac{a}{2R}$ ... (3)

ಹೀಗೆ, (1) (2) (3) ಗಳಿಂದ ಎಲ್ಲಾ ಸಂದರ್ಭಗಳಲ್ಲಿಯೂ $\dfrac{a}{\sin A} = 2R$.

ಇದೇ ರೀತಿ, $\dfrac{b}{\sin B} = 2R$ ಮತ್ತು $\dfrac{c}{\sin C} = 2R$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಬಹುದು.

$\therefore \dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C} = 2R.$

ಸೂಚನೆ : ಮೇಲಿನ ಫಲಿತಾಂಶದಿಂದಾಗಿ $a = 2R \sin A$, $b = 2R \sin B$ ಮತ್ತು $c = 2R \sin C$ ಎಂದು ಬರೆಯಬಹುದು.

2. cosine ನಿಯಮ

ಯಾವುದೇ ತ್ರಿಕೋನ ABC ಯಲ್ಲಿ

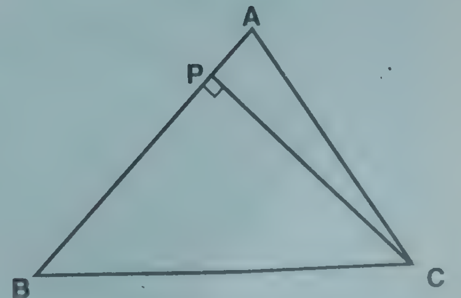
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$
$$b^2 = c^2 + a^2 - 2ca \cos B$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$$

(i) ABC ತ್ರಿಕೋನದಲ್ಲಿ A ಯು ಒಂದು ಲಘುಕೋನವಾಗಿರಲಿ. CP ಯನ್ನು AB ಗೆ ಲಂಬವಾಗಿ ಎಳೆಯಿರಿ (ಚಿತ್ರ 12.5). BPC ತ್ರಿಕೋನದಲ್ಲಿ

$$BC^2 = BP^2 + PC^2$$

ಅಥವಾ $a^2 = (BA - AP)^2 + PC^2$

$= BA^2 + AP^2 - 2AB.AP + PC^2$



ಚಿತ್ರ 12.5

$= BA^2 + (AP^2 + PC^2) - 2BA.AP$

$= BA^2 + AC^2 - 2BA.AP$

($\because APC$ ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಕೋನದಲ್ಲಿ $AC^2 = AP^2 + PC^2$)

ಅಂದರೆ, $a^2 = c^2 + b^2 - 2c.AP$ ... (1)

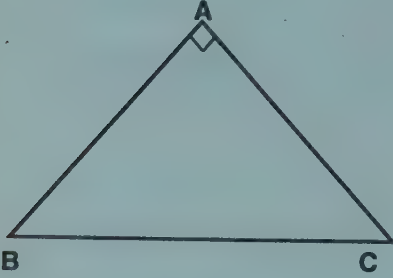
APC ತ್ರಿಕೋನದಲ್ಲಿ, $\cos A = \frac{AP}{AC}$

ಅಥವಾ $AC \cos A = AP$ ಅಥವಾ $AP = b \cos A$ ... (2)

(1) ರಲ್ಲಿ (2) ನ್ನು ಬಳಸುವುದರಿಂದ

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$ ಎಂದಾಗುತ್ತದೆ.

(ii) ABC ತ್ರಿಕೋನದಲ್ಲಿ Aಯು ಲಂಬಕೋನವಾಗಿರಲಿ. ಆದ್ದರಿಂದ, ABC ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಕೋನದಲ್ಲಿ



ಚಿತ್ರ 12.6

$BC^2 = AB^2 + AC^2$

ಅಥವಾ $a^2 = c^2 + b^2$

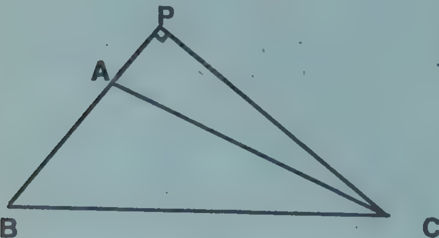
ಅಥವಾ $a^2 = b^2 + c^2 - 0$

ಅಥವಾ $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$

$[\because \cos A = \cos 90° = 0]$

(iii) ABC ತ್ರಿಕೋನದಲ್ಲಿ Aಯು ಒಂದು ಅಧಿಕ ಕೋನವಾಗಿರಲಿ. CPಯನ್ನು ವೃದ್ಧಿಸಿದ BAಗೆ ಲಂಬವಾಗಿ ಎಳೆಯಿರಿ (ಚಿತ್ರ 12.7).

BCP ಲಂಬಕೋನದಲ್ಲಿ



ಚಿತ್ರ 12.7

$BC^2 = BP^2 + PC^2$

ಅಥವಾ $a^2 = (BA + AP)^2 + PC^2$

$= BA^2 + AP^2 + 2BA.AP + PC^2$

$= BA^2 + (AP^2 + PC^2) + 2BA.AP$

ಅಂದರೆ, $a^2 = BA^2 + AC^2 + 2AB.AP$ ... (1)

($\because APC$ ತ್ರಿಕೋನದಲ್ಲಿ, $AP^2 + PC^2 = AC^2$)

ಈಗ, CAP ತ್ರಿಕೋನದಲ್ಲಿ, $\angle CAP = 180° - A$

$$\therefore \cos\angle CAP = \frac{AP}{AC}$$

ಅಂದರೆ, $\cos(180° - A) = \frac{AP}{AC}$

ಅಥವಾ $-\cos A = \frac{AP}{AC}$

ಅಥವಾ $-\cos A = \frac{AP}{b}$

ಅಥವಾ $-b\cos A = AP$ ... (2)

ಈಗ, (1) ರಲ್ಲಿ (2)ನ್ನು ಬಳಸಿದಾಗ

$a^2 = BA^2 + AC^2 - 2BA.b\cos A$

ಅಥವಾ $a^2 = c^2 + b^2 - 2bc\cos A$

ಅಥವಾ $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$

ಎಂದು ದೊರೆಯುತ್ತದೆ.

ಆದ್ದರಿಂದ, $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$

$b^2 = c^2 + a^2 - 2ca\cos B$

$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$

ಈ ಮೇಲಿನ ಸೂತ್ರಗಳಿಂದ

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}, \quad \cos B = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca} \text{ ಮತ್ತು } \cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

3. ಪ್ರಕ್ಷೇಪಣ ನಿಯಮ

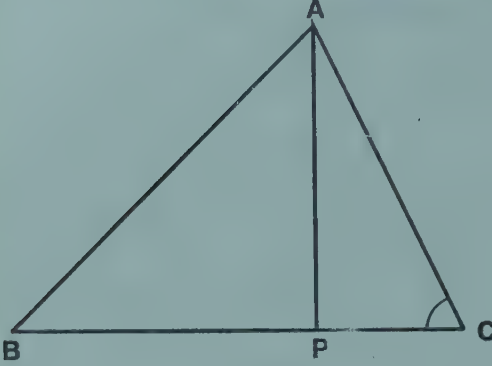
ಯಾವುದೇ ತ್ರಿಕೋನ ABC ಯಲ್ಲಿ

$$a = b\cos C + c\cos B$$

$$b = c\cos A + a\cos C$$

$$c = a\cos B + b\cos A$$

(i) ABC ತ್ರಿಕೋನದಲ್ಲಿ C ಯು ಒಂದು ಲಘು ಕೋನವಾಗಿರಲಿ.



ಚಿತ್ರ 12.8

AP ಯನ್ನು BCಗೆ ಲಂಬವಾಗಿ ಎಳೆಯಿರಿ.

ಈಗ, ABP ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಕೋನದಲ್ಲಿ

$$\cos B = \frac{BP}{AB}$$

ಅಥವಾ $BP = AB\cos B = c\cos B$ ... (1)

ಹಾಗೆಯೇ, ACP ತ್ರಿಕೋನದಲ್ಲಿ,

$$\cos C = \frac{PC}{AC}$$

ಅಥವಾ $PC = AC \cos C = b\cos C$ ...(2)

ಆದರೆ, $BC = BP + PC$ ...(3)

(3) ರಲ್ಲಿ (1) ಮತ್ತು (2)ನ್ನು ಬಳಸುವುದರಿಂದ

$a = c\cos B + b\cos C$ ಅಥವಾ

$a = b\cos C + c\cos B$ ಎಂದಾಗುತ್ತದೆ.

(ii) ABC ತ್ರಿಕೋನದಲ್ಲಿ C ಯು ಲಂಬಕೋನವಾಗಿರಲಿ (ಚಿತ್ರ 12.9).

ಆಗ, ಆ ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಕೋನದಲ್ಲಿ

$$\cos B = \frac{BC}{AB}$$

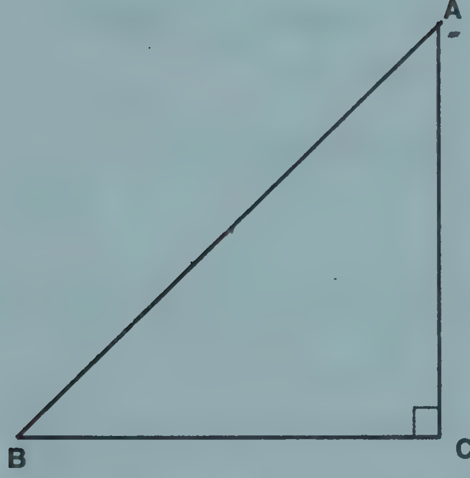
ಅಥವಾ $BC = AB \cos B$

ಅಥವಾ $a = c \cos B$

ಅಥವಾ $a = c \cos B + 0$

ಅಥವಾ $a = c \cos B + b \cos C$

$[\because \cos C = \cos 90° = 0]$



ಚಿತ್ರ 12.9

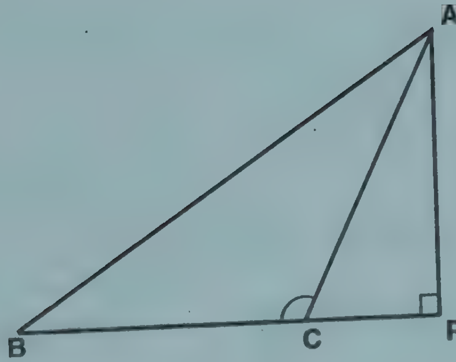
(iii) ABC ತ್ರಿಕೋನದಲ್ಲಿ C ಯು ಅಧಿಕ ಕೋನವಾಗಿರಲಿ (ಚಿತ್ರ 12.10). AP ಯು ವೃದ್ಧಿಸಿದ BC ಗೆ ಲಂಬವಾಗಿರಲಿ. ಆಗ, ABP ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಕೋನದಲ್ಲಿ

$$\cos B = \frac{BP}{AB} \text{ ಅಥವಾ}$$

$$BP = AB \cos B$$

$$\text{ಅಥವಾ } BP = c\cos B \qquad \ldots(1)$$

ACP ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಕೋನದಲ್ಲಿ



ಚಿತ್ರ 12.10

$$\cos\angle ACP = \cos(180° - C) = \frac{PC}{AC}$$

$$\text{ಅಥವಾ } -\cos C = \frac{PC}{AC}$$

ಅಥವಾ $PC = -AC\cos C = -\ b\cos C$ ...(2)

ಆದರೆ, $BC = BP - CP$ ...(3)

(3) ರಲ್ಲಿ (1) ಮತ್ತು (2)ನ್ನು ಬಳಸುವುದರಿಂದ

$$a = c\cos B - (-\ b\cos C)$$

ಅಥವಾ $a = b\cos C + c\cos B$

ಆದುದರಿಂದ ಎಲ್ಲಾ ಸಂದರ್ಭಗಳಲ್ಲಿಯೂ $a = b\cos C + c\cos B$.

ಇದೇ ರೀತಿಯಾಗಿ, $b = c\cos A + a\cos C$

ಮತ್ತು $c = a\cos B + b\cos A$

ಎಂದು ತೋರಿಸಬಹುದು.

4. ನೇಪಿಯರ್‌ನ tangent ಸೂತ್ರ

ಯಾವುದೇ ತ್ರಿಕೋನ ABC ಯಲ್ಲಿ

(i) $\dfrac{a-b}{a+b} = \dfrac{\tan\left(\dfrac{A-B}{2}\right)}{\tan\left(\dfrac{A+B}{2}\right)}$ (ii) $\dfrac{b-c}{b+c} = \dfrac{\tan\left(\dfrac{B-C}{2}\right)}{\tan\left(\dfrac{B+C}{2}\right)}$

ಮತ್ತು (iii) $\dfrac{c-a}{c+a} = \dfrac{\tan\left(\dfrac{C-A}{2}\right)}{\tan\left(\dfrac{C+A}{2}\right)}$

ಮೊದಲನೇ ಸೂತ್ರದ ಎಡಭಾಗವನ್ನು ಪರಿಗಣಿಸಿ:

$$\frac{a-b}{a+b} = \frac{2R\sin A - 2R\sin B}{2R\sin A + 2R\sin B} \quad \text{[sine ನಿಯಮದಿಂದ]}$$

$$= \frac{\sin A - \sin B}{\sin A + \sin B} = \frac{2\cos\left(\dfrac{A+B}{2}\right).\sin\left(\dfrac{A-B}{2}\right)}{2\sin\left(\dfrac{A+B}{2}\right)\cos\left(\dfrac{A-B}{2}\right)}$$

$$= \cot\left(\frac{A+B}{2}\right)\tan\left(\frac{A-B}{2}\right)$$

$$\therefore \frac{a-b}{a+b} = \frac{\tan\left(\frac{A-B}{2}\right)}{\tan\left(\frac{A+B}{2}\right)}$$, ಸೂತ್ರದ ಬಲಭಾಗ.

ಸೂಚನೆ: ತ್ರಿಕೋನ ABC ಯಲ್ಲಿ $A + B + C = 180°$ ಆಗಿರುವುದರಿಂದ,

$$\frac{A+B}{2} = \frac{180° - C}{2}$$

$$\therefore \tan\left(\frac{A+B}{2}\right) = \tan\left(90° - \frac{C}{2}\right) = \cot\frac{C}{2}$$

ಇದನ್ನು ಮೇಲಿನ ಸೂತ್ರದಲ್ಲಿ ಬಳಸಿದಾಗ

$$\boxed{\frac{a-b}{a+b}\cot\left(\frac{C}{2}\right) = \tan\left(\frac{A-B}{2}\right)}$$

5. ತ್ರಿಕೋನದ ಅರ್ಧಕೋನಗಳನ್ನು ಭುಜಗಳ ಮೂಲಕ ಬರೆಯುವುದು

ಯಾವುದೇ ತ್ರಿಕೋನ ABC ಯಲ್ಲಿ

(i) $\sin\left(\frac{A}{2}\right) = \left[\frac{(s-b)(s-c)}{bc}\right]^{1/2}$

(ii) $\cos\left(\frac{A}{2}\right) = \left[\frac{s(s-a)}{bc}\right]^{1/2}$

(iii) $\tan\left(\frac{A}{2}\right) = \left[\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}\right]^{1/2}$

(i) ನಮಗೆ $\cos A = 1 - 2\sin^2\left(\frac{A}{2}\right)$ ಎಂದು ತಿಳಿದಿದೆ.

$$\therefore\ 2\sin^2\left(\frac{A}{2}\right) = 1 - \cos A$$

$$= 1 - \left(\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}\right) \qquad \text{[cosine ಸೂತ್ರದಿಂದ]}$$

$$= \frac{2bc - b^2 - c^2 + a^2}{2bc}$$

$$= \frac{a^2 - (b - c)^2}{2bc}$$

$$= \frac{[a + (b - c)]\,[a - (b - c)]}{2bc}$$

$$= \frac{(a + b - c)(a + c - b)}{2bc} \qquad ...(1)$$

ಈಗ $a + b + c = 2s$ ಎಂದು ತಿಳಿದಿದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ,

$$a + b - c = 2s - 2c \text{ ಮತ್ತು } a + c - b = 2s - 2b \qquad ...(2)$$

ಆದ್ದರಿಂದ, (1) ರಲ್ಲಿ (2)ರ ಫಲಿತಾಂಶಗಳನ್ನು ಬಳಸುವುದರಿಂದ

$$2\sin^2\left(\frac{A}{2}\right) = \frac{(2s - 2c)(2s - 2b)}{2bc}$$

ಅಥವಾ $\sin^2\left(\frac{A}{2}\right) = \frac{(s - c)(s - b)}{bc}$

ಅಥವಾ $\sin\left(\frac{A}{2}\right) = \left[\frac{(s - c)(s - b)}{bc}\right]^{1/2}$

(ii) ನಮಗೆ $\cos A = 2\cos^2\left(\frac{A}{2}\right) - 1$ ಎಂದು ತಿಳಿದಿದೆ.

$$\therefore\ 2\cos^2\left(\frac{A}{2}\right) = 1 + \cos A$$

$$= 1 + \left(\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}\right) \quad \text{[cosine ನಿಯಮದಿಂದ]}$$

$$= \frac{2bc + b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

$$= \frac{(b + c)^2 - a^2}{2bc}$$

$$= \frac{(b+c+a)(b+c-a)}{2bc}$$

$$= \frac{2s(2s - 2a)}{2bc}$$

ಅಥವಾ $\cos^2\left(\frac{A}{2}\right) = \frac{s(s - a)}{bc}$

ಅಥವಾ $\cos\left(\frac{A}{2}\right) = \left[\frac{s(s - a)}{bc}\right]^{1/2}$

(iii) ಈಗ ಮೇಲಿನ ಫಲಿತಾಂಶ (i) ಮತ್ತು (ii) ರಿಂದಾಗಿ

$$\tan\left(\frac{A}{2}\right) = \frac{\sin\left(\frac{A}{2}\right)}{\cos\left(\frac{A}{2}\right)}$$

$$= \frac{\sqrt{(s-b)(s-c)/bc}}{\sqrt{s(s-a)/bc}}$$

ಅಂದರೆ, $\tan\left(\frac{A}{2}\right) = \left[\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}\right]^{1/2}$

ಇದೇ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ

$$\sin\left(\frac{B}{2}\right) = \left[\frac{(s-c)(s-a)}{ca}\right]^{1/2}, \quad \cos\left(\frac{B}{2}\right) = \left[\frac{s(s-b)}{ca}\right]^{1/2}$$

$$\sin\left(\frac{C}{2}\right) = \left[\frac{(s-a)(s-b)}{ab}\right]^{1/2}, \quad \cos\left(\frac{C}{2}\right) = \left[\frac{s(s-c)}{ab}\right]^{1/2}$$

$$\tan\left(\frac{B}{2}\right) = \left[\frac{(s-c)(s-a)}{s(s-b)}\right]^{1/2}, \quad \tan\left(\frac{C}{2}\right) = \left[\frac{(s-a)(s-b)}{s(s-c)}\right]^{1/2}$$

ಎಂದು ತೋರಿಸಬಹುದು.

ಉದಾಹರಣೆಗಳು

1. ABC ತ್ರಿಕೋನದಲ್ಲಿ $\frac{\sin(B-C)}{\sin(B+C)} = \frac{b^2-c^2}{a^2}$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

ಸಮೀಕರಣದ ಬಲಭಾಗ

$$\frac{b^2-c^2}{a^2} = \frac{(2R\sin B)^2 - (2R\sin C)^2}{(2R\sin A)^2} \quad \text{[sine ನಿಯಮದಿಂದ]}$$

$$= \frac{\sin^2 B - \sin^2 C}{\sin^2 A}$$

$$= \frac{\sin(B-C)\sin(B+C)}{\sin^2 A}$$

$$= \frac{\sin(B - C)\sin A}{\sin^2 A} \quad [\because \sin(B + C) = \sin A]$$

$$= \frac{\sin(B - C)}{\sin A} = \frac{\sin(B - C)}{\sin(B + C)}$$

2. ABC ತ್ರಿಕೋನದಲ್ಲಿ

$$\frac{a^2\sin(B - C)}{\sin B + \sin C} + \frac{b^2\sin(C - A)}{\sin C + \sin A} + \frac{c^2\sin(A - B)}{\sin A + \sin B} = 0$$

ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

ಎಡಭಾಗದ ಮೊದಲನೇ ಪದ

$$\frac{a^2\sin(B - C)}{\sin B + \sin C} = \frac{(2R\sin A)^2\sin(B - C)}{\sin B + \sin C}$$

$$= 4R^2\sin A \,.\, \frac{\sin A\sin(B - C)}{\sin B + \sin C}$$

$$= 4R^2\sin A \,.\, \frac{\sin(B + C)\sin(B - C)}{\sin B + \sin C}$$

$$[\because \sin A = \sin(B + C)]$$

$$= 4R^2\sin A \,.\, \frac{\sin^2 B - \sin^2 C}{\sin B + \sin C}$$

$$= 4R^2\sin A \,.\, \frac{(\sin B + \sin C)(\sin B - \sin C)}{\sin B + \sin C}$$

$$= 4R^2 \sin A\,(\sin B - \sin C) \qquad \dots (1)$$

ಇದೇ ರೀತಿಯಾಗಿ

$$\frac{b^2 \sin(C - A)}{\sin C + \sin A} = 4R^2 \sin B(\sin C - \sin A) \qquad \dots (2)$$

ಮತ್ತು

$$\frac{c^2 \sin(A - B)}{\sin A + \sin B} = 4R^2 \sin C\,(\sin A - \sin B) \qquad \dots (3)$$

ಈಗ (1), (2) ಮತ್ತು (3) ಫಲಿತಾಂಶಗಳನ್ನು ಕೂಡುವುದರಿಂದ
ಎಡಭಾಗದ ಪದಗಳ ಮೊತ್ತ

$$= 4R^2 [\,(\sin A \sin B - \sin A \sin C\,) + (\,\sin B \sin C - \sin B \sin A\,)$$
$$+ (\,\sin C \sin A - \sin C \sin B\,)\,] = 0,$$ ಸಮೀಕರಣದ ಬಲಭಾಗ.

3. ABC ತ್ರಿಕೋನದಲ್ಲಿ

$$2\left(a \sin^2 \frac{C}{2} + c \sin^2 \frac{A}{2}\right) = c + a - b$$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

ಸಮೀಕರಣದ ಎಡಭಾಗ

$$a\left(2\sin^2 \frac{C}{2}\right) + c\left(2\sin^2 \frac{A}{2}\right)$$

$$= a\,(1 - \cos C) + c\,(1 - \cos A\,)$$

$$= a + c - (a \cos C + c \cos A\,)$$

$= a + c - b$, ಬಲಭಾಗ.

4. ABC ತ್ರಿಕೋನದಲ್ಲಿ a, b, c ಸಮಾಂತರ ಶ್ರೇಢಿಯಲ್ಲಿದ್ದರೆ,

$\cot\left(\frac{A}{2}\right), \cot\left(\frac{B}{2}\right), \cot\left(\frac{C}{2}\right)$ ಸಮಾಂತರ ಶ್ರೇಢಿಯಲ್ಲಿದೆ. ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

ಈಗ a, b, c ಸಮಾಂತರ ಶ್ರೇಢಿಯಲ್ಲಿವೆ.

ಆದ್ದರಿಂದ, $-a, -b, -c$ ಸಮಾಂತರ ಶ್ರೇಢಿಯಲ್ಲಿವೆ.

ಪದಗಳಿಗೆ $(a+b+c)$ ಎಂಬುದನ್ನು ಕೂಡಿಸಿದಾಗ

$$(a+b+c)-a, (a+b+c)-b, (a+b+c)-c$$

ಪದಗಳೂ ಸಮಾಂತರ ಶ್ರೇಢಿಯಲ್ಲಿವೆ.

ಅಂದರೆ, $b+c,\ c+a,\ a+b$ ಗಳೂ ಸಮಾಂತರ ಶ್ರೇಢಿಯಲ್ಲಿವೆ.

ಮೇಲಿನ ಫಲಿತಾಂಶದಲ್ಲಿ $b=2R\sin B$ ಮುಂತಾದವುಗಳನ್ನು ಬಳಸಿ, $2R$ ನಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದಾಗ

$$\sin B + \sin C, \quad \sin C + \sin A, \quad \sin A + \sin B$$

ಸಮಾಂತರ ಶ್ರೇಢಿಯಲ್ಲಿವೆ. ಅಂದರೆ

$$\sin\left(\frac{B+C}{2}\right)\cos\left(\frac{B-C}{2}\right), \sin\left(\frac{C+A}{2}\right)\cos\left(\frac{C-A}{2}\right)$$

ಮತ್ತು $\sin\left(\frac{A+B}{2}\right)\cos\left(\frac{A-B}{2}\right)$

ಸಮಾಂತರ ಶ್ರೇಢಿಯಲ್ಲಿವೆ. ಅಂದರೆ

$$\cos\frac{A}{2}\left[\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2} + \sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\right],$$

$$\cos\frac{B}{2}\left[\cos\frac{C}{2}\cos\frac{A}{2} + \sin\frac{C}{2}\sin\frac{A}{2}\right],$$

$$\cos\frac{C}{2}\left[\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2} + \sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\right]$$

ಸಮಾಂತರ ಶ್ರೇಢಿಯಲ್ಲಿವೆ. ಅದರ ಪದಗಳನ್ನು

$$\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$$

ಪದದಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದಾಗ

$$\cot\frac{A}{2}\left[\cot\frac{B}{2}\cot\frac{C}{2} + 1\right],$$

$$\cot\frac{B}{2}\left[\cot\frac{C}{2}\cot\frac{A}{2}+1\right],$$

$$\cot\frac{C}{2}\left[\cot\frac{A}{2}\cot\frac{B}{2}+1\right]$$

ಸಮಾಂತರ ಶ್ರೇಢಿಯಲ್ಲಿವೆ. ಈಗ, ಮೂರು ಪದಗಳಿಂದಲೂ

$$\left(\cot\frac{A}{2}\cot\frac{B}{2}\cot\frac{C}{2}\right)$$

ಪದವನ್ನು ಕಳೆದಾಗ ಬರುವ

$$\cot\frac{A}{2},\ \cot\frac{B}{2},\ \cot\frac{C}{2}$$

ಪದಗಳು ಸಮಾಂತರ ಶ್ರೇಢಿಯಲ್ಲಿವೆ.

5. ABC ತ್ರಿಕೋನದಲ್ಲಿ $a\cos A = b\cos B$ ಆದರೆ, ತ್ರಿಕೋನವು ಸಮದ್ವಿಬಾಹು ಅಥವಾ ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಕೋನವೆಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

ಈಗ, $a\cos A = b\cos B$ ಎಂದು ಕೊಟ್ಟಿದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ

$(2R\sin A)\cos A = (2R\sin B)\cos B$

ಅಥವಾ $R\sin 2A = R\sin 2B$

ಅಥವಾ $\sin 2A - \sin 2B = 0$

$\therefore\ 2\cos(A+B)\sin(A-B) = 0$

ಆದ್ದರಿಂದ, $\cos(A+B) = 0$ ಅಥವಾ $\sin(A-B) = 0$

$\therefore A + B = 90°$ ಅಥವಾ $A - B = 0$ (ಅಂದರೆ, $A = B$)

$\therefore C = 90°$ ಅಥವಾ $a = b$

ಅಂದರೆ, ABC ತ್ರಿಕೋನವು ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಕೋನ ಅಥವಾ ಸಮದ್ವಿಬಾಹು ತ್ರಿಕೋನವಾಗಿರುತ್ತದೆ.

6. ABC ತ್ರಿಕೋನದಲ್ಲಿ $\angle C = 60°$ ಆದರೆ, $\frac{1}{a+c} + \frac{1}{b+c} = \frac{3}{a+b+c}$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

ಈಗ, $\frac{1}{a+c} + \frac{1}{b+c} = \frac{3}{a+b+c}$ ಎಂದು ತೋರಿಸಬೇಕು.

ಅಂದರೆ, $\frac{(b+c)+(a+c)}{(a+c)(b+c)} = \frac{3}{a+b+c}$ ಎಂದು ತೋರಿಸಬೇಕು.

ಅಥವಾ $(b+a+2c)(a+b+c) = 3(a+c)(b+c)$ ಎಂದು ತೋರಿಸಬೇಕು.

ಅಥವಾ $[ab + b^2 + bc + a^2 + ab + ac + 2ca + 2bc + 2c^2]$
$= 3[ab + ac + bc + c^2]$

ಅಂದರೆ, $a^2 + b^2 - c^2 = ab$ ... (1)
ಎಂದು ತೋರಿಸಬೇಕು.

ಈಗ $C = 60°$ ಎಂದು ಕೊಟ್ಟಿರುವುದರಿಂದ

$$\cos C = \cos 60° = \frac{1}{2}$$

ಆದರೆ, $\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$ [cosine ನಿಯಮದಿಂದ]

ಆದ್ದರಿಂದ, $\frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{1}{2}$

ಅಥವಾ $a^2 + b^2 - c^2 = ab$ ... (2)

(1) ಮತ್ತು (2) ರಿಂದಾಗಿ ಫಲಿತಾಂಶವು ಸಿದ್ಧವಾಗುತ್ತದೆ.

7. ABC ತ್ರಿಕೋನದಲ್ಲಿ $a\sin\left(\frac{A}{2} + B\right) = (b+c)\sin\frac{A}{2}$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

ಈಗ, $\frac{a}{b+c} = \frac{2R\sin A}{2R\sin B + 2R\sin C}$

$$= \frac{2\sin\left(\frac{A}{2}\right)\cos\left(\frac{A}{2}\right)}{2\sin\left(\frac{B+C}{2}\right)\cos\left(\frac{B-C}{2}\right)}$$

$$= \frac{\sin\left(\frac{A}{2}\right)\cos\left(\frac{A}{2}\right)}{\cos\left(\frac{A}{2}\right)\cos\left(\frac{B-C}{2}\right)} \quad \left[\because \sin\frac{B+C}{2} = \cos\frac{A}{2}\right]$$

$$= \frac{\sin\left(\frac{A}{2}\right)}{\cos\left(\frac{B-C}{2}\right)}$$

ಈಗ, $B - C = B - \{180° - (A + B)\}$

$$\therefore \quad \frac{B-C}{2} = \frac{B}{2} - 90° + \frac{A}{2} + \frac{B}{2}$$

$$\therefore \frac{B-C}{2} = B + \frac{A}{2} - 90°$$

ಆದ್ದರಿಂದ, $\cos\left(\frac{B-C}{2}\right) = \cos\left[90° - \left(B + \frac{A}{2}\right)\right]$

$$= \sin\left(\frac{A}{2} + B\right)$$

ಅಂದರೆ, $\frac{a}{b+c} = \frac{\sin\frac{A}{2}}{\sin\left(\frac{A}{2} + B\right)}$

$$\therefore a\sin\left(\frac{A}{2} + B\right) = (b + c)\sin\frac{A}{2}$$

8. ABC ತ್ರಿಕೋನದಲ್ಲಿ

$$\frac{b-c}{a}\cos^2\frac{A}{2} + \frac{c-a}{b}\cos^2\frac{B}{2} + \frac{a-b}{c}\cos^2\frac{C}{2} = 0$$

ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

ಸಮೀಕರಣದ ಎಡಭಾಗ

$$\frac{b-c}{a}\,\frac{s(s-a)}{bc} + \frac{c-a}{b}\,\frac{s(s-b)}{ca} + \frac{a-b}{c}\,\frac{s(s-c)}{ab}$$

$$= \frac{s}{abc}[(b-c)(s-a) + (c-a)(s-b) + (a-b)(s-c)]$$

$$= \frac{s}{abc}[s(b-c) - ab + ac + s(c-a) - bc + ba + s(a-b) - ac + bc]$$

$$= \frac{s}{abc}[s(b-c+c-a+a-b)] = 0, \text{ ಬಲಭಾಗ.}$$

9. ABC ತ್ರಿಕೋನದಲ್ಲಿ $\cot\frac{A}{2} + \cot\frac{B}{2} + \cot\frac{c}{2} = \frac{a+b+c}{a+b-c}\cot\frac{C}{2}$

ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

ತೋರಿಸಬೇಕಾಗಿರುವ ಸಮೀಕರಣದ ಎಡಭಾಗ

$$\cot\frac{A}{2} + \cot\frac{B}{2} + \cot\frac{C}{2}$$

$$= \frac{\sqrt{s(s-a)}}{\sqrt{(s-b)(s-c)}} + \frac{\sqrt{s(s-b)}}{\sqrt{(s-a)(s-c)}} + \frac{\sqrt{s(s-c)}}{\sqrt{(s-a)(s-b)}}$$

$$= \frac{\sqrt{s}[s-a+s-b+s-c]}{\sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)}}$$

$$= \frac{\sqrt{s}\,[3s-(a+b+c)]}{\sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)}} = \frac{\sqrt{s}\,[3s-2s]}{\sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)}}$$

$$= \frac{\sqrt{s}\,.\,s\sqrt{s-c}}{\sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)}\,.\,\sqrt{s-c}}$$

$$= \frac{\sqrt{s(s-c)}}{\sqrt{(s-a)(s-b)}}\,.\,\frac{s}{s-c}$$

$$= \cot\frac{C}{2}.\frac{\left(\frac{a+b+c}{2}\right)}{\left(\frac{a+b+c}{2}-c\right)}$$

$$= \left(\cot\frac{C}{2}\right)\frac{a+b+c}{a+b-c}$$, ಬಲಭಾಗ

10. ABC ತ್ರಿಕೋನದಲ್ಲಿ $C = 90°$ ಆದರೆ $\tan\frac{A}{2} = \frac{\sqrt{c-b}}{\sqrt{c+b}} = \frac{a}{b+c}$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

ನೇಪಿಯರ್‌ನ ಸೂತ್ರದಿಂದ

$$\frac{c-b}{c+b}\cot\frac{A}{2} = \tan\frac{C-B}{2}$$

$$\therefore \tan\frac{A}{2} = \frac{c-b}{c+b}\cot\frac{C-B}{2}$$

$$= \frac{c-b}{c+b}\cot\left[\frac{90° - 90° + A}{2}\right]$$

$$\left[\because C = 90°, B = 90° - A\right]$$

ಅಥವಾ $\tan\frac{A}{2} = \frac{c-b}{c+b}\cot\frac{A}{2}$

ಅಥವಾ $\tan\frac{A}{2} = \frac{c-b}{c+b} \cdot \frac{1}{\tan\frac{A}{2}}$

ಅಥವಾ $\tan^2\frac{A}{2} = \frac{c-b}{c+b}$

$$\therefore \tan\frac{A}{2} = \frac{\sqrt{c-b}}{\sqrt{c+b}} \quad ...(1)$$

ಹಾಗೆಯೇ, $\tan\frac{A}{2} = \frac{\sin\frac{A}{2}}{\cos\frac{A}{2}}$

$$= \frac{2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}}{2\cos^2\frac{A}{2}}$$

$$= \frac{\sin A}{1+\cos A} \quad ...(2)$$

ಈಗ, $C = 90°$ ಆಗಿರುವುದರಿಂದ $\sin C = 1$ ...(3)

$$A = 180° - (B + C) = 180° - B - 90°$$

ಅಥವಾ $A = 90° - B$

$$\therefore \cos A = \cos(90° - B) = \sin B \quad ...(4)$$

ಆದ್ದರಿಂದ, (2) ರಲ್ಲಿ (3) ಮತ್ತು (4) ಬಳಸುವುದರಿಂದ

$$\tan\frac{A}{2} = \frac{\sin A}{\sin B + \sin C}$$

ಅಂದರೆ, $\tan\frac{A}{2} = \frac{a}{c+b}$ ...(5)

($2R\sin A = a$ ಇತ್ಯಾದಿ ಬಳಸುವುದರಿಂದ)

(1) ಮತ್ತು (5) ರಿಂದ ತೋರಿಸಬೇಕಾದ ಫಲಿತಾಂಶವು ಸಿದ್ಧವಾಗುತ್ತದೆ.

ಅಭ್ಯಾಸ - 12.1

ಯಾವುದೇ ತ್ರಿಕೋನ ABC ಯಲ್ಲಿ ಈ ಕೆಳಗಿನವುಗಳನ್ನು ಸಾಧಿಸಿ.

1. $c \cos\frac{A-B}{2} = (a+b)\sin\frac{C}{2}$

2. $\frac{b+c}{b-c}\tan\frac{A}{2} - \frac{(b-c)}{(b+c)}\cot\frac{A}{2} = 2\cot(B-C)$

3. $c^2 = (a-b)^2\cos^2\frac{C}{2} + (a+b)^2\sin^2\frac{C}{2}$

4. $a\cos A + b\cos B = c\cos(A-B)$

5. $a(\cos C - \cos B) = 2(b-c)\cos^2\frac{A}{2}$

6. $\sin^2 A + \sin^2 B = \sin^2 C$ ಆದರೆ
   ತ್ರಿಕೋನವು ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಕೋನವೆಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

7. $\frac{\cos A}{a} = \frac{\cos B}{b}$ ಆದರೆ ತ್ರಿಕೋನವು ಸಮದ್ವಿಬಾಹು ತ್ರಿಕೋನವೆಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

8. $\frac{b^2-c^2}{a^2}\sin 2A + \frac{c^2-a^2}{b^2}\sin 2B + \frac{a^2-b^2}{c^2}\sin 2C = 0$

9. $\cos B\,(b - c\cos A) = \cos C\,(c - b\cos A)$

10. $(c^2 - a^2 + b^2)\tan A = (a^2 - b^2 + c^2)\tan B = (b^2 - c^2 + a^2)\tan C$

11. $\cos A = \sin B - \cos C$ ಆದರೆ ತ್ರಿಕೋನವು ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಕೋನವೆಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

12. ABC ತ್ರಿಕೋನದಲ್ಲಿ a^2, b^2, c^2 ಸಮಾಂತರ ಶ್ರೇಢಿಯಲ್ಲಿದ್ದರೆ $\cot A, \cot B, \cot C$ ಕೂಡ ಸಮಾಂತರ ಶ್ರೇಢಿಯಲ್ಲಿವೆ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

13. ABC ತ್ರಿಕೋನದಲ್ಲಿ a, b, c ಗಳು ಸಮಾಂತರ ಶ್ರೇಢಿಯಲ್ಲಿದ್ದರೆ $\cot\frac{B}{2}\cot\frac{C}{2} = 3$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

14. $a^2\cos(B-C) + b^2\cos(C-A) + c^2\cos(A-B) = 3abc$

15. $a\cos^2\frac{C}{2} + c\cos^2\frac{A}{2} = \frac{3b}{2}$ ಆದರೆ, a,b,c ಸಮಾಂತರ ಶ್ರೇಢಿಯಲ್ಲಿವೆ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

16. $\frac{1}{a}\cos^2\frac{A}{2} + \frac{1}{b}\cos^2\frac{B}{2} + \frac{1}{c}\cos^2\frac{C}{2} = \frac{s^2}{abc}$

17. $a\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B-C}{2} + b\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C-A}{2} + c\sin\frac{C}{2}\sin\frac{A-B}{2} = 0$

18. $a^2(\cos^2B - \cos^2C) + b^2(\cos^2C - \cos^2A) + c^2(\cos^2A - \cos^2B) = 0$

19. $a^2 + b^2 + c^2 = 2(bc\cos A + ca\cos B + ab\cos C)$

20. $\tan\frac{A}{2} = \frac{5}{6}$ ಮತ್ತು $\tan\frac{B}{2} = \frac{20}{37}$ ಆದರೆ $\tan\frac{C}{2}$ ನ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. ಈ ತ್ರಿಕೋನದಲ್ಲಿ $a + c = 2b$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

21. $\frac{1 + \cos(A - B)\cos C}{1 + \cos(A - C)\cos B} = \frac{a^2 + b^2}{a^2 + c^2}$

22. $(b^2 - c^2)\cot A + (c^2 - a^2)\cot B + (a^2 - b^2)\cot C = 0$

23. $b + c = 2a$ ಆದರೆ $\cos\frac{B-C}{2} = 2\sin\frac{A}{2}$.

24. $\cos\theta = 2\frac{\sqrt{bc}}{b+c}\cos\frac{A}{2}$ ಆದರೆ $a = (b + c)\sin\theta$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

25. ABC ತ್ರಿಕೋನದಲ್ಲಿ AD ಯು ಮಧ್ಯರೇಖೆ ಆದರೆ $\cot\angle BAD - \cot B = 2\cot A$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

12.2 ತ್ರಿಕೋನಗಳ ಪರಿಮಾಣಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವುದು

ಪ್ರತಿಯೊಂದು ತ್ರಿಕೋನಕ್ಕೆ ಆರು ಮೂಲಾಂಶಗಳಿವೆ - 3ಕೋನಗಳು ಮತ್ತು 3 ಭುಜಗಳು. ಒಂದು ತ್ರಿಕೋನದ ಯಾವುದೇ 3 ಮೂಲಾಂಶಗಳನ್ನು ಕೊಟ್ಟಾಗ ಉಳಿದ 3 ಮೂಲಾಂಶ (ಪರಿಮಾಣ)ಗಳನ್ನು - ಸಾಧ್ಯವಿರುವ ಸಂದರ್ಭಗಳಲ್ಲಿ - ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವುದನ್ನು "ತ್ರಿಕೋನವನ್ನು ಬಿಡಿಸುವುದು" ಎಂದು ಹೇಳುತ್ತೇವೆ.

ಈ ಕೆಳಗಿನ ಐದು ಸಂದರ್ಭಗಳ ಪೈಕಿ ಮೊದಲನೇ ನಾಲ್ಕರಲ್ಲಿ ಒಂದು ತ್ರಿಕೋನವನ್ನು ಬಿಡಿಸಬಹುದು:

(i) ತ್ರಿಕೋನದ 3 ಭುಜಗಳನ್ನು ಕೊಟ್ಟಾಗ;

(ii) ತ್ರಿಕೋನದ 2 ಭುಜಗಳು ಮತ್ತು ಅವುಗಳನ್ನು ಒಳಗೊಂಡ ಕೋನವನ್ನು ಕೊಟ್ಟಾಗ;

(iii) ತ್ರಿಕೋನದ 2 ಭುಜಗಳು ಮತ್ತು ಅವುಗಳನ್ನು ಒಳಗೊಳ್ಳದ ಕೋನವನ್ನು ಕೊಟ್ಟಾಗ;

(iv) ಎರಡು ಕೋನಗಳು ಮತ್ತು ಒಂದು ಭುಜವನ್ನು ಕೊಟ್ಟಾಗ; ಮತ್ತು

(v) 3 ಕೋನಗಳನ್ನು ಕೊಟ್ಟಾಗ. ಈ ಸಂದರ್ಭದಲ್ಲಿ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಕೋನಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿರುವಂತೆ ಅಸಂಖ್ಯಾತ ಸಮರೂಪ ತ್ರಿಕೋನಗಳು ಉಂಟಾಗುತ್ತವೆ.

ತ್ರಿಕೋನವನ್ನು ಬಿಡಿಸುವಾಗ ಈ ಕೆಳಗಿನ ತ್ರಿಕೋನಮಿತೀಯ ಪ್ರಮಾಣಗಳ ಬೆಲೆಗಳು ಉಪಯುಕ್ತವಾಗುತ್ತವೆ:

	0°	30°	45°	60°	90°	15°	75°
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$
tan	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	∞	$2-\sqrt{3}$	$2+\sqrt{3}$

12.2.1 ತ್ರಿಕೋನದ ಮೂರು ಭುಜಗಳನ್ನು ಕೊಟ್ಟಾಗ

ABC ತ್ರಿಕೋನದಲ್ಲಿ a, b, c ಗಳನ್ನು ಕೊಟ್ಟಿರುತ್ತದೆ. A, B, C ಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬೇಕು. ಮೊದಲು 2 ಕೋನಗಳನ್ನು cosine ಸೂತ್ರದಿಂದ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

$$\cos B = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca}$$

$$\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

3ನೇ ಕೋನವನ್ನು $A + B + C = 180°$ ಸೂತ್ರದಿಂದ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದು.

ಉದಾಹರಣೆಗಳು

1. $a = 2\sqrt{3}$, $b = \sqrt{6} + \sqrt{2}$, $c = \sqrt{6} - \sqrt{2}$ ಆದಾಗ ತ್ರಿಕೋನ ABC ಯನ್ನು ಬಿಡಿಸಿ.

ಈಗ, $\cos A = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$

$$= \frac{(\sqrt{6} + \sqrt{2})^2 + (\sqrt{6} - \sqrt{2})^2 - (2\sqrt{3})^2}{2(\sqrt{6} + \sqrt{2})(\sqrt{6} - \sqrt{2})}$$

$$= \frac{6 + 2 + 2\sqrt{12} + 6 + 2 - 2\sqrt{12} - 4 \times 3}{2(6 - 2)} = \frac{1}{2}.$$

$$= \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

ಅಂದರೆ $\cos A = \dfrac{1}{2}$

$\therefore A = 60°$

ಹಾಗೆಯೇ, $\cos B = \dfrac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca}$

$$= \frac{(\sqrt{6} - \sqrt{2})^2 + (2\sqrt{3})^2 - (\sqrt{6} + \sqrt{2})^2}{2(\sqrt{6} - \sqrt{2})\, 2\sqrt{3}}$$

$$= \frac{6 + 2 - 2\sqrt{12} + 12 - 6 - 2 - 2\sqrt{12}}{4\sqrt{3}(\sqrt{6} - \sqrt{2})}$$

$$= \frac{12 - 4\sqrt{12}}{4\sqrt{3}(\sqrt{6} - \sqrt{2})}$$

$$= \frac{4(3 - \sqrt{12})}{4\sqrt{3}(\sqrt{6} - \sqrt{2})}$$

$$= \frac{3 - 2\sqrt{3}}{\sqrt{3}(\sqrt{6} - \sqrt{2})}$$

$$= \frac{\sqrt{3}(\sqrt{3} - 2)}{\sqrt{3}(\sqrt{6} - \sqrt{2})}$$

$$= \frac{\sqrt{3} - 2}{\sqrt{6} - \sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{\sqrt{6} + \sqrt{2})}$$

$$= \frac{\sqrt{18} + \sqrt{6} - 2\sqrt{6} - 2\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{18} - \sqrt{6} - 2\sqrt{2}}{4}$$

$$= \frac{3\sqrt{2} - \sqrt{6} - 2\sqrt{2}}{4}$$

$$= \frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4} = \frac{\sqrt{2}(1 - \sqrt{3})}{4}$$

$$= \frac{1 - \sqrt{3}}{2\sqrt{2}} = \frac{-(\sqrt{3} - 1)}{2\sqrt{2}}.$$

ಅಂದರೆ, $\cos B = -\frac{(\sqrt{3} - 1)}{2\sqrt{2}}$

ಈಗ, $\cos 75° = \frac{(\sqrt{3} - 1)}{2\sqrt{2}}$ ಎಂದು ತಿಳಿದಿದೆ.

$$\therefore \cos B = -\frac{(\sqrt{3} - 1)}{2\sqrt{2}} = \cos(180° - 75°)$$

ಅಥವಾ $\cos B = \cos 105°$

ಅಂದರೆ, $B = 105°$

$$\therefore C = 180° - (A + B)$$

$$= 180° - (60° + 105°)$$

ಅಂದರೆ, $C = 15°$

ಆದ್ದರಿಂದ, $A = 60°$, $B = 105°$ ಮತ್ತು $C = 15°$.

2. $a = 2$, $b = \sqrt{6}$, $c = \sqrt{3} - 1$ ಆದರೆ, $\Delta^{le} ABC$ ಯನ್ನು ಬಿಡಿಸಿ.

ಈಗ, $\cos A = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$

$$= \frac{6 + (\sqrt{3} - 1)^2 - 4}{2(\sqrt{6})(\sqrt{3} - 1)}$$

$$= \frac{6 + 3 + 1 - 2\sqrt{3} - 4}{2\sqrt{6}(\sqrt{3} - 1)}$$

$$= \frac{6 - 2\sqrt{3}}{2\sqrt{6}(\sqrt{3} - 1)}$$

$$= \frac{2\sqrt{3}(\sqrt{3} - 1)}{2\sqrt{6}(\sqrt{3} - 1)} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{6}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

ಅಂದರೆ, $\cos A = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

$\therefore \; A = 45°$

$\cos B = \dfrac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca}$

$$= \frac{3 + 1 - 2\sqrt{3} + 4 - 6}{2(\sqrt{3} - 1)\, 2}$$

$$= \frac{2 - 2\sqrt{3}}{4(\sqrt{3} - 1)} = \frac{(1 - \sqrt{3})}{2(\sqrt{3} - 1)} = -\frac{1}{2}.$$

ಅಂದರೆ, $\cos B = -\dfrac{1}{2}$

$\therefore \; B = 180° - 60° = 120°$

ಆದ್ದರಿಂದ, $A = 45°$, $B = 120°$, $C = 15°$

12.2.2 ತ್ರಿಕೋನದ ಎರಡು ಭುಜಗಳು ಮತ್ತು ಅವುಗಳನ್ನು ಒಳಗೊಂಡ ಕೋನವನ್ನು ಕೊಟ್ಟಾಗ

b, c, A ಅಥವಾ c, a, B ಅಥವಾ a, b, C ಕೊಟ್ಟಾಗ ಕ್ರಮವಾಗಿ ಉಳಿದ ಪರಿಮಾಣಗಳಾದ a, B, C ಅಥವಾ b, C, A ಅಥವಾ c, A, B ಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವ ಬಗೆ.

ಒಂದನೇ ವಿಧಾನ : ಮೊದಲು cosine ಸೂತ್ರದಿಂದ ಮೂರನೇ ಭುಜವನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯುವುದು. ಅನಂತರ cosine ಸೂತ್ರದಿಂದ ಒಂದು ಕೋನವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿದು ಮೂರನೇ ಕೋನವನ್ನು $A + B + C = 180°$ ಸೂತ್ರದಿಂದ ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವುದು

ಎರಡನೇ ವಿಧಾನ : ಉದಾಹರಣೆಗೆ, b, c, A ಕೊಟ್ಟಾಗ, $b > c$ ಆಗಿದ್ದರೆ ನೇಪಿಯರ್‌ನ ಸೂತ್ರ

$$\frac{b - c}{b + c} \cot \frac{A}{2} = \tan\left(\frac{B - C}{2}\right)$$

ಬಳಸಿ $\frac{B - C}{2}$ ಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವುದು.

ಈಗ, $\frac{B + C}{2} = 90° - \frac{A}{2}$ ಎಂಬುದು ತಿಳಿದಿದೆ.

ಇದರಿಂದ B ಮತ್ತು C ಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದು.

ಅನಂತರ, sine ಸೂತ್ರದಿಂದ ಭುಜ a ಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದು.

ಉದಾಹರಣೆಗಳು

1. $a = 2$, $c = \sqrt{3} - 1$, $B = 120°$ ಆದಾಗ ABC ತ್ರಿಕೋನವನ್ನು ಬಿಡಿಸಿ.

ಈಗ, $b^2 = c^2 + a^2 - 2ca\cos B$ ಸೂತ್ರವನ್ನು ಪರಿಗಣಿಸಿ.

$$\therefore\ b^2 = 3 + 1 - 2\sqrt{3} + 4 - 2(\sqrt{3} - 1)\ 2\cos 120°$$

$$= 8 - 2\sqrt{3} - 4(\sqrt{3} - 1)\left(-\frac{1}{2}\right) \quad (\because\ \cos 120° = -\frac{1}{2})$$

$$= 8 - 2\sqrt{3} + 2(\sqrt{3} - 1) = 6$$

$$\therefore\ b = \sqrt{6}$$

ಹಾಗೆಯೇ $\cos A = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$

$$= \frac{6 + 3 + 1 - 2\sqrt{3} - 4}{2\sqrt{6}(\sqrt{3} - 1)}$$

$$= \frac{6 - 2\sqrt{3}}{2\sqrt{6}(\sqrt{3} - 1)} = \frac{2\sqrt{3}(\sqrt{3} - 1)}{2\sqrt{6}(\sqrt{3} - 1)}$$

ಅಂದರೆ, $\cos A = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

$$\therefore A = 45^\circ$$

ಆದ್ದರಿಂದ, $C = 180^\circ - (A + B)$

$$= 180^\circ - (45^\circ + 120^\circ) = 15^\circ$$

ಆದ್ದರಿಂದ, $b = \sqrt{6}$, $A = 45^\circ$ ಮತ್ತು $C = 15^\circ$.

2. $a = \dfrac{1}{\sqrt{6} - \sqrt{2}}$, $b = \dfrac{1}{\sqrt{6} + \sqrt{2}}$ ಮತ್ತು $C = 60^\circ$ ಆದಾಗ, ತ್ರಿಕೋನವನ್ನು ಬಿಡಿಸಿ.

ಈಗ, $a = \dfrac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$ ಮತ್ತು $b = \dfrac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$ ಎಂದು ಕೊಟ್ಟಿದೆ.

ಅಂದರೆ, $a > b$.

ಈಗ, ನೇಪಿಯರ್‌ನ ಸೂತ್ರದಿಂದ

$$\frac{a - b}{a + b} \cot\frac{C}{2} = \tan\left(\frac{A - B}{2}\right)$$

$$\therefore \frac{\dfrac{\sqrt{6} + \sqrt{2} - \sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}}{\dfrac{\sqrt{6} + \sqrt{2} + \sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}} \cot 30^\circ = \tan\left(\frac{A - B}{2}\right)$$

ಅಥವಾ $\frac{2\sqrt{2}}{2\sqrt{6}}\sqrt{3} = \tan\left(\frac{A-B}{2}\right)$

ಅಥವಾ $\tan\left(\frac{A-B}{2}\right) = 1$

$\therefore \frac{A-B}{2} = 45°$ ಅಥವಾ $A - B = 90°$

ಈಗ, $A + B = 180° - C = 180° - 60° = 120°$

ಆದ್ದರಿಂದ, $A = 105°$ ಮತ್ತು $B = 15°$

ಈಗ, ಉಳಿದಿರುವ ಪರಿಮಾಣವಾದ ಭುಜ C ಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು sine - ನಿಯಮವನ್ನು ಬಳಸುತ್ತೇವೆ:

$$\frac{c}{\sin C} = \frac{b}{\sin B}$$

$$\therefore c = \frac{b}{\sin B} \cdot \sin C = \frac{1}{\sqrt{6}+\sqrt{2}} \cdot \frac{\sin 60°}{\sin 15°}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{6}+\sqrt{2}} \frac{(\sqrt{3}/2)}{(\sqrt{3}-1)/2\sqrt{2}}$$

$$= \frac{\sqrt{3}\cdot\sqrt{2}}{(\sqrt{6}+\sqrt{2})(\sqrt{3}-1)} = \frac{\sqrt{3}\cdot\sqrt{2}}{\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{3-1} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

ಆದ್ದರಿಂದ, $A = 105°$, $B = 15°$ ಮತ್ತು $c = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

12.2.3 ತ್ರಿಕೋನದ ಎರಡು ಭುಜಗಳು ಮತ್ತು ಅವುಗಳನ್ನು ಒಳಗೊಳ್ಳದಿರುವ ಕೋನವನ್ನು ಕೊಟ್ಟಾಗ

ಈ ಸಂದರ್ಭದಲ್ಲಿ ಸಂದಿಗ್ಧ ಪರಿಸ್ಥಿತಿ ಉಂಟಾಗಬಹುದು.

ಉದಾಹರಣೆಗೆ, b, c, B ಗಳನ್ನು ಕೊಟ್ಟಾಗ ನಾವು C ಯನ್ನು sine ನಿಯಮದಿಂದ ಪಡೆಯಬಹುದು:

$$\frac{c}{\sin C} = \frac{b}{\sin B}$$

$$\therefore \sin C = \frac{c \sin B}{b}$$

(i) $b < c \sin B$ ಆದಾಗ $\sin C > 1$ ಇದು ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲ, ಏಕೆಂದರೆ ಯಾವಾಗಲೂ $\sin C \leq 1$

(ii) $b = c \sin B$ ಆದಾಗ $\sin C = 1$, ಅಂದರೆ $C = 90°$. ಆಗ ಒಂದೇ ಒಂದು ತ್ರಿಕೋನವನ್ನು ರಚಿಸಬಹುದು.

(iii) $b > c \sin B$ ಆದಾಗ $\sin C < 1$

ಆಗ C ಮತ್ತು $180 - C$ ಎರಡು ಕೋನಗಳು ಈ ಸಮೀಕರಣಕ್ಕೆ ಪರಿಹಾರವಾಗುತ್ತವೆ. ಒಂದು ಲಘು ಕೋನವಾಗಿರುತ್ತದೆ. ಇನ್ನೊಂದು ಅಧಿಕ ಕೋನವಾಗಿರುತ್ತದೆ.

ಉದಾಹರಣೆಗಳು

1. $c = \sqrt{3}$, $b = \sqrt{2}$ ಮತ್ತು $B = 45°$ ಇದ್ದರೆ ತ್ರಿಕೋನ ABC ಯನ್ನು ಬಿಡಿಸಿ.

ಈಗ, $\sqrt{2} < \sqrt{3}$ ಆಗಿರುವುದರಿಂದ $b < c$

ಆದ್ದರಿಂದ, ಎರಡು ತ್ರಿಕೋನಗಳನ್ನು ರಚಿಸಬಹುದು. sine ನಿಯಮದಿಂದ

$$\frac{c}{\sin C} = \frac{b}{\sin B}$$

ಅಥವಾ $$\frac{\sqrt{3}}{\sin C} = \frac{\sqrt{2}}{\frac{1}{\sqrt{2}}}$$

ಅಥವಾ $\sin C = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\therefore\ C = 60^\circ$ ಅಥವಾ $C = 120^\circ$

(i) $C = 60^\circ$ ಆದಾಗ, $A = 180^\circ - (B + C)$

ಅಂದರೆ, $A = 180^\circ - (45^\circ + 60^\circ)$

ಅಥವಾ $A = 75^\circ$

ಈಗ, $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$

ಅಂದರೆ, $\frac{a}{\sin 75^\circ} = \frac{\sqrt{2}}{\sin 45^\circ}$

$$\frac{a}{\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}} = \frac{\sqrt{2}}{\frac{1}{\sqrt{2}}}$$

ಅಥವಾ $a = \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2}(\sqrt{6} + \sqrt{2})$.

(ii) $C = 120^\circ$ ಆದಾಗ

$A = 180^\circ - (45^\circ + 120^\circ)$

ಅಥವಾ $A = 15^\circ$

ಈಗ, $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$

ಅಂದರೆ, $\frac{a}{\sin 15^\circ} = \frac{\sqrt{2}}{\sin 45^\circ}$

$$\therefore \frac{a}{\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}} = \frac{\sqrt{2}}{\frac{1}{\sqrt{2}}}$$

ಅಥವಾ $a = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2}(\sqrt{6} - \sqrt{2})$

ಆದ್ದರಿಂದ ABC ತ್ರಿಕೋನದ ಎರಡು ಪರಿಹಾರಗಳು:

(i) $a = \frac{1}{2}(\sqrt{6} + \sqrt{2})$, $A = 75°$ ಮತ್ತು $C = 60°$

(ii) $a = \frac{1}{2}(\sqrt{6} - \sqrt{2})$, $A = 15°$ ಮತ್ತು $C = 120°$.

2. $b = 2$, $c = \sqrt{6}$ ಮತ್ತು $C = 120°$ ಆದಾಗ ABC ತ್ರಿಕೋನವನ್ನು ಬಿಡಿಸಿ.

ಇಲ್ಲಿ, $\sqrt{6} > 2$ ಆಗಿರುವುದರಿಂದ $c > b$.

ಕೋನದ ಎದುರಿನ ಭುಜವು ಇನ್ನೊಂದು ಭುಜಕ್ಕಿಂತ ಜಾಸ್ತಿ ಇದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ಒಂದೇ ಒಂದು ತ್ರಿಕೋನವನ್ನು ರಚಿಸಬಹುದು.

ಈಗ, $\frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$

ಅಂದರೆ, $\frac{2}{\sin B} = \frac{\sqrt{6}}{\sin 120°}$

ಅಥವಾ $\frac{2}{\sin B} = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{3}/2}$

ಅಥವಾ $\sin B = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{6}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\therefore B = 45°$

ಈಗ, $A = 180° - (120° + 45°)$

ಅಥವಾ $A = 15°$

ಹಾಗೆಯೇ $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$

ಅಂದರೆ, $\frac{a}{\sin 15°} = \frac{2}{\sin 45°}$

$$\frac{a}{\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}} = \frac{2}{\frac{1}{\sqrt{2}}}$$

$$\therefore\ a = \sqrt{3} - 1$$

ಆದ್ದರಿಂದ $a = \sqrt{3} - 1,\ A = 15°$ ಮತ್ತು $B = 45°$.

12.2.4 ಒಂದು ಭುಜ ಮತ್ತು ಎರಡು ಕೋನಗಳನ್ನು ಕೊಟ್ಟಾಗ

ABC ತ್ರಿಭುಜದಲ್ಲಿ $a, B, C,$ ಕೊಟ್ಟಾಗ 3ನೇ ಕೋನವನ್ನು $A + B + C = 180°$ ಸೂತ್ರದಿಂದ ಹಾಗೂ sine ಸೂತ್ರ $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$ ದಿಂದ b ಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದು. ಹಾಗೆಯೇ c ಯನ್ನೂ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದು.

ಉದಾಹರಣೆಗಳು

1. $B = 120°,\ A = 45°$ ಮತ್ತು $a = 2$ ಆದಾಗ ತ್ರಿಕೋನವನ್ನು ಬಿಡಿಸಿ.

ಈಗ, $C = 180° - (A + B)$

$$= 180° - (45° + 120°) = 15°$$

ಹಾಗೆಯೇ $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$

ಅಂದರೆ, $\frac{2}{\sin 45°} = \frac{b}{\sin 120°}$

ಅಥವಾ $\frac{2}{\frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{b}{\frac{\sqrt{3}}{2}}$

ಅಥವಾ $b = \sqrt{6}$.

ಇನ್ನೊಮ್ಮೆ sine ನಿಯಮವನ್ನು ಬಳಸುವುದರಿಂದ

$$\frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

ಅಂದರೆ, $\frac{\sqrt{6}}{\sin 120°} = \frac{c}{\sin 15°}$

ಅಥವಾ $\frac{\sqrt{6}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{c}{\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}}$

$$\therefore\ c = \sqrt{3} - 1.$$

ಆದ್ದರಿಂದ, $b = \sqrt{6}$, $c = \sqrt{3} - 1$ ಮತ್ತು $C = 15°$.

2. $A = 45°$, $B = 60°$ ಮತ್ತು $a = 6$ ಆದಾಗ ತ್ರಿಕೋನ ABC ಯನ್ನು ಬಿಡಿಸಿರಿ.

ಈಗ, $C = 180° - (A + B)$

$= 180° - (105°)$

ಅಂದರೆ, $C = 75°$.

ಹಾಗೆಯೇ, $\frac{b}{\sin B} = \frac{a}{\sin A}$

ಅಂದರೆ, $\frac{b}{\sin 60°} = \frac{6}{\sin 45°}$

ಅಥವಾ $\frac{b}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{6}{\frac{1}{\sqrt{2}}}$ ಅಥವಾ $\frac{2b}{\sqrt{3}} = 6\sqrt{2}$

ಅಥವಾ $b = \frac{6\sqrt{2}\ \sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{6}$.

ಇನ್ನೊಮ್ಮೆ sine ನಿಯಮವನ್ನು ಬಳಸುವುದರಿಂದ

$$\frac{c}{\sin C} = \frac{a}{\sin A}$$

ಅಂದರೆ, $\frac{c}{\sin 75^\circ} = \frac{6}{\sin 45^\circ}$

ಅಥವಾ $\frac{c}{\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}} = \frac{6}{\frac{1}{\sqrt{2}}}$

$\therefore\ c = 3(\sqrt{3}+1)$

ಆದ್ದರಿಂದ, $b = 3\sqrt{6}$, $c = 3(\sqrt{3}+1)$ ಮತ್ತು $C = 75^\circ$

ಅಭ್ಯಾಸ - 12.2

ಈ ಕೆಳಗಿನವುಗಳಲ್ಲಿ ತ್ರಿಕೋನ ABC ಯನ್ನು ಬಿಡಿಸಿ.

1. $a = 5,\quad b = 5\sqrt{3},\quad c = 5$
2. $a = 2,\quad b = \sqrt{6},\quad c = \sqrt{3} - 1$
3. $a = \sqrt{6} + \sqrt{2},\quad b = 2\sqrt{2},\quad c = 2\sqrt{3}$
4. $a = 2\sqrt{2} - \sqrt{6},\quad b = \sqrt{2},\quad c = 3 - \sqrt{3}$
5. $a = 1,\quad b = \sqrt{6} + \sqrt{2},\quad c = 2 + \sqrt{3}$
6. $a = 4,\quad b = 4\sqrt{3},\quad c = 4$
7. $a = 2,\quad b = \sqrt{2},\quad c = \sqrt{3} + 1$
8. $a = 2\sqrt{3},\quad b = \sqrt{6} + \sqrt{2},\quad c = \sqrt{6} - \sqrt{2}$
9. $a = 2,\quad c = \sqrt{3} - 1,\quad B = 120^\circ$
10. $a = 2,\quad b = \sqrt{3} + 1,\quad C = 60^\circ$
11. $A = 105^\circ,\quad b = \sqrt{6},\quad c = \sqrt{3} - 1$
12. $a = 2,\quad B = 75^\circ,\quad c = \sqrt{6} + \sqrt{2}$
13. $A = 30^\circ.\quad b = 2,\quad c = \sqrt{3} + 1$
14. $a = 2,\quad B = 120^\circ,\quad C = 30^\circ$
15. $b = 2,\quad c = \sqrt{6} - \sqrt{2},\quad A = 135^\circ$

16. $a = 3 - \sqrt{3},\ b = 3 + \sqrt{3},\ A = 15°$
17. $b = 5,\ c = 6,\ B = 60°$
18. $a = \sqrt{3} - 1,\ b = \sqrt{3} + 1,\ B = 75°$
19. $a = 2,\ b = \sqrt{6} + \sqrt{2},\ B = 150°$
20. $B = 30°,\ b = 2,\ c = 2\sqrt{3}$
21. $A = 30°,\ a = \sqrt{2},\ b = 2$
22. $A = 120°,\ a = \sqrt{6},\ b = 2$
23. $a = \sqrt{2},\ b = 4,\ A = 30°$
24. $A = 30°,\ B = 135°,\ c = \sqrt{3} - 1$
25. $A = 45°,\ B = 75°,\ c = 10$
26. $a = 2,\ B = 120°,\ C = 30°$
27. $A = 45°,\ B = 60°,\ b = \sqrt{6}$
28. $B = 105°,\ C = 45°,\ a = 2$

ಗ್ರಂಥ ಋಣ

1. *Highter Algebra*, by Hall & Knight, S. Chand & Co., New Delhi.
2. *The Elements of Coordinate Geometry* by S.L. Loney, Macmillan & Co. Ltd., London.
3. *Plane Trigonometry* by S.L. Loney, Chand & Co., New Delhi.
4. *Number Theory* by J. Hunter, Oliver and Boyd Ltd.
5. *An Introduction to the Theory of Numbers* by Niven and Zuckerman, Wiley Eastern Ltd., New Delhi.
6. *Differential Calculus* by Shantinarayan, Chand & Co., New Delhi.
7. *Differential Calculus* by S. Balachandra Rao and C.K. Shantha, Wiley Eastern Ltd., New Delhi.
8. *A Modern Introduction to Ancient Indian Mathematics* by T.S. Bhanu Murthy, Wiley Eastern Ltd., New Delhi
9. *Indian Mathematics and Astronomy - Some Landmarks* by Dr. S. Balachandra Rao, Jnana Deep Publications, 2388, Rajajinagar II Stage, Bangalore - 5600 10.
10. *History of Ancient Indian Mathematics* by Dr. C.N. Srinivasiengar, The World Press (Prv.) Ltd., Calcutta.
11. *ಗಣಿತ ಶಾಸ್ತ್ರದ ಚರಿತ್ರೆ*, ಸಿ.ಎನ್. ಶ್ರೀನಿವಾಸಯ್ಯಂಗಾರ್, ಮೈಸೂರು ವಿಶ್ವವಿದ್ಯಾನಿಲಯ, ಮೈಸೂರು.
12. *ಶ್ರೀನಿವಾಸ ರಾಮಾನುಜನ್* ಡಾ|| ಎಸ್. ಬಾಲಚಂದ್ರ ರಾವ್, ಕನ್ನಡ ಪುಸ್ತಕ ಪ್ರಾಧಿಕಾರ, ಪಂಪ ಮಹಾಕವಿ ರಸ್ತೆ, ಬೆಂಗಳೂರು - 560 018.

ಉತ್ತರಗಳು

ಅಭ್ಯಾಸ - 1.1 (ಘಾತಾಂಕಗಳು)

1. $\frac{1}{81}$ 2. $\left[\frac{p}{q}\right]^{p+q}$ 10. $\frac{189}{76}$ 11. $x = 1$ ಅಥವಾ $x = 2$

ಅಭ್ಯಾಸ - 1.2 (ಪ್ರತಿಘಾತಗಳು)

1. (i) 3 (ii) 0 (iii) –3 (iv) 2.5 (v) 9
2. (i) 1.71 (ii) $x = 7, y = 3$ (ii) 0.43 ಅಥವಾ 0.68
3. (i) $\sqrt{x} \,.\, y^2 = 5$ (ii) $y^3 = 9x^3$ (iii) $xy\sqrt{x} = 100$
6. (i) 17 (ii) 23

ಅಭ್ಯಾಸ- 2.1 (ಸಮಾಂತರ ಶ್ರೇಢಿಗಳು)

1. (i) 10, 13 (ii) $5x, 6x$ (iv) $x + 6, x + 8$ (vi) 3.7, 3.5
2. (i) 17, 45 (ii) 6, 34 (iii) $5y, 19y$ (iv) 50, 22 (v) 5, 7
3. (i) –63 (ii) –14 (iii) $10x + 8y$ (iv) $23 + 8p$ (v) 19
   (vi) $5n + 5$
4. (i) 16 (ii) 9 (iii) 10 (iv) 18
5. (i) 72 (ii) –86
6. 5, 7, 9 ಅಥವಾ 9, 7, 5
7. 10
8. 3, 57, 357
9. 222, 610, 1365
10. $n(n+1)$, $2n(2n+1)$, $-3n^2 - 2n$

11. 300

12. 1,40,000

13. 30710

14. 9, 12, 15

15. 1, 7, 13, 19

16. 6, 8, 10, 12

19. 13, 15, 17, 19

21. $2x + (2x - 3y)(r - p)/(p - q)$ ಅಥವಾ $[2x(r - q) + 3y(p - r)]/(p - q)$

23. 6, 9, 12, 15, 18

24. 17,000

25. 20

26. $\dfrac{2n}{3n-1}$

27. 21

ಅಭ್ಯಾಸ - 2.2 (ಗುಣೋತ್ತರ ಶ್ರೇಢಿಗಳು)

1.

	r ನ ಬೆಲೆ	nನೇ ಪದ
(i)	2	2^n
(ii)	$\frac{5}{2}$	$5^{n-1} \,.\, 2^{3-n}$
(iii)	-3	$3(-3)^{n-1}$
(iv)	$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}\left(-\frac{1}{4}\right)^{n-1}$
(v)	$\frac{2}{3}$	$\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$

2. 128, 64, 32, 16, 8, ...

3. $\frac{1}{8}(4)^{n-1}$

4. 2^{4-n}

5. 4, 8, 16, 32

6. (ii) $G.P., \frac{2}{3}\left[1-\left(-\frac{1}{2}\right)^{n}\right], \frac{2}{3}$

(iii) $G.P., 3^{n}-1, -1$

(v) $G.P., \frac{1}{2}\left[1-\frac{1}{3^{n}}\right], \frac{1}{2}$

9. $\frac{1}{x-y}\left[\frac{x^{2}(1-x^{n})}{1-x}-\frac{y^{2}(1-y^{n})}{1-y}\right]$

10. 11ನೇ ಪದ

12. 5

14. $\frac{an(n+1)(1-r^{n})}{2(1-r)}$

17. $\frac{n}{1-x}-\frac{x(1-x^{n+1})}{(1-x)^{2}}$

18. $\frac{PR(R^{n}-1)}{R-1}$, ಇಲ್ಲಿ $R=\left[1+\frac{r}{100}\right]$

19. ರೂ. 1483

20. $\frac{542632}{999000}$

21. $\frac{4n}{9} - \frac{4}{81} + \frac{4}{81.10^n}$

23. $\frac{7}{9}$

24. $\frac{35}{99}$

ಅಭ್ಯಾಸ - 2.3 (ಸಂಗತ ಶ್ರೇಢಿಗಳು)

7. $1, \frac{q}{2}$ 15. 3 17. $\frac{3^n - 1}{2}$

ಅಭ್ಯಾಸ - 2.4
(ಸಮಾಂತರ, ಗುಣೋತ್ತರ ಮತ್ತು ಸಂಗತ ಮಧ್ಯಕಗಳು)

4. $\frac{8}{35}, \frac{8}{30}, \frac{8}{25}$ 5. 120 10. 12, 108

12. (ii) 9 15. 1, 9

ಅಭ್ಯಾಸ - 3 (ಗಣಿತಾನುಮಾನ)

B. 1. $\frac{1}{2}n(4n^2 + 5n - 1)$

2. $\frac{1}{6}n(4n^2 + 21n + 35)$

3. $\frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$

4. $n(3n^2 - 1)$

5. $\frac{1}{4}n(n+1)(n+2)(n+3)$

6. $\frac{2}{3}n(n+1)(2n+1)$

7. 4615

8. $\frac{1}{3}n(n+1)(3n^2+5n+1)$

9. $\frac{1}{12}n(n+1)^2(n+2)$

10. $\frac{n}{48}(n+1)(3n^2 + 11n + 10)$

11. $\frac{n}{3}(n+1)(6n^2 - 2n - 1)$

12. $\frac{n}{3}(n+1)(6n^2 + 14n + 7)$

13. $\frac{n}{6}(n+1)(n + 2)$

14. $\Sigma n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$

15. $\frac{4(n+2)(n+3)}{2n+3}$

16. (i) $\frac{2n(n+1)(n+2)(3n-1)}{3}$

(ii) $\frac{n}{6}(9n^3+20n^2-75n-170)$

(iii) $\frac{4(4^n - 1)}{3} + \frac{3n(n+1)}{2}$

(iv) $\frac{n(n+1)(n+8)}{6}$

ಅಭ್ಯಾಸ - 4.1 (ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣಗಳು)

1. ದುಂಬಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ x ಆಗಿರಲಿ. ಆಗ, ಗುಲಾಬಿ ಪುಷ್ಪಗಳತ್ತ ಹೋದ ದುಂಬಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ $=\left(\frac{x}{2}\right)^{1/2} + \frac{8}{9}x$; ಉಳಿದ ದುಂಬಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ$=2$. ಆದ್ದರಿಂದ, ದುಂಬಿಗಳ ಒಟ್ಟು ಸಂಖ್ಯೆ : $\left(\frac{x}{2}\right)^{1/2} + \frac{8}{9}x + 2 = x$. . ಆಗ, $x = 72$ ಎಂಬ ಸಮರ್ಪಕವಾದ ಉತ್ತರ ದೊರೆಯುತ್ತದೆ.

2. ನವಿಲುಗಳ ಒಟ್ಟು ಸಂಖ್ಯೆ x ಆಗಿರಲಿ, ಆಗ, ಸಮೂಹದ 1/16 ಭಾಗ ನವಿಲುಗಳು $= x/16$

   ಸಮೂಹದ 1/8 ಭಾಗ $= x/8$ ನವಿಲುಗಳು

   ಸಮೂಹದಲ್ಲಿ ಉಳಿದ ನವಿಲುಗಳು $= x - \left(\frac{x}{16} + \frac{x}{8}\right) = \frac{13x}{16}$

   ಈ ಸಂಖ್ಯೆಯ 1/3 ಭಾಗ $= \frac{1}{3}\left(\frac{13x}{16}\right) = \frac{13x}{48}$ ನವಿಲುಗಳು.

   ಇದರ ನಂತರ ಉಳಿದ ಸಂಖ್ಯೆ $= \frac{13x}{16} - \frac{13x}{48} = \frac{13x}{24}$ ನವಿಲುಗಳು.

   ಈ ಉಳಿದ ಸಂಖ್ಯೆಯ 1/6 ಭಾಗ $= \frac{13x}{144}$ ನವಿಲುಗಳು.

   ಇದಾದ ನಂತರ ಉಳಿದ ಸಂಖ್ಯೆ $= \frac{13x}{24} - \frac{13x}{144} = \frac{65x}{144}$ ನವಿಲುಗಳು.

   ಬಕುಳ ವನದಲ್ಲಿದ್ದ ನವಿಲುಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ $= 5\sqrt{x}$

   ಇದನ್ನು ಕಳೆದು ಉಳಿದ ನವಿಲುಗಳ ಶೇಷ ಸಂಖ್ಯೆ $= \frac{65x}{144} - 5\sqrt{x}$

ಈ ಉಳಿದ ನವಿಲುಗಳ ದತ್ತ ಸಂಖ್ಯೆ $= 5$

ಅಂದರೆ, $\frac{65x}{144} - 5\sqrt{x} = 5$. ಇದನ್ನು ಸರಳೀಕರಿಸಿದರೆ

$$(13x - 144) = 144\sqrt{x}$$

ಎಂಬುದಾಗಿಯೂ, ಎರಡೂ ಭಾಗಗಳ ವರ್ಗವನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡಾಗ

$$169x^2 - 24480x + 20736 = 0$$

ಎಂಬ ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣವು ದೊರೆಯುತ್ತದೆ. ಇದನ್ನು ಬಿಡಿಸಿದಾಗ

$x = 144$ ಮತ್ತು $x = \frac{144}{169}$ ಎಂಬ ಎರಡು ಮೂಲಗಳ ಪೈಕಿ $x = 144$ ಎಂಬುದು ಸಮರ್ಪಕವಾದ ಉತ್ತರ.

3. -12 6. $x^2 - (p^2 - 2q)x + q^2 = 0$

ಅಭ್ಯಾಸ - 4.2 (ಮಿಶ್ರ ಊಹ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು)

1. (a) $-1 + 14i$ (b) $-2\sqrt{5}i + 4$
   (c) $-(3 + 2\sqrt{2}) + i(3\sqrt{2} - 2)$ (d) $\frac{(1 - 3i)}{2}$
   (e) -1

2. (a) $-\frac{9}{13} + \frac{19}{13}i$ (b) i (c) $-\frac{1}{5} + \frac{3}{5}i$
   (d) $\frac{18i}{13}$ (e) $\frac{4}{7} - \frac{\sqrt{6}}{14}i$

ಅಭ್ಯಾಸ-4.3 (ಸಹಾಂಕಗಳ ಮತ್ತು ಮೂಲಗಳ ಸಂಬಂಧಗಳು)

1. (a) $\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}$ (b) $-\frac{1}{2}, 2, \frac{9}{2}$
   (c) 1, 3, 5 (d) 1, 2, 3 (e) $-4, -1, 2, 5$

2. (a) 6, 2, 2/3 (b) 8/9, −2/3, 1/2
   (c) 2/9, 2/3, 2 (d) 1/4, 1/2, 1 (e) 8/9, 4/3, 2, 3

3. (a) 1, 1/2, 1/3 (b) –1, 1/2, 1/5

(c) 1, 1/5, 1/9 (d) 2/3, 2/5, 2/7

4. 5, 4, –4

ಅಭ್ಯಾಸ - 4.4 (ಮೂಲಗಳ ಸಮಾಂಗ ಉತ್ಪನ್ನಗಳು)

1. $x^3 - 9x^2 - 17x - 49 = 0$
2. (i) –2 (ii) –12 (iii) –6
3. $x^4 - x^2 - 1 = 0$

ಅಭ್ಯಾಸ - 4.5 (ಮೂಲಗಳ ಸಹವರ್ತಿತ್ವ)

1. $5 + \sqrt{2}$, $5 - \sqrt{2}$, $-2+\sqrt{3}$, $-2-\sqrt{3}$
2. $\sqrt{3}-2$, $-\sqrt{3}-2$, i, $-i$, $\dfrac{1+i\sqrt{3}}{2}$, $\dfrac{1-i\sqrt{3}}{2}$
3. $2+i$, $2-i$, 1
4. $3+\sqrt{2}$, $3-\sqrt{2}$, 3
5. $2+3i$, $2-3i$, $-3, 1$

ಅಭ್ಯಾಸ - 4.6 (ಘನ ಸಮೀಕರಣಗಳು)

1. 8, $-4+3\sqrt{3}i$, $-4-3\sqrt{3}i$
2. -7, $\dfrac{7+i3\sqrt{3}}{2}$, $\dfrac{7-i3\sqrt{3}}{2}$
3. 4, $-2+i5\sqrt{3}$, $-2-i5\sqrt{3}$
4. 10, $-5+\sqrt{3}$, $-5-\sqrt{3}$
5. -6, $3+i4\sqrt{3}$, $3-i4\sqrt{3}$
6. 6, $-3 \pm i2\sqrt{3}$
7. 5, $\dfrac{-5 \pm i3\sqrt{3}}{2}$

8. $2, -1 \pm i\sqrt{6}$

9. $-(a+b), \frac{1}{2}[(a+b) \pm i\sqrt{3}(a-b)]$

ಅಭ್ಯಾಸ – 5.1 (ಕ್ರಮಯೋಜನೆಗಳು)

1. 24 2. (i) 120 (ii) 360 3. 3 4. 7 5. 4
6. 24 7. 5040 8. (i) 120 (ii) 24 9. (a) (i) 120 (ii) 6 (iii) 2 (b) (i) 40320 (ii) 120 (iii) 6 10. (i) 120 (ii) 24 (iii) 120
11. 5040 12. 60 13. 360 14. 3
15. (i) $\frac{13!}{2!3!2!2!}$ (ii) $\frac{10!}{2!3!2!}$ (iii) $\frac{13!}{3!4!2!2!}$ (iv) $\frac{11!}{4!4!2!}$

ಅಭ್ಯಾಸ – 5.2 (ವಿಕಲ್ಪಗಳು)

1. 455; 816 3. 250 4. 70 5. (a) 4080 (b) 680
6. 3 7. 6 8. 20 9. 120 11. (i) 210 (ii) 84 (iii) 126
12. 210 13. 6 14. 126 15. (i) 840 (ii) 1092 16. 31

ಅಭ್ಯಾಸ – 6.1 (ದ್ವಿಪದ ಪ್ರಮೇಯ)

1. (a) $32x^5 - 10x^3 + 20x - \frac{20}{x}$

(b) $x^{5/2} + 5x^{3/2} + 10x^{1/2} + \frac{10}{x^{1/2}} + \frac{5}{x^{3/2}} + \frac{1}{x^{5/2}}$

(c) $64a^6 - 64a^5b + \frac{80}{3}a^4b^2 - \frac{160}{27}a^3b^3 + \frac{20}{27}a^2b^4 - \frac{4}{81}ab^5 + \frac{b^5}{729}$

(d) $32 + 80\sqrt{x} + 80x + 40x\sqrt{x} + 10x^2 + x^2\sqrt{x}$

2. $^{18}C_6 . 3^{12} . x^6$, $^{18}C_{10} . 3^8 . x^{-2}$

3. $(28/9)\ x^6 y^6$

4. $-29305\ a^3 b^{-7}$

5. $1250x^3$, $250x^2$

6. 11ನೇ ಪದ, $^{25}C_{10} .\ 3^{10} .\ 2^{15}$

7. -520

8. -1140

ಅಭ್ಯಾಸ - 6.2 (ದ್ವಿಪದ ಸಹಾಂಕಗಳು)

2. (a) $\dfrac{2n!}{(n-4)!\,(n+4)!}$ (b) $(n + 2)\,2^n$ (c) $(2n + 3)\,2^n$

(d) $\dfrac{(2n)!}{(n!)^2}$ (e) 0 (f) $(9n - 14)\,2^{n-1} + 7$

ಅಧ್ಯಾಯ – 7 (ಆಂಶಿಕ ಭಿನ್ನರಾಶಿಗಳು)

1. $\dfrac{1}{x+2}+\dfrac{2}{x+3}$

2. $\dfrac{1}{x-5}-\dfrac{1}{x-4}$

3. $\dfrac{9}{5(x+3)}-\dfrac{4}{5(x-2)}$

4. $\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{2}{(x+1)^2}$

5. $\dfrac{3}{4(x-2)}-\dfrac{3}{4(x+2)}+\dfrac{1}{(x-2)^2}$

6. $\dfrac{4}{9(x-2)}+\dfrac{1}{(x+1)}+\dfrac{10}{3(x+1)^2}$

7. $2+\dfrac{14x+23}{x^2-7x-12}$

(ವಿ.ಸೂ: $x^2-7x-12$ ನ್ನು ಪುನಃ ಸರಳ ಅಪವರ್ತಿಸಲು ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲ)

8. $2+\dfrac{-17}{x-3}+\dfrac{31}{x-4}$

9. $\dfrac{8-x}{9+x^2}-\dfrac{8}{2x+1}$

10. $\dfrac{1}{2(x-1)}-\dfrac{1}{x-2}+\dfrac{1}{2(x-3)}$

11. $\dfrac{1}{2(x^2+1)}+\dfrac{1}{4(1-x)}+\dfrac{1}{4(1+x)}$

12. $1+\dfrac{1}{3(x-1)}-\dfrac{x+2}{3(x^2+x+1)}$

13. $x-\dfrac{6}{x-5}-\dfrac{1}{x+2}$

14. $\dfrac{1}{3(x+1)}+\dfrac{2-x}{3(x^2-x+1)}$

15. $\dfrac{1}{3(x-1)}-\dfrac{x-2}{x^2+x+1}$

16. $\frac{9}{8x}+\frac{1}{2x^2}-\frac{4}{x+2}+\frac{3}{(x+2)^2}$

17. $\frac{x}{x^2+1}+\frac{1-x}{x^2-x+1}$

18. $\frac{1}{2(1-x)}-\frac{4}{1-2x}+\frac{9}{2(1-3x)}$

19. $\frac{1}{x}+\frac{1}{x+1}-\frac{4}{2x+1}$

20. $\frac{-3}{2(x-1)}+\frac{1}{(x-1)^2}-\frac{2x+5}{2(x^2+1)}$

21. $\frac{-2}{3x-1}-\frac{1}{x-1}$

ಅಭ್ಯಾಸ – 8 (ಸಂಖ್ಯಾಸಿದ್ಧಾಂತ ಮತ್ತು ಸಮಶೇಷೀಯತೆ)

1. (210, 55) = 5; 5 = 5 (210) – 19 (55)
2. (963, 657) = 9; (i) 9 = 963 (–15) + 657 (22)
   (ii) 9 = 963(–672) + 657 (985)
4. (i) ಹೌದು (ii) ಹೌದು (iii) ಇಲ್ಲ.
5. (i) 11 ; 2047 (ii) 6; 1302 (iii) 12; 2262
6. (a) 0 (b) 10 (c) 6 (d) 2 (e) ಇದಕ್ಕೆ ಪರಿಹಾರವಿಲ್ಲ.
7. (a) 61 (b) 1 (c) 5 (d) 29
8. (a) 1 (b) 7 (c) 3 (d) 1

ಅಭ್ಯಾಸ – 9.1 (ದೂರದ ಸೂತ್ರ)

1. $2\sqrt{5}(2+\sqrt{2})$ 4. $y = 8$ ಅಥವಾ $y = -4$ 5. $\left(-\frac{37}{5}, 0\right)$

6. $(2, -4)$, $(-2, 4)$

ಅಭ್ಯಾಸ – 9.2 (ವಿಭಜನಾ ಬಿಂದುಗಳು)

1. (i) $\left(\frac{21}{5}, \frac{14}{5}\right)$ (ii) $\left(\frac{-7}{4}, \frac{-5}{4}\right)$ (iii) $(22, -22)$ (iv) $(10, -4)$

2. $\left(\frac{5}{3}, \frac{4}{3}\right)$, $\left(\frac{4}{3}, \frac{5}{3}\right)$ 3. $(3, 1)$, $\left(\frac{5}{2}, \frac{5}{2}\right)$, $\left(\frac{7}{2}, \frac{-1}{2}\right)$

4. $\left(\frac{5}{2}, \frac{5}{2}\right)$, $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$, $\left(0, \frac{-1}{2}\right)$ 5. 6, 8, 6

6. $(4, 2)$, $(2, 4)$, $(1, 1)$ 7. $(7, 2)$

8. $\left(\frac{-2}{3}, \frac{7}{3}\right)$ 9. $(5, 3)$

10. x – ಅಕ್ಷವು ಅಂತರೀಯವಾಗಿ 1 : 2 ಪ್ರಮಾಣದಲ್ಲಿ; $\left(\frac{10}{3}, 0\right)$
 y – ಅಕ್ಷವು ಅಂತರೀಯವಾಗಿ 3 :1 ಪ್ರಮಾಣದಲ್ಲಿ; $(0, -5)$

11. $(1, 5)$ 12. ಬಾಹ್ಯವಾಗಿ 3:4 ಪ್ರಮಾಣದಲ್ಲಿ 13. $\frac{\sqrt{58}}{2}$, $\frac{\sqrt{10}}{2}$, 4

14. $(-8, 1)$

15. 3:1 ಪ್ರಮಾಣದಲ್ಲಿ , $a = -3$

ಅಭ್ಯಾಸ – 9.3 (ತ್ರಿಕೋನದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ)

1. (i) 4 (ii) 38 (iii) 33

2. (i) 5 (ii) 33/2 (iii) 9

3. $a = -3$

ಅಭ್ಯಾಸ – 9.4 (ಬಿಂದುಪಥ ಸಮೀಕರಣ)

1. $x = y$ 2. $x^2 + y^2 - 6x - 8y = 0$ 3. $x - y + 1 = 0$

4. $x - 2y - 1 = 0$ 5. $3x - 2y - 32 = 0$

6. $x^2 + y^2 + 6x + 4y - 13 = 0$

7. $x^2(m^2 - n^2) + y^2(m^2 - n^2) - 2axm^2 + m^2a^2 = 0$

8. $x^2 + y^2 - 5x - 7y + 18 = 0$

ಅಭ್ಯಾಸ – 9.5 (ಸರಳ ರೇಖೆಗಳು)

1. $2x + 2\sqrt{3}y - 3\sqrt{3} = 0$ 2. $\sqrt{3}x + y - 7 = 0$ 3. $2x - 7y + 62 = 0$

4. $28x + 7y - 26 = 0$ 5. $3y - 2 = 0$ 6. $y + 5 = 0$

7. $4x - 3 = 0$ 8. $x + 8 = 0$ 9. $x - y + 1 = 0$

10. (i) $3x - 2y + 3 = 0$ (ii) $4x - y = 0$ (iii) $2x - y(t_2 + t_1) - 2at_1t_2 = 0$
 (iv) $x + yt_1t_2 - a(t_2 + t_1) = 0$ (v) $5x + 6y - 8 = 0$

11. $6x - 5y - 30 = 0$ 12. $x - y + 5 = 0$ 13. $2x + y - 12 = 0$

14. $5x + 4y - 20 = 0,\quad 5x + y + 10 = 0$

15. $4x + 3y - 17 = 0$ 16. $2x - y + 7 = 0$ 17. $x + 2y - 4 = 0$

18. $4x - 3y - 12 = 0$

19. (i) ಓಟ $= -\frac{y_1}{x_1}$ (ii) $\left(\frac{y_1}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2}}\right)x + \left(\frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2}}\right)y = \left(\frac{2x_1y_1}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2}}\right)$
 (iii) $p = \frac{2x_1y_1}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2}}$ 20. $\sqrt{3}x + y - 10 = 0$

21. (i) $3x-3y-8\sqrt{2}=0$ (ii) $x+y-3\sqrt{2}=0$ (iii) $x+\sqrt{3}y+10=0$

22. (i) $a=-2$ (ii) $a=\frac{1}{2}$ (iii) $a=\frac{3}{2}$ 23. 1 : 3

24. 10 : 9 25. 5 : 7

ಅಭ್ಯಾಸ - 9.6 (ಸರಳರೇಖೆಗಳ ನಡುವಿನ ಕೋನ)

3. $2x-3y=0$ 4. $7x+4y-26=0$ 5. $\theta=\tan^{-1}\left(\frac{1}{8}\right)$

6. $10x+6y-43=0$ 7. $5x-2y+8=0$ 8. $5x+2y+23=0$

9. (i) $2x+7y+8=0$ (ii) $7x+2y+8=0$ (iii) $x-y=0$

10. (i) $3x-5y+9=0$ (ii) $5x+3y-19=0$

ಅಭ್ಯಾಸ - 9.7 (ಛೇದನ ಬಿಂದು; ದ್ವಿಬಾಹುಗಳು)

1. $2x-y-3=0$ 2. $x-4y-5=0$ 3. $19x-19y+59=0$

4. $9x-3y+11=0$ 5. $5x+6y+10=0$ 6. $(-3, 2)$

7. $\left(\frac{5}{7}, \frac{4}{7}\right)$ 8. $(11, -9)$ 9. $(-4, -3)$

10. $x+y+2=0$ 11. $100x+59y+300=0$

13. $(-1, 2)$ 14. (i) $k=2$ (ii) $k=4$

16. 1 ಮಾನ 17. $\frac{8}{\sqrt{19}}$ ಮಾನಗಳು 18. $(3, 2)$

19. $y=2x+11$ 20. (i) $\frac{7}{\sqrt{10}}$ (ii) $\frac{1}{5}$

21. $9x^2+24xy+16y^2-198x-164y+589=0$

22. $x - 4y = 0$ 23. $6x + 6y - 5 = 0$ (ಲಘುಕೋನ ದ್ವಿಭಾಜಕ), $2x - 2y\ 1 = 0$

25. (i) $7x - 56y + 65 = 0$ (ii) $99x + 27y + 14 = 0$
(iii) $3x - 3y + 8 = 0$

ಅಭ್ಯಾಸ - 9.8 (ಜೋಡಿ ಸರಳರೇಖೆಗಳು)

1. (a) $2x + y = 0, 3y - 4x = 0, \quad \theta = \tan^{-1}(2)$
(b) $3x - y = 0, 2x - y = 0, \theta = \tan^{-1}\left(\frac{1}{7}\right)$
(c) $2x + y = 0, x - 2y = 0, \theta = \frac{\pi}{2}$

2. $\left(\frac{8}{3}, \frac{8}{3}\right)$ 7. $\frac{-10}{9}, \quad \tan^{-1}\left(\frac{3}{5}\right)$ 8. $\frac{5}{2}$ ಅಥವಾ $\frac{10}{3}$

9. $\theta = \tan^{-1}\left(\frac{2}{11}\right)$ 10. $\frac{3}{2}$ 11. $\sqrt{5}$

12. $3x + 4y - 1 = 0$ ಮತ್ತು $4x - 3y + 1 = 0$
ಛೇದನ ಬಿಂದು $= \left(-\frac{1}{25}, \frac{7}{25}\right)$

13. $a = 2, \quad c = -3$

ಅಧ್ಯಾಯ - 10 (ಕಲನಶಾಸ್ತ್ರ)

1. (i) 1, $\frac{4}{7}$ (iv) (a) ಬೆಸ (b) ಬೆಸ (c) ಸರಿ
(d) ಬೆಸವೂ ಅಲ್ಲ, ಸರಿಯೂ ಅಲ್ಲ

2. (i) 33 (ii) $\frac{10}{3}$ (iii) 0 (iv) 0 (v) $\frac{1}{5}$

3. (i) –2 (ii) 3 (iii) 48 (iv) –2 (v) 1 (vi) $\frac{7}{13}$

4. (i) -2 (ii) $\sqrt{10}$ (iii) $\frac{q}{p}$ (iv) 4 (v) $\frac{1}{2}$

5. (i) 2 (ii) $\frac{2}{3}$ (iii) 1 (iv) 0 (v) 5
(vi) $\frac{1}{3}$ (vii) $\frac{1}{2}$ (viii) $\frac{1}{4}$ (ix) $\frac{3}{4}$

6. (i) 2 (ii) 3 (iii) $\frac{1}{2\sqrt{2}}$ (iv) $\frac{2}{3}$ (v) $\frac{5}{3}$
(vi) $\frac{3}{4}$ (vii) $\frac{10}{3}a^{-14/5}$ (viii) $\frac{4\sqrt{2}}{3}$ (ix) $\frac{1}{256}$ (x) $\frac{-243}{4}$

7. (i) 9 (ii) $\frac{1}{2}$ (iii) $\frac{3}{4}$ (iv) 0 (v) $2\cos a$
(vi) $\frac{3}{2}$ (vii) $\frac{\pi}{180}$ (viii) $\frac{3}{2}$ (ix) 2 (x) 1
(xi) $\frac{2}{\pi}$ (xii) $\frac{1}{2}$ (xiii) $\frac{4}{\pi}$ (xiv) 4 (xv) $2\sqrt{\alpha}\cos\alpha$

8. (i) e^3 (ii) e^2 (iii) $\frac{p}{q}$ (iv) $\frac{1}{3}\log_e 2$ (v) $\log_e\frac{4}{5}$

ಅಭ್ಯಾಸ -11.1 (ರೇಡಿಯನ್ ಮಾನ)

1. (i) $7\frac{\pi}{9}$ (ii) $35\frac{\pi}{36}$ (iii) $49\frac{\pi}{36}$ (iv) $-57\frac{\pi}{36}$ (v) $177\frac{\pi}{7}$

2. (i) $135°$ (ii) $1800°$ (iii) $458°21'58.4''$ (iv) $210°$

3. $81°, 9°$ 4. $\frac{\pi}{3}$ 5. $3\frac{\pi}{2}$ 6. $34'\,32''$

7. $25\frac{\pi}{6}$ ಸೆಂ.ಮೀ., $625\frac{\pi}{6}$ ಚದರ ಸೆಂ.ಮೀ.

8. 10.05 ಮೀ. 9. $\frac{7}{398}$ ನಿಮಿಷ 10. 94.248 ಮೀ.

ಅಭ್ಯಾಸ -11.2 (ತ್ರಿಕೋನಮಿತೀಯ ಸಮೀಕರಣಗಳು)

19. $\sin\theta = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}, \theta = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}, \quad \operatorname{cosec}\theta = \frac{\sqrt{1+x^2}}{x},$

$\sec\theta = \sqrt{1+x^2}, \quad \cot\theta = \frac{1}{x}$

20. $\cos A = \frac{\sqrt{9-4x^2}}{3}, \quad \tan A = \frac{2x}{\sqrt{9-4x^2}},$

$\operatorname{cosec} A = \frac{3}{2x}, \quad \sec A = \frac{3}{\sqrt{9-4x^2}}, \quad \cot A = \frac{\sqrt{9-4x^2}}{2x}$

21. $\frac{3}{4}$ 22. $3, \frac{7}{3}$

ಅಭ್ಯಾಸ - 11.3 (ಮುಖ್ಯಕೋನಗಳ ಪ್ರಮಾಣಗಳು)

1. (i) $\frac{1}{8}$ (iii) 0 (iv) $\frac{4}{3}$

2. (i) $\frac{2}{3}, \frac{-7}{2}$ (ii) 0 , 2 (iii) –16 (iv) 1 (v) 2

ಅಭ್ಯಾಸ -11.4 (ಸಂಬಂಧಿತ ಕೋನಗಳು)

1. (i) $\frac{1}{2}$ (ii) 1 (iii) –2 (iv) $\frac{1}{\sqrt{3}}$ (v) $\frac{-2}{\sqrt{3}}$ (vi) 1
   (vii) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (ix) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (x) 1

2. (i) 45°, 135° (ii) 150°, 210° (iii) 210°, 330°
   (iv) 135°, 315° (v) 135°, 225°

3. (i) –1 (ii) 0 (iii) 2

11. $\frac{19}{11}$ 12. $\frac{2}{45}$ 13. $\frac{50}{39}$

ಅಭ್ಯಾಸ -11.5 (ಸಂಯುಕ್ತ ಕೋನಗಳು)

1. $\frac{8-3\sqrt{5}}{15}, \frac{4\sqrt{5}-6}{15}$ 2. $\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}, \left(\frac{1-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}\right), \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}$

6. $\frac{1}{3}$

ಅಭ್ಯಾಸ -11.6 (ಗುಣಿತ, ಉಪಗುಣಿತ ಕೋನಗಳು)

1. (i) $\frac{161}{289}$ (ii) $\frac{-7}{25}$ (iii) $\frac{119}{169}$ 2. $\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$ 5. a

ಅಭ್ಯಾಸ -11.7 (ಪರಿವರ್ತನ ಸೂತ್ರಗಳು)

1. (i) $\sin 10\theta - \sin 2\theta$ (ii) $\cos\theta - \cos 4\theta$

(iii) $\frac{1}{2}(\cos 8\theta + \cos 6\theta)$ (iv) $\frac{1}{2}(\sin 8\theta + \sin 2\theta)$

2. (i) $2\sin 3x \cos 2x$ (ii) $-2\sin 3\theta \sin\theta$

(iii) $-\cos 20°$ (iv) $\cos 1°$

ಅಭ್ಯಾಸ -11.8 (ಎತ್ತರಗಳು ಮತ್ತು ದೂರಗಳು)

1. 50 ಮೀ. 2. $\frac{300}{\sqrt{3}}$ ಮೀ., $\frac{600}{\sqrt{3}}$ ಮೀ. 3. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ಕಿ.ಮೀ.

5. 136.6 ಮೀ. 6. $20+\sqrt{3}$ ಮೀ. 8. $30°$

ಅಭ್ಯಾಸ -12.1 (ತ್ರಿಕೋನದ ಭುಜ-ಕೋನಗಳ ಸಂಬಂಧಗಳು)

20. $\frac{2}{5}$

ಅಭ್ಯಾಸ - 12.2 (ತ್ರಿಕೋನಗಳ ಪರಿಮಾಣಗಳು)

1. $A = 30°, B = 120°, C = 30°$
2. $A = 45°, B = 120°, C = 15°$
3. $A = 75°, B = 45°, C = 60°$
4. $A = 15°, B = 105°, C = 15°$
5. $A = 15°, B = 90°, C = 75°$
6. $A = C = 30°, B = 120°$
7. $A = 45°, B = 30°, C = 105°$
8. $A = 60°, B = 105°, C = 15°$
9. $b = \sqrt{6}, A = 45°, C = 15°$
10. $c = \sqrt{6}, A = 45°, B = 75°$
11. $a = \sqrt{3} + 1, B = 60°, C = 15°$
12. $b = \sqrt{6} + \sqrt{2}, C = 75°, A = 30°$
13. $a = \sqrt{2}, B = 45°, C = 105°$
14. $A = 30°, b = 2\sqrt{3}, c = 2$
15. $a = 2\sqrt{2}, B = 30°, C = 15°$
16. $B = 75°, C = 90°, c = 2\sqrt{6}$

    $B = 105°, C = 60°, c = 3\sqrt{2}$
17. ತ್ರಿಕೋನವನ್ನು ರಚಿಸಲು ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲ.
18. $A = 15°, C = 90°, c = 2\sqrt{2}$

19. $A = C = 15°, \ c = 2$

20. $A = 90°, \ C = 60°, \ a = 4$

$A = 30°, \ C = 120°, \ a = 2$

21. $B = 135, \ C = 15\ °, \ c = \sqrt{3} - 1$

$B = 45°, \ C = 105°, \ c = \sqrt{3} + 1$

22. $B = 45°, \ C = 15°, \ c = \sqrt{3} - 1$

23. ತ್ರಿಕೋನವನ್ನು ರಚಿಸಲು ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲ.

24. $C = 15°, \ a = \sqrt{2}, \ b = 2$

25. $a = 10\frac{\sqrt{6}}{3}, \quad b = 5\frac{(\sqrt{6} + \sqrt{2})}{\sqrt{3}}, \quad C = 60°$

26. $A = 30°, \ b = 2\sqrt{3}, \ c = 2$

27. $a = 2, \ b = \sqrt{3} + 1, \ C = 75°$

28. $A = 30°, \ b = \sqrt{6} + \sqrt{2}, \ c = 2\sqrt{2}$

ಅನುಬಂಧ - 1

ಪ್ರಥಮ ಪಿ.ಯು.ಸಿ. ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರ

ಪಠ್ಯಕ್ರಮ

I ಬೀಜಗಣಿತ

1. ಘಾತಾಂಕಗಳು ಮತ್ತು ಪ್ರತಿಘಾತಗಳು **4 ಘಂಟೆಗಳು**

1.1 ಘಾತಾಂಕಗಳ ಸಿದ್ಧಾಂತದ ಪುನರ್ನಿರೂಪಣೆ - ಲೆಕ್ಕಗಳು.

1.2 ಪ್ರತಿಘಾತಗಳ ನಿಯಮಗಳು (ಸಾಧನೆ ಸಹಿತವಾಗಿ) - ಲೆಕ್ಕಗಳು.

2. ಶ್ರೇಢಿಗಳು **8 ಘಂಟೆಗಳು**

2.1 ನೈಜಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಪರಿಮಿತ ಮತ್ತು ಅಪರಿಮಿತ ಶ್ರೇಢಿಗಳು, ಪುನರ್ನಿರೂಪಣ - ಅಪರಿಮಿತ ಶ್ರೇಢಿಗಳ ವಿವರಣೆ - ಸಮಾಂತರ ಶ್ರೇಢಿಗಳು - ಗುಣೋತ್ತರ ಶ್ರೇಢಿಗಳು - ಸಂಗತ ಶ್ರೇಢಿಗಳು. ಸಮಾಂತರ, ಗುಣೋತ್ತರ ಮತ್ತು ಸಂಗತ ಶ್ರೇಢಿಗಳ 'n'ನೇ ಪದ ಮತ್ತು n ಪದಗಳ ಮೊತ್ತ (ನಿರೂಪಣೆಯೊಂದಿಗೆ) - ಲೆಕ್ಕಗಳು.

2.2 ಸಾಮಾನ್ಯ ಪ್ರಮಾಣ (r) $-1< r< 1$ ಇರುವಾಗ ಪದಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ ಅಪರಿಮಿತವಾಗಿರುವಂತಹ ಗುಣೋತ್ತರ ಶ್ರೇಢಿಯ ಮೊತ್ತ, ದಶಮಾಂಶ ಸಮಬೆಲೆಯ ಭಿನ್ನರಾಶಿಗಳು - ಲೆಕ್ಕಗಳು.

2.3 a ಮತ್ತು b ಎರಡು ಧನಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಸಮಾಂತರ, ಗುಣೋತ್ತರ ಮತ್ತು ಸಂಗತ ಮಧ್ಯಕಗಳು A, G, H ಆದಾಗ, $G^2 = AH$ ಮತ್ತು $A \geq G \geq H$. ಇವುಗಳ ನಿರೂಪಣೆ.

3. ಗಣಿತಾನುಮಾನ **4 ಘಂಟೆಗಳು**

ಗಣಿತಾನುಮಾನದ ತತ್ವ ಮತ್ತು $\sum n, \sum n^2, \sum n^3$ ಇವುಗಳನ್ನೊಳಗೊಂಡ ಲೆಕ್ಕಗಳು.

4. ಸಮೀಕರಣಗಳ ಸಿದ್ಧಾಂತ **8 ಘಂಟೆಗಳು**

4.1 ವರ್ಗಸಮೀಕರಣಗಳ ಮೂಲಗಳ ರಚನಾಸೂತ್ರದ ಪುನರ್ನಿರೂಪಣೆ.

4.2 ಸಮೀಕರಣ $x^2 + 1 = 0$, ಮಿಶ್ರ ಊಹ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಹಾಗೂ ಐಕ್ಯಧಾತುವಿ ವರ್ಗಮೂಲ, ಘನಮೂಲ, ನಾಲ್ಕನೆಯ ಮೂಲಗಳನ್ನು ಪರಿಚಯಿಸುವುದು

4.3 ವರ್ಗಸಮೀಕರಣ, ಘನಸಮೀಕರಣಗಳ ಮತ್ತು ದ್ವಿವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣಗ ಸಹಾಂಕಗಳ ಮತ್ತು ಮೂಲಗಳ ನಡುವಣ ಸಂಬಂಧಗಳು.

ದತ್ತ ನಿಯಮಗಳಿಗನುಸಾರವಾಗಿ ಮತ್ತು ಮೂಲಗಳು, ಸಮಾಂತ ಶ್ರೇಢಿಗಳು, ಗುಣೋತ್ತರ ಶ್ರೇಢಿಗಳು ಮತ್ತು ಸಂಗತ ಶ್ರೇಢಿಗಳಿಂದ

ಸೂಚಿಸಿರುವ ವರ್ಗಸಮೀಕರಣ, ಘನಸಮೀಕರಣ ಮತ್ತು ದ್ವಿವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣಗಳ ಪರಿಹಾರಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವುದು - ಲೆಕ್ಕಗಳು.

4.4 ವರ್ಗಸಮೀಕರಣ - ಘನಸಮೀಕರಣ - ದ್ವಿವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣಗಳ ಮೂಲಗಳ ಸಮಾಂಗ ಉತ್ಪನ್ನಗಳು - ಲೆಕ್ಕಗಳು.

4.5 ಸಾಧನೆಗಳು : (1)ಬಹುಘಾತಪದಿ ಸಮೀಕರಣದ ಅಪರಿಮೇಯ ಮೂಲಗಳು ಸಹವರ್ತಿ ಜೊತೆಯಾಗಿ ಸಂಭವಿಸುವುವು, (2)ಬಹುಘಾತಪದಿ ಸಮೀಕರಣದ ಮಿಶ್ರ ಊಹ್ಯ ಮೂಲಗಳು ಸಹವರ್ತಿ ಜೊತೆಯಾಗಿ ಸಂಭವಿಸುವುವು.

ಅಪರಿಮೇಯ ಮೂಲಗಳು ಮತ್ತು ಮಿಶ್ರ ಊಹ್ಯ ಮೂಲಗಳನ್ನು ಕೊಟ್ಟಿರುವಂತಹ ಸಮೀಕರಣಗಳ ಪರಿಹಾರಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವಂತಹ ಲೆಕ್ಕಗಳು.

4.6 ಘನ ಸಮೀಕರಣ, $ax^3 + 3Hx + G = 0$ ಇದರ ಪರಿಹಾರವನ್ನು ಕಾರ್ಡಾನ್ಸ್ ವಿಧಾನದಿಂದ ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವಂತಹ ಲೆಕ್ಕಗಳು.

5 ಕ್ರಮಯೋಜನೆಗಳು ಮತ್ತು ವಿಕಲ್ಪಗಳು 9 ಘಂಟೆಗಳು

5.1 ರೇಖೀಯ ಕ್ರಮಯೋಜನೆಗಳ ವಿವರಣೆ - ಮೂಲ ತತ್ವದಿಂದ ^nP_r ಸೂತ್ರದ ನಿಷ್ಪತ್ತಿ - ಕೆಲವು ವಸ್ತುಗಳ ಪುನರಾವರ್ತಿಸುವಾಗಿನ ಕ್ರಮಯೋಜನೆಗಳ ಸೂತ್ರ ಮತ್ತು ಲೆಕ್ಕಗಳು.

5.2 ವರ್ತುಳೀಯ ಕ್ರಮಯೋಜನೆಗಳು - ಸೂತ್ರ - ಲೆಕ್ಕಗಳು.

5.3 ವಿಕಲ್ಪದ ವಿವರಣೆ - ಮೂಲತತ್ವದಿಂದ ^nC_r ಸೂತ್ರದ ನಿಷ್ಪತ್ತಿ.

$^nC_r = {^nC_{n-r}}$ ಮತ್ತು $^nC_{r-1} + {^nC_r} = {^{n+1}C_r}$ ಗಳ ಸಾಧನೆಗಳು - ಲೆಕ್ಕಗಳು.

6. ದ್ವಿಪದ ಪ್ರಮೇಯ 6 ಘಂಟೆಗಳು

6.1 ಧನಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳ ಗಣಿತಾನುಮಾನದ ಮೂಲಕ ದ್ವಿಪದ ಪ್ರಮೇಯದ ನಿರೂಪಣೆ ಮತ್ತು ಸಾಧನೆ.

ಮಧ್ಯಸ್ಥಿತ ಪದಗಳು, x ನಿಂದ ಸ್ವತಂತ್ರವಾದ ಪದ, ನಿರ್ದಿಷ್ಟವಾದ x ನ ಘಾತವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವಂತಹ ಲೆಕ್ಕಗಳು.

6.2 ದ್ವಿಪದೀಯ ಸಹಾಂಕಗಳು - ಲೆಕ್ಕಗಳು

7. ಆಂಶಿಕ ಭಿನ್ನರಾಶಿಗಳು 4 ಘಂಟೆಗಳು

7.1 ಭಾಗಲಬ್ಧ ಭಿನ್ನರಾಶಿಗಳು - ಶುದ್ಧ ಮತ್ತು ಅಶುದ್ಧ ಭಿನ್ನರಾಶಿಗಳು - ಅಶುದ್ಧ ಭಿನ್ನರಾಶಿಯನ್ನು ಬಹುಘಾತಪದಿ ಮತ್ತು ಶುದ್ಧ ಭಿನ್ನರಾಶಿಗಳ ಸಂಕಲನಕ್ಕೆ ಇಳಿಸುವುದು - ಲೆಕ್ಕಗಳು.

7.2 ಒಂದು ಶುದ್ಧ ಭಿನ್ನರಾಶಿಯನ್ನು ಆಂಶಿಕ ಭಿನ್ನರಾಶಿಗಳನ್ನಾಗಿ ಪರಿವರ್ತಿಸಲು ನಿಯಮಗಳು.

8. ಸಂಖ್ಯಾ ಸಿದ್ಧಾಂತ ಮತ್ತು ಸಮಶೇಷೀಯತೆ 14 ಘಂಟೆಗಳು

8.1 ಭಾಜನೀಯತೆ - ವಿವರಣೆ ಮತ್ತು ಭಾಜನೀಯತೆಯ ಲಕ್ಷಣಗಳು. ಭಾಗಾಹಾರದ ಅಲ್ಗಾರಿತಮ್‌ನ ನಿರೂಪಣೆ.

8.2 ಎರಡು ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳ ಮ.ಸಾ.ಅ. - ಯುಕ್ಲಿಡ್‌ನ ಆಲ್ಗಾರಿತಮ್ಮನ್ನು ಬಳಸಿಕೊಂಡು ಎರಡು ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳ ಮ.ಸಾ.ಅ.ವನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯುವುದು. ಎರಡು ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳ ಮ.ಸಾ.ಅ.ವನ್ನು, x ಮತ್ತು y ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳೊಂದಿಗೆ $ax+by$ಎಂದು ಅಭಿವ್ಯಕ್ತಗೊಳಿಸುವುದು - ಲೆಕ್ಕಗಳು.

8.3 ಸಾಪೇಕ್ಷ ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು - ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು - ಸಂಯುಕ್ತ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು - ಸಂಯುಕ್ತ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಪ್ರಧಾನ ಘಾತ ಅಪವರ್ತನೀಕರಣ. ಸಂಖ್ಯೆಯೊಂದರ ಧನಭಾಜಕಗಳು ಮತ್ತು ಅವುಗಳ ಮೊತ್ತ ಸೂತ್ರಗಳ ನಿರೂಪಣೆ (ಸಾಧನರಹಿತವಾಗಿ) - ಲೆಕ್ಕಗಳು.

8.4 ಕೆಳಕಂಡ ಲಕ್ಷಣಗಳ ಸಾಧನೆಗಳು :

(i) ಪೂರ್ಣಾಂಕವೊಂದರ (ಒಂದಕ್ಕಿಂತ ಮೇಲ್ಪಟ್ಟ) ಕನಿಷ್ಠ ಭಾಜಕವು ಒಂದು ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆ ;

(ii) ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಅನಂತ ;

(iii) c ಮತ್ತು a ಸಾಪೇಕ್ಷ ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾಗಿದ್ದು, $c \mid ab$ ಆದಾಗ $c \mid b$;

(iv) pಯು ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆಯಾದರೆ ಮತ್ತು $p \mid a b$ ಆದಾಗ $p \mid a$ ಅಥವಾ $p \mid b$;

(v) x ಮತ್ತು y ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳಾಗಿದ್ದು, $ax+by=1$ ಆದಾಗ $(a,b)= 1$;

(vi) $(a,b) = 1, (a,c) = 1$ ಆದಾಗ $(a, bc) =1$;

(vii) p ಯು ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಿದ್ದು ಮತ್ತು a ಯಾವುದೇ ಪೂರ್ಣಾಂಕವಾದಾಗ $(p,a) = 1$ ಅಥವಾ $p \mid a$. ;

(viii) a ಎಂಬ ಸಂಯುಕ್ತ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಕನಿಷ್ಠ ಭಾಜಕವು $\sqrt{a}$ ಯನ್ನು ಮೀರದು.

8.5 ಸಮಶೇಷೀಯತೆ ಮಾಡ್ಯುಲೊ m - ವಿವರಣೆ ಮತ್ತು ಕೆಳಕಂಡ ಲಕ್ಷಣಗಳ ಸಾಧನೆಗಳು :

1. "$\equiv \text{mod } m$" ಸಮಾನತೆಯ ಸಂಬಂಧ;

2. $a \equiv b \pmod{m} \Rightarrow a \pm x \equiv b \pm x \pmod{m}$

   ಮತ್ತು $ax \equiv bx \pmod{m}$;

3. c ಮತ್ತು m ಸಾಪೇಕ್ಷ ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾಗಿದ್ದು, $ca \equiv cb \pmod{m}$ ಆದಾಗ $a \equiv b \pmod{m}$ - ನಿರಸನ ನಿಯಮ;
4. $a \equiv b \pmod{m}$ ಆಗಿದ್ದು n ಎಂಬುದು m ನ ಧನಭಾಜಕವಾದರೆ $a \equiv b \pmod{n}$;
5. $a \equiv b$ (modm) $\Rightarrow a$ ಮತ್ತು b ಎಂಬುವು mನಿಂದ ಭಾಗಿಸಲ್ಪಟ್ಟಾಗ ಒಂದೇ ಶೇಷವನ್ನು ಉಳಿಸುತ್ತವೆ.
6. $a \equiv b \pmod{m} \Rightarrow (a,m) \equiv (b,m)$.

8.6 $ax \equiv b \pmod{m}$ ರೇಖೀಯ ಸಮಶೇಷೀಯತೆಯ ಪರಿಹಾರ ಪಡೆಯಲು ನಿಯಮಗಳು (ನಿರೂಪಣೆ ಮಾತ್ರ).

$ax \equiv b \pmod{m}$ನ ಪರಿಹಾರ ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವುದು - ಲೆಕ್ಕಗಳು.

II. ನಿರ್ದೇಶಕ ರೇಖಾಗಣಿತ ಮತ್ತು ಕಲನಶಾಸ್ತ್ರ

9. ನಿರ್ದೇಶಕ ರೇಖಾಗಣಿತ 25 ಘಂಟೆಗಳು

9.1 ಸಮತಲದಲ್ಲಿನ ನಿರ್ದೇಶಕಗಳ ವ್ಯವಸ್ಥೆ (ಕಾರ್ಟೀಷಿಯನ್)

9.2 ದೂರದ ಸೂತ್ರ, ವಿಭಜನಾ ಸೂತ್ರ, ಮಧ್ಯಬಿಂದುವಿನ ಸೂತ್ರ, ತ್ರಿಕೋನದ ಗುರುತ್ವಕೇಂದ್ರ, ತ್ರಿಕೋನದ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲ - ಸಾಧನೆಗಳು, ಲೆಕ್ಕಗಳು.

9.3 ಒಂದು ಬಿಂದುವಿನ ಬಿಂದುಪಥ - ಲೆಕ್ಕಗಳು.

9.4 ಸರಳರೇಖೆಗಳು, ಸರಳರೇಖೆಯ ಓಟ, $m = \tan\theta, \theta$ ದ ಧನದಿಶೆಯಲ್ಲಿ ಸರಳರೇಖೆ ಮತ್ತು x- ಅಕ್ಷಗಳ ನಡುವಿನ ಕೋನ. ಯಾವುದೇ ಎರಡು ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸುವ ಸರಳರೇಖೆಯ ಓಟ, ಸರಳರೇಖೆಯ ಸಾಮಾನ್ಯ ಸಮೀಕರಣ ಮತ್ತು ಅದರ ಓಟ - ಲೆಕ್ಕಗಳು.

9.5 ಸರಳರೇಖೆಗಳು ಸಮಾಂತರವಾಗಿರಲು ಮತ್ತು ಲಂಬವಾಗಿರಲು ನಿಯಮಗಳು.

9.6 ಸರಳರೇಖೆಯ ವಿವಿಧ ರೂಪಗಳು ಓಟ-ಬಿಂದು ರೂಪ, ಓಟ- ಛೇದಕ ರೂಪ, ದ್ವಿಬಿಂದು ರೂಪ, ಛೇದಕ ರೂಪ, ಲಂಬರೂಪ - ಸಾಧನೆಗಳು, ಲೆಕ್ಕಗಳು.

9.7 ಎರಡು ಸರಳರೇಖೆಗಳ ನಡುವಿನ ಕೋನ, ಸರಳರೇಖೆಗಳ ಛೇದನ ಬಿಂದು, ಮೂರು ಸರಳರೇಖೆಗಳ ಏಕ ಬಿಂದುಸ್ಥದ ನಿಯಮ - ಮೂಲ ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ಮತ್ತು ಯಾವುದೇ ಬಿಂದುವೊಂದರಿಂದ ಸರಳರೇಖೆಯ ಮೇಲಿನ ಲಂಬದ ಉದ್ದ.

ಸರಳರೇಖೆಗಳ ನಡುವಿನ ಕೋನದ ಆಂತರಿಕ ಮತ್ತು ಬಾಹ್ಯ ದ್ವಿಭಾಜಕಗಳ ಸಮೀಕರಣಗಳು - ನಿಷ್ಪತ್ತಿಗಳು, ಲೆಕ್ಕಗಳು.

9.8 ಜೋಡಿ ಸರಳರೇಖೆಗಳು - ಸಮಾನಘಾತದ ವರ್ಗಸಮೀಕರಣ - ಸಾಮಾನ್ಯ ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣ. ಸಾಧನೆಗಳು :

(i) ಜೋಡಿ ಸರಳರೇಖೆಗಳ ನಿಯಮ;

(ii) ಜೋಡಿ ಸರಳರೇಖೆಗಳು ಸಮಾಂತರವಾಗಿರಲು ನಿಯಮ;

(iii) ಜೋಡಿ ಸರಳರೇಖೆಗಳು ಐಕ್ಯವಾಗಿರಲು ನಿಯಮ;

(iv) ಜೋಡಿ ಸರಳರೇಖೆಗಳ ನಡುವಿನ ಕೋನ ಮತ್ತು ಛೇದನ ಬಿಂದು - ಲೆಕ್ಕಗಳು.

10. ಕಲನಶಾಸ್ತ್ರ **8 ಘಂಟೆಗಳು**

10.1 ವಾಸ್ತವ ಚರಸಂಖ್ಯೆಯ ಉತ್ಪನ್ನಗಳು - ವಿವಿಧ ಉತ್ಪನ್ನಗಳು - ಆವರ್ತನೀಯ ಉತ್ಪನ್ನಗಳು - ಉತ್ಪನ್ನಗಳ ಬೆಲೆಗಳು - ಲೆಕ್ಕಗಳು.

10.2 ಉತ್ಪನ್ನದ ಮಿತಿ - ವ್ಯಾಖ್ಯೆ, ಮಿತಿಗಳ ಬೀಜಗಣಿತದ ನಿರೂಪಣೆ.

10.3 ಕೆಲವು ಮುಖ್ಯವಾದ ಮಿತಿಗಳು (ಸಾಧನೆ ಸಹಿತವಾಗಿ) :

(1) $\lim_{x \to a} \frac{x^n - a^n}{x - a} = na^{n-1}$, n : ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆ

(2) $\lim_{\theta \to 0} \frac{\sin \theta}{\theta} = 1$ (θ ರೇಡಿಯನ್ಸ್‌ನಲ್ಲಿದೆ)

(3) $\lim_{\theta \to 0} \frac{\tan \theta}{\theta} = 1$ (θ ರೇಡಿಯನ್ಸ್‌ನಲ್ಲಿದೆ)

(4) ಮಿತಿಗಳ ನಿರೂಪಣೆ :

(i) $\lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$

(ii) $\lim_{x \to 0} (1 + x)^{1/x} = e$

(iii) $\lim_{x \to 0} \frac{\log_e(1 + x)}{x} = 1$

(iv) $\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

(e) $\lim_{x \to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \log_e a$

ಈ ಉತ್ಪನ್ನಗಳ ಮಿತಿಗಳನ್ನೊಳಗೊಂಡ ಲೆಕ್ಕಗಳು.

10.4 $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ $\left(\frac{0}{0}\right.$ ರೂಪ $\left.\right)$, $\lim_{n \to \infty} \frac{f(n)}{g(n)}$ $\left(\frac{\infty}{\infty}\right.$ ರೂಪ $\left.\right)$

[$f(x)$ನ ಪ್ರಮಾಣವು $\leq g(x)$ ನ ಪ್ರಮಾಣ]

ಈ ಮಿತಿಗಳ ಮೌಲ್ಯ ನಿರ್ಣಯಿಸುವುದು - ಲೆಕ್ಕಗಳು.

III ತ್ರಿಕೋನಮಿತಿ

11 ಕೋನಮಾನ ಮತ್ತು ತ್ರಿಕೋನಮಿತೀಯ ಉತ್ಪನ್ನಗಳು : 25 ಘಂಟೆಗಳು

11.1 ರೇಡಿಯನ್ ಮಾನ - ವಿವರಣೆ

ಸಾಧನೆಗಳು : (i) π ರೇಡಿಯನ್ $= 180°$;

(ii) 1 ರೇಡಿಯನ್ ಸ್ಥಿರವಾಗಿರುತ್ತದೆ;

(iii) $s = r\,\theta$, (θ ರೇಡಿಯನ್ಸ್‌ನಲ್ಲಿದೆ) ;

(iv) ಒಂದು ವೃತ್ತ ಖಂಡದ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲವು $A = \frac{1}{2}r^2\theta$

(θ ರೇಡಿಯನ್ಸ್‌ನಲ್ಲಿದೆ) - ಲೆಕ್ಕಗಳು.

11.2 ತ್ರಿಕೋನಮಿತೀಯ ಉತ್ಪನ್ನಗಳು - ವಾಖ್ಯೆ - ಲಘುಕೋನದ ತ್ರಿಕೋನಮಿತೀಯ ಪ್ರಮಾಣಗಳು, ತ್ರಿಕೋನಮಿತೀಯ ನಿತ್ಯಸಮೀಕರಣಗಳು (ಸಾಧನೆ ಸಹಿತವಾಗಿ) - ಲೆಕ್ಕಗಳು.

11.3 ಕೆಲವು ಮುಖ್ಯವಾದ ಕೋನಗಳ ತ್ರಿಕೋನಮಿತೀಯ ಉತ್ಪನ್ನಗಳು - ಲೆಕ್ಕಗಳು.

11.4 ಸಂಬಂಧಿತ ಕೋನಗಳ, ಸಂಯುಕ್ತ ಕೋನಗಳ, ಗುಣಿತ ಕೋನಗಳ, ಉಪಗುಣಿತ ಕೋನಗಳ ತ್ರಿಕೋನಮಿತೀಯ ಉತ್ಪನ್ನಗಳು ಮತ್ತು ರೂಪಾಂತರ ಸೂತ್ರಗಳು (ಸಾಧನೆ ಸಹಿತವಾಗಿ) - ಲೆಕ್ಕಗಳು.

11.5 ಎತ್ತರ ಮತ್ತು ದೂರ - ಉನ್ನತ ಕೋನ - ಅವನತ ಕೋನ - ಲೆಕ್ಕಗಳು.

11.6 ತ್ರಿಕೋನಮಿತೀಯ ಉತ್ಪನ್ನಗಳ ನಕ್ಷೆಗಳು.

12. ತ್ರಿಕೋನದ ಭುಜಗಳ ಮತ್ತು ಕೋನಗಳ ನಡುವಿನ ಸಂಬಂಧಗಳು 10 ಘಂಟೆಗಳು.

12.1 ಸೈನ್ ನಿಯಮ, ಕೊಸೈನ್ ನಿಯಮ, ಟ್ಯಾನ್‌ಜೆಂಟ್ ನಿಯಮ ಅರ್ಧಕೋನ ಸೂತ್ರಗಳು - ತ್ರಿಕೋನದ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲ - ಪ್ರಕ್ಷೇಪಣ ನಿಯಮ (ಸಾಧನೆ ಸಹಿತ).

12.2 ತ್ರಿಕೋನಗಳ ಪರಿಮಾಣಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವುದು

(i) ಮೂರು ಭುಜಗಳು ದತ್ತವಾದಾಗ;

(ii) ಎರಡು ಭುಜಗಳು ಮತ್ತು ಅವು ಒಳಗೊಂಡಿರುವ ಕೋನವು ದತ್ತವಾದಾಗ;

(iii) ಒಂದು ಭುಜವೂ ಮತ್ತು ಎರಡು ಕೋನಗಳೂ ದತ್ತವಾದಾಗ;

(iv) ಎರಡು ಭುಜಗಳೂ ಮತ್ತು ಅವುಗಳಲ್ಲೊಂದಕ್ಕೆ ಎದುರಿಗಿರುವ ಕೋನವೂ ದತ್ತವಾದಾಗ

ಲೆಕ್ಕಗಳು.

ಅನುಬಂಧ - 2

ಪ್ರಥಮ ಪಿ.ಯು.ಸಿ.ಯ (ಗಣಿತ) ಚಟುವಟಿಕೆಗಳು

ಪ್ರಥಮ ಪಿ.ಯು.ಸಿ.ಯಲ್ಲಿ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಯ ಮಟ್ಟ *A,B,C,D*ಎಂದು ನಿರ್ಧರಿಸಲು ಪ್ರತಿಯೊಬ್ಬ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಯು ಕೆಳಗೆ ಸೂಚಿಸಿರುವ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ 10 ಯೋಜನೆಗಳನ್ನು ಮಂಡಿಸಬೇಕು.

ಅಷ್ಟೇ ಅಲ್ಲದೆ, ಪ್ರಧಾನ ಪ್ರಶ್ನಪತ್ರಿಕೆಯಲ್ಲಿ ಈ ಕೆಳಗಿನ 1 ರಿಂದ 7 ರ ವರೆಗಿನ್ನ ವಿಷಯಗಳಲ್ಲಿ, 2- ಒಂದು ಅಂಕದ ಪ್ರಶ್ನೆಗಳು, 2- ಎರಡು ಅಂಕಗಳ ಪ್ರಶ್ನೆಗಳು, ಮತ್ತು 1- ನಾಲ್ಕು ಅಂಕಗಳ ಪ್ರಶ್ನೆಗಳನ್ನೊಳಗೊಂಡಿರಬೇಕು.

ವಿಷಯಗಳು

1. ಗಣಿತಾನುಮಾನ
2. ದ್ವಿಪದ - ಸಹಾಂಕಗಳು
3. ಒಂದು ಬಿಂದುವಿನ ಬಿಂದುಪಥ
4. ಜೋಡಿ ಸರಳರೇಖೆಗಳು
5. ಮಿತಿಗಳು
6. ಎತ್ತರ ಮತ್ತು ದೂರ
7. ತ್ರಿಕೋನದ ಭುಜಗಳ ಮತ್ತು ಕೋನಗಳ ನಡುವಿನ ಸಂಬಂಧಗಳು
8. ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರದಲ್ಲಿ ಆಸಕ್ತಿ ಬೆಳೆಸುವಂತಹ ವಿಷಯಗಳು :
   (i) ಭಾಸ್ಕರನ ದ್ವಿವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣ $x^4 - 2x^2 - 400x - 9999 = 0$
   (ii) ಆರ್ಯಭಟನ ಮೊದಲ ಘಾತದ ಡಯೋಫಾಂಟಸ್ ಸಮೀಕರಣ, ಭಾಸ್ಕರನ ತಿದ್ದುಪಡಿ, ಭಾಸ್ಕರನ ಲೆಕ್ಕಗಳು - ಮುಂತಾದವುಗಳು.
9. ಭಾರತೀಯ ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರಜ್ಞರು ಮತ್ತು ಅವರ ಗ್ರಂಥಗಳು - ಪ್ರಬಂಧಗಳು, ಲೆಕ್ಕಗಳ ಪರಿಹಾರಗಳು - ಮುಂತಾದವುಗಳು.
10. ಆಕೃತಿಗಳು - ನಕ್ಷೆಗಳು - ರೇಖಾನಕ್ಷೆಗಳು - ಚಿತ್ರದ ತಯಾರಿಕೆಗಳು.
11. ಭಾರತೀಯ ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರಜ್ಞರ ಬಗೆಗಿನ ಆಸಕ್ತಿದಾಯಕ ಘಟನೆಗಳು.
12. ಅಧ್ಯಾಪಕರ ಅನುಮತಿಯಿಂದ ಬೇರೆ ಯಾವುದೇ ಯೋಜನೆ.

ಪ್ರಶ್ನೆ ಪತ್ರಿಕೆಯ ಮಾದರಿ (ಅಂಕಗಳ ಹಂಚಿಕೆ) – ಪ್ರಥಮ ಪಿ.ಯು.ಸಿ. ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರ
ನೀಲಿಪ್ರತಿ

		ಕಲಿಸಲು ಬೇಕಾದ ಸಮಯ (ಘಂಟೆಗಳು)	K			U			A			S			ಅಂಶಗಳ ಮೊತ್ತ
			VSA	SA	ET	VSA	SA	ET	VSA	SA	ET	VSA	SA	ET	
I ಬೀಜಗಣಿತ															
1.	ಘಾತಾಂಕಗಳು ಮತ್ತು ಪ್ರತಿಘಾತಗಳ ಸಿದ್ಧಾಂತಗಳು	4						1							4
2.	ಶ್ರೇಢಿಗಳು	8	1	1				1							7
3.	ಗಣಿತಾನುಮಾನ	4									1				4
4.	ಸಮೀಕರಣಗಳ ಸಿದ್ಧಾಂತ	8	1					1							5
5.	ಕ್ರಮಯೋಜನೆಗಳು ಮತ್ತು ವಿಕಲ್ಪಗಳು	9	1							1				1	7
6.	ದ್ವಿಪದ ಪ್ರಮೇಯ	6						1							4
7.	ಆಂಶಿಕ ಭಿನ್ನರಾಶಿಗಳು	4						1							4

(ಮುಂದುವರಿಸಲಾಗಿದೆ)

8.	ಸಂಖ್ಯಾ ಸಿದ್ಧಾಂತ ಮತ್ತು ಸಮಶೇಷೀಯತೆ	14	1					1		1			1		9
II ನಿರ್ದೇಶಕ ರೇಖಾಗಣಿತ ಮತ್ತು ಕಲನಶಾಸ್ತ್ರ															
9.	ನಿರ್ದೇಶಕ ರೇಖಾಗಣಿತ	25		1	1	1	1	1	1		1			1	22
10.	ಕಲನಶಾಸ್ತ್ರ	8	1		1		1	1							11
III ತ್ರಿಕೋನಮಿತಿ															
11.	ಕೋನಮಾನ ಮತ್ತು ತ್ರಿಕೋನಮಿತಿ ಉತ್ಪನ್ನಗಳು	25		1	1	1	1	1			1			1	21
12.	ತ್ರಿಕೋನದ ಭುಜಗಳ ಮತ್ತು ಕೋನಗಳ ನಡುವಿನ ಸಂಬಂಧಗಳು	10						1	1	1		1			8
13.	ಚಟುವಟಿಕೆಯ ವಿಷಯಗಳು								1	1	1	1	1		10
		125 ಘಂಟೆಗಳು	5	6	12	2	6	40	3	8	16	2	4	12	116
			23 ಅಂಕಗಳು			48 ಅಂಕಗಳು			27 ಅಂಕಗಳು			18 ಅಂಕಗಳು			116

ಅನುಬಂಧ - 3

ಗಣಿತ ಶಾಸ್ತ್ರ

ಮಾದರಿ ಪ್ರಶ್ನಪತ್ರಿಕೆ - 1ನೇ ಪಿ.ಯು.ಸಿ

ಕಾಲಾವಧಿ : 3 ಘಂಟೆಗಳು. ಗರಿಷ್ಠ ಅಂಕಗಳು : 100

ಎಲ್ಲಾ ಪ್ರಶ್ನೆಗಳನ್ನೂ ಉತ್ತರಿಸಿ.

I. ಎಲ್ಲ ಪ್ರಶ್ನೆಗಳನ್ನೂ ಉತ್ತರಿಸಿ: (ಪ್ರತಿಯೊಂದಕ್ಕೂ 1 ಅಂಕ)

1. $4 - \frac{8}{3} + \frac{16}{9} - \frac{32}{27} + \ldots.$ ಅಪರಿಮಿತ ಗುಣೋತ್ತರ ಶ್ರೇಢಿಯ ಮೊತ್ತವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

2. $2 + \sqrt{3}$ ಎಂಬುದು $x^3 - 3x^2 - 3x + 1 = 0$ ಸಮೀಕರಣದ ಒಂದು ಮೂಲವಾಗಿದ್ದರೆ, ಅದರ ನೈಜ ಮೂಲವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

3. 6ಜನರನ್ನು ಒಂದು ಮೇಜಿನ ಸುತ್ತಲೂ ಎಷ್ಟು ವಿಧಗಳಲ್ಲಿ ಕೂರಿಸಬಹುದು.

4. $3x \equiv 6(\text{mod}9)$ ಸಮಶೇಷತೆಯ ಅಸಮಶೇಷೀಯ ಪರಿಹಾರಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

5. $(1, -7)$ ಮತ್ತು $(2, 3)$ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸುವ ಸರಳರೇಖೆಯ ಓಟವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

6. $2x^2 + kxy - 3y^2 = 0$ ಜೋಡಿ ಸರಳರೇಖೆಗಳ ಓಟಗಳ ಮೊತ್ತ 3 ಆಗಿದ್ದರೆ kಯ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

7. $\underset{x \to \frac{\pi}{2}}{Lt} \frac{\sin x}{x}$ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

8. θ ಲಘುಕೋನವಾಗಿದ್ದು $\sec\theta = \frac{5}{3}$ ಆಗಿದ್ದರೆ $\cot\theta$ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

9. ABC ಎಂಬ ಯಾವುದೇ ತ್ರಿಕೋನದಲ್ಲಿ $\sum 2bc\cos A = \sum a^2$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

10. 5,7,4ಬಾಹುಗಳಾಗಿರುವಂತಹ ತ್ರಿಕೋನದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

11. $(3,0)$ ಬಿಂದುವಿನಿಂದ 4 ಮಾನಗಳಷ್ಟು ದೂರದಲ್ಲಿ ಚಲಿಸುವ ಬಿಂದುವಿನ ಬಿಂದುಪಥದ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

12. ಎಂದಿನ ಚಿಹ್ನೆಯಂತೆ $C_0 + C_1 + C_2 + \ldots\ldots + C_n = 2^n$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

II ಎಲ್ಲ ಪ್ರಶ್ನೆಗಳನ್ನೂ ಉತ್ತರಿಸಿ (ಪ್ರತಿಯೊಂದಕ್ಕೂ 2 ಅಂಕಗಳು)

1. ಒಂದು ಸಮಾಂತರ ಶ್ರೇಢಿಯ mನೇ ಪದವು n ಆಗಿಯೂ ಮತ್ತು n ನೇ ಪದವು mಆಗಿಯೂ ಇದ್ದರೆ $(m+n)$ನೇ ಪದವು ಶೂನ್ಯವೆಂದು ತೋರಿಸಿ.
2. ಒಂದು ಸಮತಲದಲ್ಲಿರುವ 20 ಬಿಂದುಗಳ ಪೈಕಿ 5 ಬಿಂದುಗಳು ಏಕರೇಖಸ್ಥವಾಗಿವೆ. ಒಟ್ಟು ಎಷ್ಟು ಸರಳರೇಖೆಗಳನ್ನು ಎಳೆಯಬಹುದು?
3. 2^{301} ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು 5 ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದಾಗ ಉಳಿಯುವ ಕನಿಷ್ಠ ಧನಾತ್ಮಕ ಶೇಷವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
4. ಯುಕ್ಲಿಡ್‌ನ ಅಲ್ಗಾರಿತ್ಮ್ ಬಳಸಿ 32 ಮತ್ತು 56ರ ಮ.ಸಾ.ಅ. ವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ ಮತ್ತು ಅದನ್ನು $32x + 56y$ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಅಭಿವ್ಯಕ್ತಿಸಿ.
5. ಸರಳರೇಖೆಯ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಎಂದಿನ ಚಿಹ್ನೆಗಳಂತೆ, $y=mx+c$ರೂಪದಲ್ಲಿ ಸಾಧಿಸಿ.
6. (1, 4), (3, –2), (–3, 16) ಬಿಂದುಗಳು ಏಕರೇಖಸ್ಥ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.
7. $\underset{x \to 2}{Lt} \dfrac{x^2-4}{\sqrt{x+2} - \sqrt{3x-2}}$ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
8. ಎಂದಿನ ಚಿಹ್ನೆಗಳಲ್ಲಿ $s = r\theta$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.
9. $\dfrac{\sin 135° + \cos 480°}{\sin 135° - \cos 120°} = 3 - 2\sqrt{2}$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.
10. ABC ತ್ರಿಕೋನದಲ್ಲಿ $\dfrac{a}{b} = 2 + \sqrt{3}$ ಮತ್ತು $C = 60°$ ಆಗಿದ್ದರೆ, $(A-B)$ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
11. ಗಣಿತಾನುಮಾನದ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ $1 + 2 + 3 + ... + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.
12. $2x^2 - xy - y^2 + 5x + y + 2 = 0$ ಜೋಡಿ ಸರಳರೇಖೆಗಳ ಛೇದನ ಬಿಂದುವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

III 1. $x = \log_a bc$, $y = \log_b ca$ ಮತ್ತು $z = \log_c ab$ ಆದರೆ $xyz = x + y + z + 2$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ. 4

2. A, G, H ಗಳು a ಮತ್ತು b ಗಳೆಂಬ ಎರಡು ಧನಾತ್ಮಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಸಮಾಂತರ, ಗುಣೋತ್ತರ ಮತ್ತು ಸಂಗತ ಮಧ್ಯಕಗಳಾಗಿದ್ದರೆ $G^2 = AH$ ಮತ್ತು $A \geq G \geq H$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ. 4

ಅಥವಾ

ಗಣಿತಾನುಮಾನದ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ $1.3 + 2.4 + 3.5 + ...$ n ಪದಗಳ ತನಕ $= n(n+1)\dfrac{(2n+7)}{6}$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ. 4

3. ಕಾರ್ಡನ್‌ನ ವಿಧಾನದಿಂದ ಪರಿಹಾರವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ :
$x^3 - 27x + 54 = 0$ 4

IV 1. 200 ಮತ್ತು 600ರ ಮಧ್ಯೆ 1,2,3,4,5,6 ಅಂಕಿಗಳನ್ನು ಬಳಸಿ, ಯಾವುದನ್ನೂ ಪುನರಾವರ್ತಿಸದೆ, ಎಷ್ಟು ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ರಚಿಸಬಹುದು? ಅವುಗಳಲ್ಲಿ ಎಷ್ಟು ಸರಿ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾಗಿರುತ್ತವೆ? 4

2. $\left(2x^2 - \frac{1}{x}\right)^{11}$ ಎಂಬುದರ ವಿಸ್ತರಣೆಯಲ್ಲಿ ಮಧ್ಯ ಪದಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

3. ಆಂಶಿಕ ಭಿನ್ನರಾಶಿಗಳಾಗಿ ವಿಭಜಿಸಿ : $\frac{3x+5}{(x+2)^2(x-3)}$ 4

ಅಥವಾ

"ಸಮಶೇಷೀಯತೆ ಮಾಡ್ಯುಲೊ m" ಎಂಬುದು ಒಂದು ಸಮಾನತೆಯ ಸಂಬಂಧ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ. 4

V 1. (x_1, y_1) ಮತ್ತು (x_2, y_2) ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಜೋಡಿಸುವ ರೇಖಾಖಂಡವನ್ನು $m : n$ ಪ್ರಮಾಣದಲ್ಲಿ ಅಂತರೀಯವಾಗಿ ವಿಭಜಿಸುವ ಬಿಂದುವಿನ ನಿರ್ದೇಶಕಗಳ ಸೂತ್ರವನ್ನು ನಿರೂಪಿಸಿ.

2. $3x - 4y - 5 = 0$ ಮತ್ತು $5x + 12y + 13 = 0$ ಸರಳರೇಖೆಗಳ ನಡುವಣ ಲಘುಕೋನ ದ್ವಿಭಾಜಕದ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. 4

3. $4x + 3y - 10 = 0$ ಮತ್ತು $3x + 5y - 13 = 0$ ಸರಳರೇಖೆಗಳ ಛೇದನ ಬಿಂದುವಿನ ಮೂಲಕ ಹಾದು $x - 5y + 7 = 0$ ಸರಳರೇಖೆಗೆ ಲಂಬವಾಗಿರುವ ಸರಳರೇಖೆಯ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. 4

ಅಥವಾ

$x^2 + 6xy + 9y^2 + 4x + 12y - 5 = 0$ ಸಮೀಕರಣವು ಒಂದು ಸಮಾಂತರ ಸರಳರೇಖೆಗಳ ಜೋಡಿಯನ್ನು ಪ್ರತಿನಿಧಿಸುತ್ತದೆ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ ಮತ್ತು ಅವುಗಳ ನಡುವಣ ದೂರವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. 4

4. θ ರೇಡಿಯನ್ ಮಾನದಲ್ಲಿದ್ದರೆ $\underset{\theta \to 0}{Lt} \frac{\sin\theta}{\theta} = 1$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ. 4

5. $\underset{x - 0}{Lt} \frac{\sqrt{2 - \cos x} - 1}{x^2}$ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. 4

VI 1. $a \sec\theta + d \tan\theta = c$ ಮತ್ತು $b \sec\theta - c \tan\theta = d$ ಆದರೆ $a^2 + b^2 = c^2 + d^2$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ. 4

2. ರೇಖಾಗಣಿತ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಸಾಧಿಸಿ :
$\sin(A + B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B$ 4

3. $A + B + C = 180^\circ$ ಆಗಿದ್ದರೆ
$\cos 2A + \cos 2B + \cos 2C = -1 - 4\cos A \cos B \cos C$
ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ. 4

ಅಥವಾ

$A + B = 45^\circ$ ಆಗಿದ್ದರೆ
$(1 + \tan A)(1 + \tan B) = 2$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ ಮತ್ತು ಅದರಿಂದ $\tan 22\frac{1}{2}^\circ$ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. 4

4. $a = 54, b = 2\sqrt{243}, B = 30^\circ$ ಆಗಿದ್ದರೆ, ABC ತ್ರಿಕೋನವನ್ನು ಬಿಡಿಸಿ.

VII 1. ಒಂದು ಗೋಪುರದ ತುದಿ ಮತ್ತು ಬುಡಗಳಿಂದ ಒಂದು ಬೆಟ್ಟದ ಶಿಖರದ ಉನ್ನತ ಕೋನಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ 30° ಮತ್ತು 60° ಆಗಿವೆ. ಗೋಪುರದ ಎತ್ತರ h ಆಗಿದ್ದರೆ ಬೆಟ್ಟದ ಎತ್ತರ $3h/2$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ. 4

ಪ್ರಶ್ನಪತ್ರಿಕಾ ರಚನಾಕಾರರಿಗೆ ಸೂಚನೆ

ಪ್ರಶ್ನಪತ್ರಿಕೆಯ I (11) ಮತ್ತು (12), II (11) ಮತ್ತು (12) ಹಾಗೂ VII ಪ್ರಶ್ನೆಗಳನ್ನು "(ಗಣಿತ) ಚಟುವಟಿಕೆ"ಗಳ ಪಟ್ಟಿಯ 1ರಿಂದ 7ರ ವರೆಗಿನ ವಿಷಯಗಳಿಂದ ಆರಿಸಬೇಕು.

ಬದಲಿ ಆಯ್ಕೆಗಾಗಿ ಪ್ರಶ್ನೆಗಳನ್ನು ಆರಿಸುವ ವಿಧಾನ

I ಬೀಜಗಣಿತ

(i) ಶ್ರೇಢಿಗಳು ಮತ್ತು ಗಣಿತಾನುಮಾನ ಇವುಗಳೆರಡರ ನಡುವೆ ಆಯ್ಕೆ

(ii) ಆಂಶಿಕ ಭಿನ್ನರಾಶಿಗಳು ಮತ್ತು ಸಂಖ್ಯಾಸಿದ್ಧಾಂತಗಳ ನಡುವೆ ಆಯ್ಕೆ

II ನಿರ್ದೇಶಕ ರೇಖಾಗಣಿತ

ಸರಳರೇಖೆಯ ಸಮೀಕರಣ ಮತ್ತು ಜೋಡಿ ಸರಳರೇಖೆಗಳ ನಡುವೆ ಆಯ್ಕೆ

III ತ್ರಿಕೋನಮಿತಿ

ಸಂಯುಕ್ತ ಕೋನಗಳು ಮತ್ತು ಗುಣಿತ ಕೋನಗಳು ಹಾಗೂ ಪರಿವರ್ತನ ಸೂತ್ರಗಳ ನಡುವೆ ಆಯ್ಕೆ

ಅನುಬಂಧ - 4

ಕನ್ನಡ-ಇಂಗ್ಲಿಷ್ ಪಾರಿಭಾಷಿಕ ಶಬ್ದಗಳ ಪಟ್ಟಿ

ಕನ್ನಡ	English
ಅಂಕಿ	Digit
ಆಂಶಿಕ ಭಿನ್ನರಾಶಿ	Partial fraction
ಅಕ್ಷ	Axis
ಅಧಿಕಕೋನ	Obtuse angle
ಅನಂತ	Infinity
ಅನುರೂಪಕ	Complementary
ಅನುರೂಪ	Corresponding
ಅಪರಿಮಿತ ಪದಗಳು	Infinite terms
ಅಪರಿಮಿತ ಶ್ರೇಢಿ	Infinite series
ಅಪವರ್ತನ	Factor
ಅಪವರ್ತನೀಕರಣ	Factorization
ಅಪವರ್ತ್ಯ	Multiple
ಅಪಸರಣ	Divergent
ಅಪ್ರದಕ್ಷಿಣೆ	Anticlockwise
ಅಭಿಸರಣ	Covergent
ಅವನತಕೋನ	Angle of depression
ಅವ್ಯಾಖ್ಯಾತ	Undefined
ಅಶುದ್ಧ ಭಿನ್ನರಾಶಿ	Improper fraction
ಅಷ್ಟ ಭುಜಾಕೃತಿ	Octagon
ಆಂಶಿಕ ಕ್ರಮ	Partial order
ಆದರೆ ಮತ್ತು ಆಗಬೇಕಿದ್ದರೆ	If and only if
ಆತ್ಮಾವರ್ತಕ	Reflexive
ಉಕ್ತಿ	Expression
ಉತ್ಪನ್ನ	Function
ಉನ್ನತ ಕೋನ	Angle of elevation
ಉನ್ನತಿ	Altitude
ಊಹ್ಯ (ಊಹ್ಯಾತ್ಮಕ)	Imaginary
ಊಹ್ಯಮಾನ	Imaginary Unit
ಋಣ	Negative
ಎರಡನೆಯ ಘಾತ	Second degree
ಏಕ ಬಿಂದುಸ್ಥ	Concurrent
ಏಕರೇಖಸ್ಥ	Collinear
ಐಕ್ಯಧಾತು	Unity
ಓಟ	Slope
ಕಂಸ	Arc
ಕರ್ಣ	Diagonal
ಕಲನಶಾಸ್ತ್ರ	Calculu
ಕೋಟಿ	Abscissa
ಕೋನ	Angle
ಕ್ರಮಯೋಜನೆ	Permutation
ಖಂಡ	Segment
ಗಣಿತಾನುಮಾನ	Mathematical induction
ಗುಣಕ	Co-efficient, multiplier
ಗುಣಲಬ್ಧ	Product
ಗುಣೋತ್ತರ ಮಧ್ಯಕ	Geometric mean
ಗುಣೋತ್ತರ ಶ್ರೇಢಿ	Geometric progression
ಗುರುತ್ವ ಕೇಂದ್ರ	Centroid
ಘನಮೂಲ	Cube root
ಘಾತಾಂಕಗಳು	Indices
ಚತುರ್ಭುಜ	Quadrilateral
ಚತುರ್ಮೂಲ	Fourth root
ಚರಾಕ್ಷರ	Variable
ಛೇದಕಗಳು	Intercepts
ಡೋಲಾಯಮಾನ	Oscillatory
ತಾಳೆ ನೋಡು	Verify
ತ್ರಿಕೋನ, ತ್ರಿಭುಜ	Triangle
ತ್ರಿಕೋನಮಿತಿ	Trigonometry
ತ್ರಿಜ್ಯ	Radius
ತ್ರಿಜ್ಯಾಖಂಡ	Sector
ದ್ವಿಪದ	Binomial
ದ್ವಿಭಾಜಕ	Bisector
ಧನ	Positive
ನಿತ್ಯ ಸಮೀಕರಣ	Identity
ನಿರ್ದೇಶಕ ರೇಖಾಗಣಿತ	Coordinate geometry
ನಿರ್ಬಂಧಿತ ಕ್ರಮಯೋಜನೆ	Restricted permutation
ನೈಜ ಸಂಖ್ಯೆ	Real number
ಪರಿಕೇಂದ್ರ	Circum-centre
ಪರಿತ್ರಿಜ್ಯ	Circum-radius
ಪರಿಧಿ	Circumference
ಪರಿಮಿತ ಶ್ರೇಢಿ	Finite series
ಪರಿವೃತ್ತ	Circum-circle
ಪಾದ	Quadrant
ಪುನರಾವೃತ್ತಿ ಹೊಂದುವ	Recurring
ಪ್ರಕ್ಷೇಪಣ	Projection

ಪ್ರಚಯ	Common differnce
ಪ್ರತಿಘಾತ	Logarithm
ಪ್ರತಿಫಲನ	Reflexion
ಪ್ರತಿಸಮಮಿತ	Antisymmetric
ಪ್ರಥಮಪದ	First term
ಪ್ರದಕ್ಷಿಣೆ	Clockwise
ಪ್ರಮೇಯ	Theorem
ಪ್ರವಹನೀಯ	Transitive
ಬಹುಘಾತಪದಿ	Polynomial
ಬಾಗು	Inclination
ಬಾಹು	Side
ಬಿಂದುಪಥ	Locus
ಬೆಸಸಂಖ್ಯೆ	Odd number
ಭುಜ	Ordinate
ಮಧ್ಯರೇಖೆ	Median
ಮಿತಿ	Limit
ಮಿಶ್ರ ಊಹ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆ	Complex number
ಮೂಲ	Root
ಮೂಲ ನಿಯಮ	Fundamental law
ಮೂಲಮಾನ	Unit
ಮೂಲಸೂತ್ರ	Fundamental principle
ಮೊತ್ತ	Sum
ರೇಖಾಂತರ	Intercept
ರೇಖೀಯ	Linear
ಲಂಬಕೇಂದ್ರ	Orthocentre
ಲಂಬಕೋನ	Right angle
ಲಂಬನಿರ್ದೇಶಕಗಳು	Rectangular coordinates
ಲಘುಕೋನ	Acute angle
ವರ್ಗಮೂಲ	Square root
ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣ	Quadratic equation
ವಜ್ರಾಕೃತಿ	Rhombus
ವರ್ತುಲೀಯ ಕ್ರಮಯೋಜನೆ	Circular permutation
ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆ	Real numbers
ವಿಕಲ್ಪ	Combination
ವಿಭಜಿತ ಭಿನ್ನರಾಶಿ	Partial fraction
ವಿಭಾಜ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆ	Composite number
ವಿಲೋಮ	Inverse, reciprocal
ವಿಸ್ತೀರ್ಣ	Area
ವ್ಯಂಜನ	Consonant
ಶತಮಾಂಶ ಪದ್ಧತಿ	Centesimal system
ಶುದ್ಧ ಭಿನ್ನರಾಶಿ	Proper fraction
ಶುದ್ಧ ವರ್ಗ	Perfect square
ಶೃಂಗಗಳು	Vertices
ಶೇಷ ಪ್ರಮೇಯ	Remainder theorem
ಶೋಧಕ	Discriminant
ಶ್ರೇಢಿ	Series, Progression
ಶ್ರೇಣಿ ಗುಣಲಬ್ಧ	Factorial
ಷಷ್ಟ್ಯಂಶ ಪದ್ಧತಿ	Sexagesimal system
ಸಂಕ್ಷೇಪಿಸು	Simplify
ಸಂಖ್ಯೆ	Number
ಸಂಗತ ಮಧ್ಯಕ	Harmonic mean
ಸಂಗತ ಶ್ರೇಢಿ	Harmonic progression
ಸಂಬಂಧಿತ ಕೋನಗಳು	Allied angles
ಸಂಯುಕ್ತ ಸಂಖ್ಯೆ	Composite number
ಸಮತಲ	Plane
ಸಮದೂರ	Equidistant
ಸಮದ್ವಿಬಾಹು	Isosceles
ಸಮ-ಭುಜ ತ್ರಿಕೋನ	Equilateral triangle
ಸಮಮಿತ	Symmetric
ಸಮ ಸಂಖ್ಯೆ	Even number
ಸಮಾಂಗ	Symmetric
ಸಮಾಂತರ ಮಧ್ಯಕ	Arith metic mean
ಸಮಾಂತರ ಶ್ರೇಢಿ	Arithmeticprogression
ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜ	Parallelogram
ಸಮಾನತಾ	Equivalence
ಸಮೀಕರಣ	Equation
ಸರಿ-ಸಂಖ್ಯೆ	Even number
ಸಹವರ್ತಿ	Conjugate
ಸಹಾಂಕ	Co-efficient
ಸಾಮಾನ್ಯ	Common
ಸಾಮಾನ್ಯ ಪ್ರಮಾಣ	Common ratio
ಸಾಮಾನ್ಯ ವ್ಯತ್ಯಾಸ	Common difference
ಸೂತ್ರ	Formula
ಸ್ಥಾನಾಂತರ	Shift
ಸ್ಥಿರಗುಣಕ	Constant coefficient
ಸ್ಥಿರಾಂಕ	Fixed number
ಸ್ವತುಲ್ಯ	Reflexive
ಸ್ವರ	Vowel
ಸ್ವಾಭಾವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆ	Natural number
ಕ್ಷಿತಿಜ ರೇಖೆ	Horizontal line

ಇಂಗ್ಲಿಷ್-ಕನ್ನಡ ಪಾರಿಭಾಷಿಕ ಶಬ್ದಗಳ ಪಟ್ಟಿ

English	ಕನ್ನಡ
Abscissa	ಕೋಟಿ, x-ನಿರ್ದೇಶಕ
Acute angle	ಲಘುಕೋನ
Allied angles	ಸಂಬಂಧಿತ ಕೋನಗಳು
Altitude	ಉನ್ನತಿ
Analytical geometry	ನಿರ್ದೇಶಕ ರೇಖಾಗಣಿತ
Angle	ಕೋನ
Angle of depression	ಅವನತ ಕೋನ
Angle of elevation	ಉನ್ನತ ಕೋನ
Anticlockwise	ಅಪ್ರದಕ್ಷಿಣೆ
Antisymmetric	ಪ್ರತಿಸಮಮಿತ
Arc	ಕಂಸ
Area	ವಿಸ್ತೀರ್ಣ
Arithmetic mean	ಸಮಾಂತರ ಮಧ್ಯಕ
Arithmetic progression	ಸಮಾಂತರ ಶ್ರೇಢಿ
Axis	ಅಕ್ಷ
Binomial	ದ್ವಿಪದ
Bisector	ದ್ವಿಭಾಜಕ
Calculus	ಕಲನಶಾಸ್ತ್ರ
Centesimal system	ಶತಮಾಂಶ ಪದ್ಧತಿ
Centroid	ಗುರುತ್ವಕೇಂದ್ರ
Circular permutation	ವರ್ತುಳೀಯ ಕ್ರಮಯೋಜನೆ
Circum-centre	ಪರಿಕೇಂದ್ರ
Circum-circle	ಪರಿವೃತ್ತ
Circumference	ಪರಿಧಿ
Circum-radius	ಪರಿತ್ರಿಜ್ಯ
Clockwise	ಪ್ರದಕ್ಷಿಣೆ
Co-efficient	ಸಹಾಂಕ, ಗುಣಕ
Collinear	ಏಕರೇಖಸ್ಥ
Combination	ವಿಕಲ್ಪ
Common	ಸಾಮಾನ್ಯ
Common difference	ಸಾಮಾನ್ಯ ವ್ಯತ್ಯಾಸ, ಪ್ರಚಯ
Common ratio	ಸಾಮಾನ್ಯ ಪ್ರಮಾಣ
Complementary	ಅನುಪೂರಕ
Complex number	ಮಿಶ್ರ ಊಹ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆ
Composite numbers	ಸಂಯುಕ್ತ (ವಿಭಾಜ್ಯ) ಸಂಖ್ಯೆ
Concurrent	ಏಕಬಿಂದುಸ್ಥ
Conjugate	ಸಹವರ್ತಿ
Consonant	ವ್ಯಂಜನ
Constant	ಸ್ಥಿರಗುಣಕ
Convergent	ಅಭಿಸರಣ
Co-ordinate geometry	ನಿರ್ದೇಶಕ ರೇಖಾಗಣಿತ
Co-ordinates	ನಿರ್ದೇಶಕಗಳು
Corresponding	ಅನುರೂಪ
Cube root	ಘನಮೂಲ
Decomposition	ಸಂವಿಭಜನೆ
Diagonal	ವಿಕರ್ಣ
Diameter	ವ್ಯಾಸ
Digit	ಅಂಕಿ
Discriminant	ಶೋಧಕ
Divergent	ಅಪಸರಣ
Equation	ಸಮೀಕರಣ
Equidistant	ಸಮದೂರ
Equilateral triangle	ಸಮಭುಜ ತ್ರಿಕೋನ
Equivalence	ಸಮಾನತಾ
Expression	ಉಕ್ತಿ
Factor	ಅಪವರ್ತನ
Factorial	ಶ್ರೇಣಿ ಗುಣಲಬ್ಧ
Factorization	ಅಪವರ್ತನೀಕರಣ
Finite series	ಪರಿಮಿತ ಶ್ರೇಢಿ
First term	ಪ್ರಥಮ ಪದ
Fixed number	ಸ್ಥಿರಾಂಕ
Formula	ಸೂತ್ರ
Fourth root	ಚತುರ್ಮೂಲ
Function	ಉತ್ಪನ್ನ
Fundamental principle	ಮೂಲ ಸೂತ್ರ
Geometric mean	ಗುಣೋತ್ತರ ಮಧ್ಯಕ
Geometric progression	ಗುಣೋತ್ತರ ಶ್ರೇಢಿ
Harmonic mean	ಸಂಗತ ಮಧ್ಯಕ
Harmonic progression	ಸಂಗತ ಶ್ರೇಢಿ
Horizontal line	ಕ್ಷಿತಿಜ ರೇಖೆ
Identity	ನಿತ್ಯಸಮೀಕರಣ
If and only if (iff)	ಆಗಿದ್ದರೆ ಮತ್ತು ಆಗಬೇಕಿದ್ದರೆ
Imaginary	ಊಹ್ಯ, ಊಹ್ಯಾತ್ಮಕ

Imaginary unit	ಊಹ್ಯಮಾನ
Improper fraction	ಅಶುದ್ಧ ಭಿನ್ನರಾಶಿ
Indices	ಘಾತಾಂಕಗಳು
Inclination	ಬಾಗು
Infinite series	ಅಪರಿಮಿತ ಶ್ರೇಢಿ
Infinite terms	ಅಪರಿಮಿತ ಪದಗಳು
Infinity	ಅನಂತ
Intercept	ರೇಖಾಂತರ, ಛೇದಕ
Inverse	ವಿಲೋಮ
Isosceles	ಸಮದ್ವಿಬಾಹು
Limit	ಮಿತಿ
Linear	ರೇಖೀಯ
Locus	ಬಿಂದುಪಥ
Logarithm	ಪ್ರತಿಘಾತ
Mathematical induction	ಗಣಿತಾನುಮಾನ
Median	ಮಧ್ಯರೇಖೆ
Multiple	ಅಪವರ್ತ್ಯ
Multiplier	ಗುಣಕ
Natural number	ಸ್ವಾಭಾವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆ
Negative	ಋಣ
Obtuse angle	ಅಧಿಕಕೋನ
Ordinate	ಭುಜ, y-ನಿರ್ದೇಶಕ
Orthocentre	ಲಂಬಕೇಂದ್ರ
Oscillatory	ಡೋಲಾಯಮಾನ
Parallelogram	ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜ
Partial fraction	ಆಂಶಿಕ ಭಿನ್ನರಾಶಿ
Partial order	ಆಂಶಿಕ ಕ್ರಮ
Perfect square	ಶುದ್ಧವರ್ಗ
Permutation	ಕ್ರಮಯೋಜನೆ
Plane	ಸಮತಲ
Polynomial	ಬಹುಘಾತಪದಿ
Positive	ಧನ
Product	ಗುಣಲಬ್ಧ
Projection	ಪ್ರಕ್ಷೇಪಣ
Proper fraction	ಶುದ್ಧ ಭಿನ್ನರಾಶಿ
Quadrant	ಪಾದ
Quadratic equation	ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣ
Quadrilateral	ಚತುರ್ಭುಜ
Radius	ತ್ರಿಜ್ಯ
Real number	ವಾಸ್ತವ (ನೈಜ)ಸಂಖ್ಯೆ
Reciprocal	ವಿಲೋಮ
Recurring	ಪುನರಾವೃತ್ತಿ ಹೊಂದು
Reflexion	ಪ್ರತಿಫಲನ
Reflexive	ಆತ್ಮವರ್ತಕ, ಸ್ವತುಲ್ಯ
Remainder theorem	ಶೇಷ ಪ್ರಮೇಯ
Restricted permutation	ನಿರ್ಬಂಧಿತ ಕ್ರಮಯೋ
Rhombus	ವಜ್ರಾಕೃತಿ
Right angle	ಲಂಬಕೋನ
Root	ಮೂಲ
Second degree	ಎರಡನೆಯ ಘಾತ
Sector	ತ್ರಿಜ್ಯಾಖಂಡ
Segment	ಖಂಡ
Sexagesimal system	ಷಷ್ಟ್ಯಂಶ ಪದ್ಧತಿ
Shift	ಸ್ಥಾನಾಂತರ
Side	ಬಾಹು
Similar triangles	ಸಮರೂಪ ತ್ರಿಕೋನಗ
Slope	ಓಟ
Square root	ವರ್ಗಮೂಲ
Sum	ಮೊತ್ತ
Symmetric	ಸಮಾಂಗ, ಸಮಮಿತ
Theorem	ಪ್ರಮೇಯ
Transitive	ಪ್ರವಹನೀಯ
Triangle	ತ್ರಿಕೋನ, ತ್ರಿಭುಜ
Trigonometry	ತ್ರಿಕೋನಮಿತಿ
Undefined	ಅನಾಖ್ಯಾತ, ಅವಾ
Unit	ಮೂಲಮಾನ
Unity	ಐಕ್ಯಧಾತು
Variable	ಚರಾಕ್ಷರ
Vertices	ಶೃಂಗಗಳು
Vowel	ಸ್ವರ

ಕನ್ನಡ ವಿಶ್ವವಿದ್ಯಾಲಯದ ಗುರಿ ಎಂದರೆ ಕನ್ನಡದ ಸರ್ವತೋಮುಖವಾದ ಬೆಳವಣಿಗೆಯಾಗಿದೆ. ಆದರೆ ಇಂಗ್ಲಿಷ್ ಮಾಧ್ಯಮದ ಭರಾಟೆಯಲ್ಲಿ ಕನ್ನಡದ ಬೆಳವಣಿಗೆ ಎದಕ್ಕೂ ಸಾಲದೆನ್ನುವುದನ್ನು ಬೇರೆ ಹೇಳಬೇಕಾಗಿಲ್ಲ. ಇಂಗ್ಲಿಷ್ ಕಲಿತಮೇಲೆ ನಾವು ನಮ್ಮ ಇತಿಹಾಸದ ಕಲ್ಪನೆಯನ್ನು ರೂಪಿಸಿಕೊಂಡೆವು. ಈ ಐತಿಹಾಸಿಕ ಪ್ರಜ್ಞೆಯಿಂದ ನಮ್ಮ ಹಳೆಯ ಜ್ಞಾನಶಾಸ್ತ್ರವನ್ನು ರೂಪಿಸಿಕೊಂಡೆವು. ಇದರ ಪರಿಣಾಮವಾಗಿ ನಮ್ಮಲ್ಲಿದ್ದ ವಿಜ್ಞಾನಗಳೆಲ್ಲ ಗೊಡ್ಡು ಪುರಾಣಗಳಾದವು. ಆಯುರ್ವೇದದಂಥ ವಿಜ್ಞಾನ, ದೇವಸ್ಥಾನ ರಚನೆಯಂಥ ನಮ್ಮ ಇಂಜಿನಿಯರಿಂಗ್ ಕೂಡ ಗೊಡ್ಡು ಪುರಾಣಗಳಾಗಿ ವಿಶ್ವಾಸ ಕಳೆದುಕೊಂಡವು. ನೆಲ, ಹೊಲ ಕನ್ನಡವಾಗಿದ್ದರೂ ಕೃಷಿಶಾಸ್ತ್ರ ಕೂಡ ಇಂಗ್ಲಿಷಿನಲ್ಲಿ ರೂಪುಗೊಳ್ಳುತ್ತಿರುವ ವಿಪರ್ಯಾಸ ನಮ್ಮದಾಗಿದೆ.

ಈ ವಿಪರ್ಯಾಸವನ್ನು ತಡೆಗಟ್ಟುವುದು ಮತ್ತು ಕನ್ನಡದಲ್ಲಿ ವಿಜ್ಞಾನದ ಪಠ್ಯಪುಸ್ತಕಗಳನ್ನು ಸಿದ್ಧಪಡಿಸುವುದು ಕನ್ನಡ ವಿಶ್ವವಿದ್ಯಾಲಯದ ಗುರಿಯಾಗಿದೆ. ವಿಜ್ಞಾನದ ವಿಷಯಗಳನ್ನು ಹೇಳುವ ಸಲುವಾಗಿಯೇ ಇಂದು ಪ್ರಮಾಣಿತ ವಿಜ್ಞಾನ ಭಾಷೆಯೊಂದನ್ನು ಕನ್ನಡದಲ್ಲಿ ಸೃಷ್ಟಿಸಿ ಬಳಕೆಗೆ ತರುವುದು ತೀರಾ ಅಗತ್ಯವಾಗಿದೆ. ಈ ಅಗತ್ಯವನ್ನು ಪೂರೈಸಲು ನಾಡಿನ ವಿಷಯತಜ್ಞರೂ, ಭಾಷಾ ತಜ್ಞರೂ ಕೂಡಿ ವಿಜ್ಞಾನದ ಈ ಪಠ್ಯಪುಸ್ತಕಗಳನ್ನು ಸಿದ್ಧಪಡಿಸಿದ್ದಾರೆ.

ಚಂದ್ರಶೇಖರ ಕಂಬಾರ
ಕುಲಪತಿಗಳು